Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Г. С. Шапиро

(Москва)

В работе рассматривается распространение упруго-пластической волны нагружения в полубесконечном стержне переменного сечения при линейном упрочнении. Эта задача родственна задачам о распространении цилиндрических [1] и сферических [2—4] волн. В § 1 приведены общие зависимости. На переднем фронте упругой волны и на фронте, отделяющем упругую волну от пластической, выражения для напряжений получены в конечном виде; эти напряжения не зависят от закона изменения давления на конце стержня. В области пластических деформаций решение может быть получено путем построения сетки характеристик. В § 2 рассматривается конический стержень, полное решение для которого находится в конечном виде. В § 3 приводятся некоторые результаты, относящиеся к стержню постоянного сечения. В п. «а» рассматривается стержень, заключенный в абсолютно жесткую оболочку; трение между стержнем и оболочкой предполагается отсутствующим. В п. «б» показано, что основные результаты, полученные для распространения упругих нелинейных колебаний при малых деформациях [5], могут быть распространены и на случай деформаций конечных.

Результаты, полученные в § 1, 2 и 3 (п. «а»), могут оказаться полезными для построения приближенной теории упруго-пластического соударения тел. Например, в случае удара штампа о полупространство, последнее в некоторой области контакта можно моделировать при помощи стержня, заключенного в жесткую оболочку, как в § 3 (п. «а»); более точные результаты можно получить, рассматривая стержень переменного сечения, например, конический с концевым сечением, равным площадке контакта; возможность такого моделирования требует дальнейших исследований.

§ 1. Уравнение продольных колебаний стержня переменного сечения для случая активной деформации имеет вид [5]:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\sigma = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

где $\omega(x)$ — площадь поперечного сечения стержня. При линейном упрочнении

$$\sigma = E\varepsilon_s + E'(\varepsilon - \varepsilon_s)$$

вместо (1.1) в безразмерных величинах $\xi\tau\zeta$ имеем

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\omega'}{\omega}\left[\varepsilon_s(1-\alpha^2) + \alpha\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right] \tag{1.2}$$

Здесь

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \tau = \frac{a_0 t}{h}, \quad \zeta = \frac{u}{h}, \qquad \alpha = \frac{a_1}{a_0}, \quad a_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}$$

где h — характерный размер стержня. Дифференциальные уравнения характеристик уравнения (1.2) будут

$$d\xi = \pm d\tau, \qquad d\zeta_\tau = \pm \alpha d\zeta_\xi + \frac{\omega'}{\omega}[\varepsilon_s + \alpha^2(\zeta_\xi - \varepsilon_s)]\,d\tau \tag{1.3}$$

Пусть на конце стержня мгновенно приложено давление, которое в дальнейшем возрастает. Тогда вдоль стержня будут распространяться две волны — упругая и пластическая — со скоростями a_0 и a_1. Решение как для упругой, так и для пластической зон можно получить подобно тому, как это сделано Х. А. Рахматулиным [1] для задачи о распространении цилиндрических волн.

На переднем фронте упругой волны $\xi = 1 + \tau$ имеем условия

$$\zeta_\tau = -\zeta_\xi, \qquad d\zeta_\tau = d\zeta_\xi + \frac{\omega'}{\omega}\zeta_\xi\, d\xi \tag{1.4}$$

Интегрируя систему уравнений (1.4), и учитывая, что на конце стержня при $\omega = \omega_0$ должно быть $\zeta_\xi = -\varepsilon_s$, находим

$$\zeta_\xi = -\varepsilon_s \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}, \qquad \zeta_\tau = \varepsilon_s \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}} \tag{1.5}$$

Решение для упругой области сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau^2} = \frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2} + \frac{\omega'}{\omega}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} \tag{1.6}$$

при условиях (1.4) на переднем фронте $\xi = 1 + \tau$ и условии $\zeta_\xi = -\varepsilon_s$ на границе $\xi = 1 + \alpha\tau$ между упругой и пластической зонами. Это решение может быть получено построением сетки характеристик.

Обозначим ζ° значения ζ при $\xi = 1 + \alpha\tau$. В области пластических деформаций имеем уравнение (1.2) и условие непрерывности смещений $\zeta = \zeta^\circ$ на прямой $\xi = 1 + \alpha\tau$. Отсюда

$$\zeta_\tau - \zeta_\tau^\circ = -\alpha(\zeta_\xi - \zeta_\xi^\circ) \tag{1.7}$$

Дифференцируя это равенство и исключая затем из него и из дифференциального уравнения характеристики (1.3) величины $d\xi_\tau$ и $d\tau$, имеем

$$-2\alpha\, d\zeta_\xi = \alpha\frac{\omega'}{\omega}\zeta_\xi\, d\xi + \varepsilon_s\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\frac{\omega'}{\omega}\, d\xi - d(\zeta_\tau^\circ + \alpha\zeta_\xi^\circ) \tag{1.8}$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $\omega = \omega_0$, $\zeta_\xi = -\varepsilon_0$ при $\xi = 1$, имеем

$$\begin{gathered}\zeta_\xi = -\varepsilon_0\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}} + f(\xi)\\ f(\xi) = \frac{1}{2\alpha}(\zeta_\tau^\circ + \alpha\zeta_\xi^\circ)\left(1 - \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}\right) - \\ - \varepsilon_s\frac{1-\alpha^2}{2\alpha^2}\left(1 - \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}\right) - \frac{1}{4\sqrt{\omega}}\int_{\omega_0}^{\omega}(\zeta_\tau^\circ + \alpha\zeta_\xi^\circ)\frac{d\omega}{\sqrt{\omega}}\end{gathered} \tag{1.9}$$

Отсюда видно, что деформации и скорости на передней границе области пластических деформаций зависят только от начального значения давления ε_0. Аналогичный вывод имеет место и в случае распространения цилиндрических [1] и сферических [2, 3, 4] волн.

Зона распространения волны сильного разрыва определяется условием

$$\zeta_\xi = -\varepsilon_s \qquad (\xi = \xi^*)$$

Отсюда, пользуясь зависимостью (1.9), получаем уравнения для ξ^* в виде

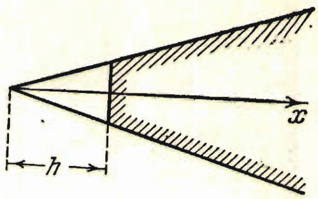
$$\sqrt{\frac{\omega(\xi^*)}{\omega_0}}\left[1 + \frac{1}{\varepsilon_s} f(\xi^*)\right] = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_s} \tag{1.10}$$

Полное решение для всей пластической зоны может быть получено путем построения сетки характеристик.

§ 2. Решение для конического стержня (фиг. 1) можно получить непосредственным интегрированием уравнения колебаний (1.1), что позволяет избежать численного интегрирования.

В области упругих деформаций уравнение колебаний имеет вид:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = \frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau^2} \tag{2.1}$$



Фиг. 1

Его решение будет

$$\zeta = \frac{1}{\xi}\left[\Phi(1+\tau+\xi) + \Psi(1+\tau-\xi)\right]$$

Функции Φ и Ψ находятся при помощи следующих условий:

на переднем фронте

$$\zeta = 0, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial\tau} + \frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = 0 \tag{2.2}$$

на границе пластической зоны

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = -\varepsilon_s \tag{2.3}$$

Условия (2.2) будут выполнены, если принять $\Phi = 0$, $\Psi(0) = 0$. Условие (2.3) приводит к уравнению

$$\Psi'(\eta) + \frac{1}{1+\lambda\eta}\Psi = (1+\lambda\eta)\,\varepsilon_s \qquad \left(\lambda = \frac{a_1}{a_0 - a_1}, \quad \eta = 1+\tau-\xi\right) \tag{2.4}$$

Его решение будет

$$\Psi(\eta) = \frac{\varepsilon_s}{1+2\lambda}\left[(1+\lambda\eta)^2 - (1+\lambda\eta)^{-\frac{1}{\lambda}}\right] \tag{2.5}$$

Окончательно для безразмерных смещений имеем

$$\zeta = \frac{\varepsilon_s}{\xi(1+2\lambda)}\left[(1+\lambda\eta)^2 - (1+\lambda\eta)^{-\frac{1}{\lambda}}\right] \tag{2.6}$$

Деформации на переднем фронте

$$\zeta_\xi = -\frac{\varepsilon_s}{\xi}$$

Тот же результат получается на основании (1.5).

В области пластических деформаций уравнение колебаний имеет вид;

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau^2} = \alpha^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2} + \frac{2}{\xi}\varepsilon_s(1-\alpha^2) + \frac{2\alpha^2}{\xi}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} \tag{2.7}$$

Его решение будет

$$\zeta = -2\varepsilon_s\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\xi\ln\xi + \frac{1}{\xi}\left[\Phi_1(1+\alpha\tau+\xi) + \Psi_1(1+\alpha\tau-\xi)\right] \tag{2.8}$$

Из условия непрерывности смещений на границе $\xi = 1+\alpha\tau$ между упругим и пластическим фронтами и полагая $\Psi(0) = 0$, находим функцию Φ_1 в виде

$$\Phi_1(\xi) = \frac{\varepsilon_s}{2(1+2\lambda)}\left[\xi^2 - \xi^{-\frac{1}{\lambda}}\right] + \varepsilon_s\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\right)\xi^2\ln\xi \tag{2.9}$$

Функцию Ψ_1 определяем из условия, что на конце стержня задано давление $\sigma = p(t)$. Так как

$$\sigma = \sigma_s + E'\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} - \varepsilon_s\right)$$

то, в безразмерных величинах, на конце стержня имеем

$$\pi(\tau) = 1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{\varepsilon_s}\frac{d\zeta}{d\xi} \qquad \left(\pi(\tau) = \frac{p(t)}{\sigma_s}\right) \tag{2.10}$$

Из выражений (2.7) и (2.10) находим дифференциальное уравнение для определения Ψ_1 в виде

$$\Psi_1'(\gamma) + \Psi_1(\gamma) = \Phi'(\gamma + 2) - \Phi_1(\gamma + 2) - \varepsilon_s\left[\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} + \pi\left(\frac{h}{a_1}\gamma\right)\right]$$

Значительное упрощение решения получается, если учесть, что для волны нагружения ζ есть убывающая функция от ξ; поэтому в практически интересном случае быстро убывающего по мере удаления от конца стержня смещения ζ, должно быть

$$\left|\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}\right| > \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right|$$

Если, кроме того, пренебречь величиной α^2 по сравнению с единицей, то вместо (2.7) получим уравнение колебаний в виде

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau^2} = \alpha^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2} + \frac{2}{\xi}\varepsilon_s \tag{2.11}$$

Решение его будет

$$\zeta = -\frac{2\varepsilon_s}{\alpha^2}\xi\ln\xi + \Phi_1(\xi + \alpha\tau + 1) + \Psi_1(1 + \alpha\tau - \xi) \tag{2.12}$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше, приходим к следующим выражениям для функций Φ_1 и Ψ_1:

$$\Phi_1(\xi) = \frac{\varepsilon_s}{\alpha^2}\xi\ln\frac{\xi}{2} - \frac{\varepsilon_s}{1+2\lambda}\left[\frac{\xi}{2} - \left(\frac{\xi}{2}\right)^{-1-\frac{1}{\lambda}}\right] \tag{2.13}$$

$$\Psi_1(\gamma) = \Phi_1(\gamma + 2) - \frac{\varepsilon_s}{\alpha^2}\left[\int\limits_0^\gamma \pi\left(\frac{\gamma h}{a_1}\right)d\gamma - \gamma\right] \tag{2.14}$$

Длина участка пластических деформаций, на котором распространяется волна сильного разрыва, определяется из условия (2.3). После некоторых преобразований приходим к уравнению, определяющему конечную координату ξ^* указанного участка:

$$\ln\xi^* + \beta(1 - \xi^{*-\nu}) + 1 = \pi(0)$$

причем

$$\beta = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}, \qquad \nu = 2 + \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

В случае малых α и $(\xi^* - 1)$ должно быть $\xi^* \approx \pi(0)$. Тот же результат получается и для сферических волн [4].

Рассмотрим числовой пример. Пусть $\alpha = 1/3$, тогда $\nu = 4$, $\beta = 1/12$. Приводим соответствующие значения ξ^* и $\pi(0)$:

$\xi^* =$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$\pi(0) =$	1.0	1.225	1.397	1.541	1.663

§ 3. а) Переходим к вопросу о распространении упруго-пластической волны нагружения в стержне, заключенном в абсолютно жесткую оболочку. Трение между оболочкой и стержнем принимать во внимание не будем. Совместим ось z с направлением распространения волны; плоскость xy будет ей перпендикулярна.

Последовательно имеем

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \qquad e = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3}\varepsilon_z \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered} \sigma_x = \sigma_y, \qquad \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0 \\ \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_z + 2\sigma_x) \end{gathered} \tag{3.2}$$

На основании закона Гука

$$\sigma = 3ke, \qquad \sigma_z + 2\sigma_x = 3k\varepsilon_z \tag{3.3}$$

При линейном упрочнении, интенсивности напряжений σ_i и деформации ε_i связаны зависимостью

$$\sigma_i = \sigma_s + E'(\varepsilon_i - \varepsilon_s) \tag{3.4}$$

или

$$\sigma_z - \sigma_x = \sigma_s + E'\left(\frac{2}{3}\varepsilon_z - \varepsilon_s\right) \tag{3.5}$$

Исключая из (3.3) и (3.5) напряжение σ_x, имеем

$$\sigma_z = \varepsilon_z\left(k + \frac{4}{9}E'\right) + \frac{2}{3}\varepsilon_s(E - E') \tag{3.6}$$

Отсюда уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

можно написать в виде обычного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \qquad \left(\sqrt{\frac{1}{\rho}\left(k + \frac{4}{9}E'\right)}\right) \tag{3.7}$$

б) Покажем, что результаты, полученные для нелинейных упругих колебаний при малых деформациях [5], могут быть распространены и на случай упругих колебаний при конечных деформациях.

Уравнение колебаний, отнесенное к деформированному состоянию с координатами x_1, имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.8}$$

Координаты x недеформированного состояния связаны с координатами x_1 зависимостью $x_1 = x + u$. Относя уравнение колебаний к недеформированному состоянию, имеем

$$\frac{1}{1+e}\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \left(e = \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{3.9}$$

Зависимость между напряжениями σ и удлинениями e возьмем в виде [6]

$$\sigma = Ee - A\nu^2 e^2 \tag{3.10}$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, A — константа, определяемая из условия наилучшего совпадения формулы (3.10) с экспериментальной диаграммой растяжения материала.

Подставляя зависимость (3.10) в уравнение (3.9), находим

$$a^2\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} \qquad \left(a = \sqrt{\frac{E - 2a\nu^2 e}{\rho}}\right) \tag{3.11}$$

Кроме того, имеем

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3.12)$$

Система уравнений (3.11), (3.12) представляет частный случай системы, описывающей продольные колебания стержней при малых деформациях, и нелинейной зависимости напряжений от деформаций. Поэтому все результаты, полученные, например, в работе [5], могут быть перенесены и на случай конечных деформаций.

Задачей о продольных колебаниях стержней при конечных деформациях занимался также Сэз [7], однако он пользовался неправильным выражением для закона Гука [8], в связи с чем результаты работы [7] являются сомнительными.

В качестве примера рассмотрим распространение прямой волны при колебаниях с конечными деформациями. Дифференциальные уравнения (3.11), (3.12) имеют два семейства характеристик, определяемых уравнениями:

для первого семейства

$$v - \lambda(e) = \xi, \qquad dx = a\,dt \qquad (3.13)$$

для второго семейства

$$v + \lambda(e) = \eta, \qquad dx = -a\,dt \qquad (3.14)$$

где

$$\lambda(e) = \int_0^e a(e)\,de = \int_0^e \sqrt{\frac{E - A\nu^2 e}{1+e}}\,de = \qquad (3.15)$$

$$= \sqrt{(E - 2A\nu^2 e)(1+e)} + \frac{E + 2A\nu^2 e}{\sqrt{2A\nu}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{2A\nu^2(1+\nu)}{E - 2A\nu^2 e}}$$

Решение

$$v + \lambda(e) = \mathrm{const}, \qquad x = at + \varphi(e) \qquad (3.16)$$

дает волну, фронт которой перемещается в положительном направлении оси x (прямая волна) и сопрягается с областью постоянных скоростей и деформаций.

Решение

$$v - \lambda(e) = \mathrm{const}, \qquad x = -at + \varphi(e)$$

отвечает случаю, когда фронт волны перемещается в отрицательном направлении оси x (обратная волна).

Поступила 1 X 1951

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О распространении цилиндрических волн при пластических деформациях (скручивающий удар). ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 1.
2. Альтшулер Л. В. О взрыве в сжимаемой пластичной среде. ДАН СССР. 1946. Т. II. № 3.
3. Бахшиян Ф. А. Упруго-пластическая сферическая волна нагружения. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 3.
4. Лунц Я. Б. О распространении сферических волн в упруго-пластической среде. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 1.
5. Шапиро Г. С. Продольные колебания стержней. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 5—6.
6. Риз П. М. Об упругих константах в нелинейной теории упругости. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 4.
7. Seth B. R. Finite longitudinal vibrations. Proceedings Indian Acad. of Sciences. 1947 (A). Vol. 25. P. 151—152.
8. Зволинский Н. В. и Риз П. М. О некоторых задачах нелинейной теории упругости. ПММ. 1938. Т. II. Вып. 4.