Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

К РАСЧЕТУ ТОНКОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ, ИМЕЮЩЕЙ ФОРМУ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

В. С. Жгенти

(Тбилиси)

1. Пусть срединная поверхность оболочки имеет форму параболоида вращения

$$\xi = \lambda (x^2 + y^2)$$

где λ — некоторый безразмерный параметр, который предполагается настолько малым по сравнению с единицей, что членами, содержащими вторые степени λ и выше, можно пренебречь.

На поверхности принимаем «почти декартовы координаты», получаемые рассечением поверхности двумя вертикальными взаимно ортогональными семействами параллельных плоскостей.

Компоненты тензоров первой и второй дифференциальной формы соответственно будут

$$\gamma_{11} = 1 + 4\lambda^2 x^2 \approx 1, \qquad \gamma_{12} = 4\lambda^2 xy \approx 0, \qquad \gamma_{22} = 1 + 4\lambda^2 y^2 \approx 1$$

$$\pi_{11} = \pi_{22} = \frac{2\lambda}{\sqrt{1 + 4\lambda^2 (x^2 + y^2)}} \approx 2\lambda, \qquad \pi_{12} \approx 0$$

Уравнения статики элемента оболочки в усилиях и моментах будут (см., например, [1])

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + X = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + Y = 0 \\
\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + 2\lambda (T_1 + T_2) + Z = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - N_2 + L_1 = 0, \qquad \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_1 + L_2 = 0
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где T_1, T_2, S, N_1, N_2, M_1, M_2 и H — компоненты усилий и моментов, а X, Y, Z, L_1, L_2 — составляющие главного вектора и главного момента внешних сил.

Пусть u, v, w — составляющие вектора малого перемещения точек срединной поверхности по линиям x, y и нормали поверхности соответственно.

К системе (1.1) нужно присоединить уравнения, которые выражают компоненты усилий и моментов через компоненты вектора смещения $\{u, v, w\}$. Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}
T_1 = B(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2), \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1), \quad S = B(1-\sigma)\omega \\
M_1 = -D(\beta_1 + \sigma\beta_2), \quad M_2 = -D(\beta_2 + \sigma\beta_1), \quad H = -D(1-\sigma)\tau
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где

$$\begin{gathered}
B = \frac{Eh}{1-\sigma^2}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - 2\lambda w, \qquad \beta_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - 2\lambda w, \qquad \beta_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь в формулах (1.3) E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки,

Следуя И. Н. Векуа, введем обозначения (см. [2], § 54, стр. 255)

$$T = T_1 + T_2, \qquad P = T_1 - T_2 + 2iS, \qquad N = N_1 + iN_2$$
$$M = M_1 + M_2, \qquad Q = M_1 - M_2 + 2iH, \qquad U = u + iv \tag{1.4}$$

Тогда, очевидно, будем иметь

$$T_1 = \tfrac{1}{2}T + \tfrac{1}{4}(P + \overline{P}), \qquad S = -\tfrac{1}{4}i(P - \overline{P}), \qquad N_1 = \tfrac{1}{2}(N + \overline{N})$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2}T - \tfrac{1}{4}(P + \overline{P}), \qquad H = -\tfrac{1}{4}i(Q - \overline{Q}), \qquad N_2 = -\tfrac{1}{2}i(N - \overline{N})$$
$$M_1 = \tfrac{1}{2}M + \tfrac{1}{4}(Q + \overline{Q}), \qquad u = \tfrac{1}{2}(U + \overline{U})$$
$$M_2 = \tfrac{1}{2}M - \tfrac{1}{4}(Q + \overline{Q}), \qquad v = -\tfrac{1}{2}i(U - \overline{U}) \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем черта обозначает сопряженное комплексное значение.

Введем теперь комплексные переменные $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$ и связанные с ними дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1.6}$$

Тогда, принимая во внимание (1.3) — (1.5), систему уравнений (1.1) и (1.2) можно представить в виде

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} + F = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} + \frac{\partial \overline{N}}{\partial \zeta} + 2\lambda T + Z = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial \zeta} - N + L = 0 \tag{1.8}$$

$$T = B(1 + \sigma)\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \overline{U}}{\partial \zeta} - 4\lambda w\right), \qquad P = 2B(1 - \sigma)\frac{\partial U}{\partial \zeta} \tag{1.9}$$

$$M = -D(1 + \sigma)\nabla^2 w, \qquad Q = -4D(1 - \sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \tag{1.10}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta}, \qquad F = X + iY, \qquad L = L_2 + iL_1 \tag{1.11}$$

2. Пусть G_0 — область на поверхности параболоида вращения, занимаемая срединной поверхности оболочки. Пусть G — соответствующая ей односвязная область на плоскости $z = x + iy$; очевидно, G есть ортогональная проекция области G_0 на плоскости $z = x + iy$.

Предположим, что составляющие X, Y внешней силы имеют потенциал, т. е.

$$F = X + iY = 2\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} + i\frac{\partial \Omega}{\partial y} \tag{2.1}$$

где Ω — действительная функция точки (x, y).

В силу первого уравнения (1.7), применяя (2.1), легко показать, что

$$T = \nabla^2 \Phi - 2\Omega, \qquad P = -4\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} \tag{2.2}$$

где Φ — действительная функция точки (x, y).

Подставив выражение P во второе уравнение (1.9), получим

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} = -\frac{2}{B(1-\sigma)}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2}, \quad \text{или} \quad U = -\frac{2}{B(1-\sigma)}\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \varphi_1(z) \tag{2.3}$$

где $\varphi_1(z)$ — произвольная аналитическая функция в G.

Подставляя теперь в первое уравнение (1.9) выражения T и U согласно (2.2) и (2.3), в силу (1.11) получим

$$w = -\frac{\nabla^2 \Phi}{2B\lambda(1-\sigma^2)} + \frac{1}{4\lambda}\left[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)}\right] + \frac{\Omega}{2\lambda B(1+\sigma)} \tag{2.4}$$

Подставляя в (1.8) выражения (1.10), будем иметь

$$N = -2D\frac{\partial}{\partial \zeta}\nabla^2 w + L = \frac{D}{\lambda B(1-\sigma^2)}\frac{\partial}{\partial \zeta}\nabla^2\nabla^2\Phi - \frac{D}{\lambda B(1+\sigma)}\frac{\partial}{\partial \zeta}\nabla^2\Omega + L \tag{2.5}$$

Если теперь в (1.10) подставим (2.4), то получим

$$M = \frac{D}{2\lambda B(1-\sigma)}\nabla^2\nabla^2\Phi - \frac{D}{2\lambda B}\nabla^2\Omega \tag{2.6}$$

$$Q = \frac{2D}{\lambda B(1+\sigma)}\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\nabla^2\Phi - \frac{1}{\lambda}D(1-\sigma)\overline{\varphi_1'''(z)} - \frac{2D(1-\sigma)}{\lambda B(1+\sigma)}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \zeta^2} \tag{2.7}$$

Подставляя в первое уравнение (1.8) формулы (2.2), (2.5), получим

$$\nabla^2\left(\nabla^2\nabla^2\Phi + \frac{4\lambda^2 Eh}{D}\Phi\right) = Z_1 \tag{2.8}$$

где

$$Z_1 = (1-\sigma)\nabla^2\nabla^2\Omega + \frac{8\lambda^2 Eh}{D}\Omega - \frac{2\lambda Eh}{D}\left(Z + \frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial \overline{L}}{\partial \zeta}\right) \tag{2.9}$$

Таким образом, Φ функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.8) шестого порядка.

3. Найдем другие выражения для усилий, моментов и компонент смещения. Решение уравнения (2.8) имеет вид: $\Phi = \Phi_0 + \Phi_*$, где Φ_0 — частное решение его, а Φ_* — общее решение уравнения

$$\nabla^2\left(\nabla^2\nabla^2 + \frac{4\lambda^2 Eh}{D}\right)\Phi_* = 0 \tag{3.1}$$

Решение последнего уравнения, следуя И. Н. Векуа ([2], § 56, стр. 260), представим в виде $\Phi = \chi + \psi_*$, где χ — произвольная гармоническая функция, а ψ_* — произвольное решение уравнения

$$\nabla^2\nabla^2\psi_* + \frac{4\lambda^2 Eh}{D}\psi_* = 0 \tag{3.2}$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$(\nabla^2 - i\nu)(\nabla^2 + i\nu)\psi_* = 0 \qquad \left(\nu = 4\frac{\lambda}{h}\sqrt{3(1-\sigma^2)}\right)$$

Поэтому общее решение уравнения (3.2) имеет вид: $\psi_* = \psi + \overline{\psi}$ (см. Векуа[2], § 56, стр. 260), где ψ — произвольное решение уравнения

$$\nabla^2\psi - i\nu\psi = 0 \tag{3.3}$$

Таким образом, окончательно решение уравнения (2.8) имеем в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \chi + \psi + \overline{\psi} \tag{3.4}$$

где Φ_0 — частное решение уравнения (2.8), χ — произвольная гармоническая функция, а ψ — произвольное решение уравнения (3.3).

Подставляя в (2.2) — (2.7) выражения (3.4) и учитывая, что χ — гармоническая функция, а ψ — решение уравнения (3.3), получаем

$$T = T_0 + i\nu(\psi - \overline{\psi}), \qquad P = P_0 - 4\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}(\chi + \psi + \overline{\psi}) \tag{3.5}$$

$$N = N_0 - 4\lambda\frac{\partial}{\partial\zeta}(\psi + \overline{\psi}), \qquad M = M_0 - 2\lambda(1+\sigma)(\psi + \overline{\psi})$$

$$Q = Q_0 + \frac{2\nu D}{\lambda B(1+\sigma)}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}[i(\psi - \overline{\psi})] - \frac{1}{\lambda}D(1-\sigma)\overline{\varphi_1'''(z)}$$

$$U = U_0 - \frac{2}{B(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\chi + \psi + \overline{\psi}) + \varphi_1(z)$$

$$w = w_0 - \frac{i\nu(\psi - \overline{\psi})}{2\lambda B(1-\sigma^2)} + \frac{1}{4\lambda}[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)}]$$

где T_0, P_0, N_0, M_0, Q_0, U_0, w_0 — значения T, P, N, M, Q, U, w, которые получаются из формул (2.2) — (2.7), если в них подставить $\varphi_1 = 0$, $\Phi = \Phi_0$.

Таким образом, T_0, P_0, N_0, M_0, Q_0, U_0, w_0 — известные функции, которые, очевидно, зависят от компонент внешней силы, причем, когда последние равны нулю, они также равны нулю.

Как известно, функции χ, ψ можно представить в виде (см. Векуа [2], § 12*, 19)

$$\chi = \varphi_2(z) + \overline{\varphi_2(z)}$$

$$\psi = a_0 J_0(ar) + \int_0^1 [z\varphi_3(zt) + \bar{z}\,\overline{\varphi_4(zt)}]J_0(ar\sqrt{1-t})\,dt \tag{3.6}$$

$$(r = |z|, \; z = x + iy, \; a = i\sqrt{i}\sqrt{\nu})$$

где a_0 — произвольная постоянная, φ_2, φ_3, φ_4 — произвольные голоморфные функции, причем без ущерба для общности мы можем подчинить φ_2 условию

$$\varphi_2(0) = \overline{\varphi_2(0)} \tag{3.7}$$

Подставляя (3.6) в формулы (3.5), получим выражения усилий, моментов и смещений через четыре произвольные голоморфные функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4.

Поступила 17 VII 1950

Горийский педагогический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А. А. К теории тонких пологих оболочек. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 5.
2. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. ОГИЗ. 1948.