Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ

В. И. Даниловская

(Москва)

В работе рассматривается задача о температурных напряжениях, возникающих в упругом полупространстве вследствие неравномерного нагрева. Нагрев полупространства, первоначально находящегося при нулевой температуре, происходит вследствие теплообмена со средой [1], имеющей температуру T_0.

Обозначим температуру полупространства через $T = T(x, t)$. Возникающие вследствие неравномерного распределения температуры напряжения будут зависеть только от x и t. Смещения v, w и напряжения X_y Z_x считаем равными нулю. Тогда два из уравнений движения будут удовлетворены тождественно, а оставшееся после преобразований примет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X_x}{\partial t^2} = s \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \qquad \left(a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}\right) \tag{1}$$

Здесь a — скорость звука, λ и μ — постоянные Ламе, $s = \alpha(2\mu + 3\lambda)$, причем α — коэффициент линейного расширения материала.

Температура полупространства удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (x \geqslant 0,\ t \geqslant 0) \tag{2}$$

при начальном и граничном условиях

$$T(x, 0) = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_0) \qquad \text{при } x = 0 \tag{3}$$

Здесь k — коэффициент температуропроводности, h — коэффициент относительной теплоотдачи от среды к границе полупространства [2].

Задачу решаем методом операционного исчисления. Пусть

$$T^*(x, p) = \int_0^\infty T(x, t)\, e^{-pt}\, dt$$

Тогда решение уравнения теплопроводности при условиях (3) в символах операционного исчисления запишется в виде

$$T^* = \frac{hT_0}{p\,(h + \sqrt{p/k})}\, e^{-x\sqrt{p/k}} \tag{4}$$

---

[1] В заметке [1] получено решение более простой задачи, а именно были найдены кратковременные напряжения, возникающие в полупространстве при внезапном нагреве его границы. Решение этой задачи из предлагаемого решения получается как частный случай.

[2] Заметим, что граничное условие $T(0, t) = T_0$ в работе [1] может быть получено из граничного условия (3) предельным переходом при $h \to \infty$.

Переходим к решению термоупругой задачи. Напряжение X_x удовлетворяет уравнению (1), начальным и граничным условиям

$$X_x\Big|_{t=0} = \frac{\partial X_x}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad X_x\Big|_{x=0} = 0 \qquad (t \geqslant 0) \tag{5}$$

а также предельному условию: напряжение X_x остается конечным при $x \to \infty$.

Переходя к изображению уравнения (1), принимая во внимание начальные условия для температуры и напряжения X_x, получим

$$a^2 \frac{d^2 X_x^*}{dx^2} - p^2 X_x^* = \frac{phT_0 s}{(h + \sqrt{p/k})} e^{-x\sqrt{p/k}} \qquad \left(X_x^*(p, x) = \int\limits_0^\infty X_x(t, x) e^{-pt} dt\right) \tag{6}$$

Граничное условие принимает вид $X_x^* = 0$ при $x = 0$, причем X_x^* остается конечной величиной при $x \to \infty$. Решение уравнения (6) при этих условиях имеет вид

$$X_x^* = \frac{sT_0}{(p - a/k)(\sqrt{p/kh^2} + 1)} \left[\exp\left(-\frac{x}{a} p\right) - \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{k}} \sqrt{p}\right)\right] \tag{7}$$

Строя оригинал (7), для напряжения X_x, получим следующее выражение для моментов времени $t \leqslant x/a$

$$X_x = -sT_0 \left\{\frac{\exp(a^2 t/k)}{2} \frac{\exp(-ax/k)}{1 + a/kh} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{kt}} - \sqrt{\frac{a^2}{k} t}\right)\right] + \right.$$
$$+ \frac{\exp(a^2 t/k)}{2} \frac{\exp(ax/k)}{1 - a/kh} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{kt}} + \sqrt{\frac{a^2}{k} t}\right)\right] -$$
$$\left. - \frac{\exp(xh + tkh^2)}{1 - a^2/k^2h^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{kt}} + \sqrt{tkh^2}\right)\right]\right\} \tag{8}$$

для моментов времени $t \geqslant x/a$

$$X_x = sT_0 \frac{1}{1 - a^2/k^2h^2} \left\{\exp\left[\frac{a^2}{k}\left(t - \frac{x}{a}\right)\right] \left[1 - \frac{a}{kh} \Phi\left(\sqrt{\frac{a^2}{k}\left(t - \frac{x}{a}\right)}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \exp\left[kh^2\left(t - \frac{x}{a}\right)\right] \left[1 - \Phi\left(\sqrt{kh^2\left(t - \frac{x}{a}\right)}\right)\right]\right\} -$$
$$- sT_0 \left\{\frac{\exp(a^2 t/k)}{2} \frac{\exp(-ax/k)}{1 + a/kh} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{kt}} - \sqrt{\frac{a^2}{k} t}\right)\right] + \right.$$
$$+ \frac{\exp(a^2 t/k)}{2} \frac{\exp(ax/k)}{1 - a/kh} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{kt}} + \sqrt{\frac{a^2}{k} t}\right)\right] -$$
$$\left. - \frac{\exp(xh + tkh^2)}{1 - a^2/k^2h^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{kt}} + \sqrt{tkh^2}\right)\right]\right\} \tag{9}$$

Здесь

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\theta^2} d\theta \tag{10}$$

Для исследования напряжения X_x введем безразмерные величины

$$t = n^2 \frac{x}{a}, \qquad \zeta^2 = \frac{ax}{k}, \qquad \beta = \frac{a}{kh} \tag{11}$$

После подстановки новых переменных выражения (8) и (9) примут вид: для $n^2 \leqslant 1$ $(t \leqslant x/a)$

$$X_x = -sT_0 \left\{\frac{\exp[\zeta^2(n^2 - 1)]}{2(1 + \beta)} \left[1 - \Phi\left(\zeta \frac{1 - 2n^2}{2n}\right)\right] + \frac{\exp[\zeta^2(n^2 + 1)]}{2(1 - \beta)} \left[1 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \Phi\left(\zeta \frac{1 + 2n^2}{2n}\right)\right] - \frac{1}{1 - \beta^2} \exp\left[\zeta^2\left(\frac{1}{\beta} + \frac{n^2}{\beta^2}\right)\right] \left[1 - \Phi\left(\zeta \frac{\beta + 2n^2}{2n\beta}\right)\right]\right\} \tag{12}$$

для моментов времени $n^2 \geqslant 1$ $(t \geqslant x / a)$

$$X_x = \frac{sT_0}{1-\beta^2}\Big\{\beta \exp\left[\zeta^2 (n^2-1)\right]\left[1-\Phi(\zeta\sqrt{n^2-1})\right] +$$

$$+\tfrac{1}{2}(1-\beta)\exp\left[\zeta^2(n^2-1)\right]\left[1-\Phi\left(\zeta\frac{2n^2-1}{2n}\right)\right] -$$

$$-\tfrac{1}{2}(1+\beta)\exp\left[\zeta^2(n^2+1)\right]\left[1-\Phi\left(\zeta\frac{2n^2+1}{2n}\right)\right] -$$

$$-\exp\left[\frac{\zeta^2(n^2-1)}{\beta^2}\right]\left[1-\Phi\left(\frac{\zeta\sqrt{n^2-1}}{\beta}\right)\right] +$$

$$+\exp\left[\zeta^2\left(\frac{1}{\beta}+\frac{n^2}{\beta^2}\right)\right]\left[1-\Phi\left(\zeta\frac{\beta+2n^2}{2n\beta}\right)\right]\Big\} \tag{13}$$

Из формул (12) и (13) легко сделать следующие заключения.

1. При $n^2 = 1$ $(t = x / a)$ никакого скачка напряжения X_x из области отрицательных значений в область положительных не будет.

2. Характер изменения напряжения X_x с течением времени в каком-либо фиксированном сечении будет зависеть от параметра β, напряжение X_x для малых значений параметра $\beta\,(\beta \ll 1)$ растет от нуля до некоторого отрицательного значения, затем убывает до нуля, переходит в область положительных значений, достигает некоторого максимального положительного значения и затем довольно быстро убывает до нуля.

При больших значениях параметра $\beta\,(\beta \gg 1)$ напряжение X_x растет в области положительных значений, достигает некоторого максимума и затем быстро убывает до нуля [1].

Из формулы (12) и (13) следует, что значение параметра $\beta = 1$ требует дополнительного исследования.

Из формул (12) предел напряжения X_x при $\beta \to 1$ находится непосредственно. Имеем для $n^2 \leqslant 1$ $(t \leqslant x / a)$

$$\lim_{\beta\to 1} X_x = -\frac{sT_0}{4}\Big\{\exp\left[\zeta^2(n^2-1)\right]\left[1-\Phi\left(\zeta\frac{1-2n^2}{2n}\right)\right] -$$

$$-\exp\left[\zeta^2(1+n^2)\right]\left[1-\Phi\left(\zeta\frac{1+2n^2}{2n}\right)\right]\Big\}$$

Выражение (13) при $\beta = 1$ принимает неопределенный вид $0:0$. Раскрывая неопределенность имеем для $n^2 \geqslant 1$ $(t \geqslant x / a)$

$$\lim_{\beta\to 1} X_x = -\frac{sT_0}{2}\Big\{\exp\left[\zeta^2(n^2-1)\right]\left[1-\Phi(\zeta\sqrt{n^2-1})\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\exp\left[\zeta^2(n^2-1)\right]\left[1-\Phi\left(\zeta\frac{2n^2-1}{2n}\right)\right] +$$

$$+2\zeta^2(n^2-1)\exp\left[\zeta^2(n^2-1)\right]\left[1-\Phi(\zeta\sqrt{n^2-1})\right] -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\zeta\sqrt{n^2-1}-\frac{1}{2}\exp\left[\zeta^2(n^2+1)\right]\left[1-\Phi\left(\zeta\frac{1+2n^2}{2n}\right)\right] -$$

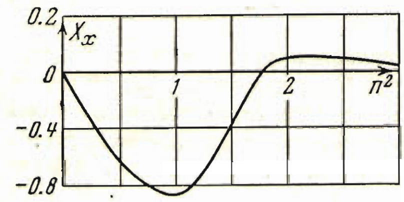
$$-\exp\left[\zeta^2(1+n^2)\right](1+2n^2)\left[1-\Phi\left(\zeta\frac{1+2n^2}{2n}\right)\right]+\frac{2}{\sqrt{\pi}}n\exp\left(-\frac{\zeta^2}{4n^2}\right)\Big\}$$

---

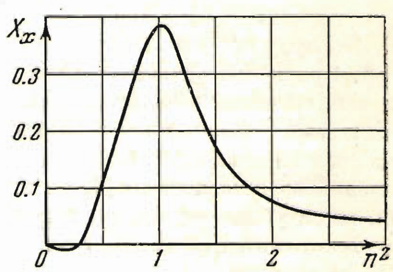
[1] Переходя в (12) и (13) к пределу при $\beta \to 0$ $(h = \infty)$ и пользуясь при этом асимптотическими разложениями для интегралов вероятностей $\Phi(z)$, получим для X_x выражения, которые совпадают с полученными в заметке [1].

В этом случае, как и для других значений β напряжение X_x, достигая некоторого максимального значения, очень быстро стремится к нулю.

Зафиксируем теперь какое-либо сечение ζ и посмотрим, как будет изменяться напряжение X_x с течением времени в этом сечении. Для простоты рассмотрим сечение $\zeta = 1$. Заметим, что так как $\zeta^2 = ax/k$ и a величина очень большая, то $\zeta = 1$ соответствует сечению, находящемуся на очень близком расстоянии от границы полупространства. Для малых значений β напряжение X_x растет от нуля до некоторого отрицательного значения, причем так, что $|X_x| < sT_0$ в момент времени, близкий к моменту $t = x/a$, имеет маисимум, затем плавно без скачка переходит в область положительных значений, достигает своего положительного наибольшего значения, а затем очень быстро убывает до нуля. Следует при этом заметить, что разрывная кривая $X_x = X_x(\zeta, t; \beta) = X_x(1, t; 0)$ для случая $\beta = 0$ является предельной, к которой равномерно стремятся все кривые семейства $X_x = X_x(\zeta, t; \beta)$, зависящие от параметра β.



Фиг. 1



Фиг. 2

Например, для $\beta = 0.01$ напряжение X_x растет от нуля до $-0.89\, sT_0$, затем быстро убывает до нуля, переходит в область положительных значений, достигает там своего $\max = 0.1\, sT_0$ и очень быстро убывает до нуля. Изменение напряжения X_x в сечении $\zeta = 1$ с течением времени представлено в долях от sT_0 на фиг. 1.

На фиг. 2 дано изменение напряжения X_x (в долях от sT_0) с течением времени в сечении $\zeta = 1$ для $\beta = 10$.

При увеличении параметра β характер изменения напряжения будет несколько иным. При очень больших значениях β напряжение X_x будет расти и, достигнув положительного максимума, быстро падет до нуля.

При $\beta \to \infty$ вообще никакого напряжения не возникает $X_x = 0$.

Напряжения $Y_y = Z_z$ будут зависеть от условий на бесконечности. Если допустить, что деформации ε_z и ε_y на бесконечности отсутствуют (а это означает, что они вообще отсутствуют в каждой точке упругого полупространства), то

$$Y_y = Z_z = \frac{\nu}{1-\nu} X_x - E\alpha T$$

Здесь, как обычно, E — модуль упругости материала, ν — коэффициент Пуассона.

Поступила 29 XI 1951

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Даниловская В. И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 3.
2. Диткин В. А. и Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. Гостехиздат. 1951.