

О ВТОРИЧНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В. В. Москвитин

(Москва)

Задача об определении остаточных напряжений и деформаций решается теоремой о разгрузке, доказанной А. А. Ильюшиным [1]. Эта теорема предполагает, что в процессе разгрузки материал вновь не выходит за предел упругости. Этим предположением суживается класс задач, для решения которых эта теорема может быть использована.

Ниже делается попытка доказательства теоремы о разгрузке с учетом перехода материала в процессе разгрузки за предел упругости в некоторой области тела (область вторичных пластических деформаций).

Пусть под действием заданной системы внешних сил (поверхностных X_v, Y_v, Z_v и объемных X, Y, Z) некоторое тело деформировалось так, что весь материал тела вышел за предел упругости. Обозначим через X_x, X_y, \dots, Z_z и $e_{xx}, e_{xy}, \dots, e_{zz}$ соответственно компоненты напряжений и деформаций, которые при этом в теле появились. Будем считать, что основная задача теории пластичности для данного тела при данной системе внешних сил решена, т. е. величины X_x, X_y, \dots и e_{xx}, e_{xy}, \dots известны. Эти величины должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0 \quad (xyz) \quad (1)$$

и уравнениям, связывающим компоненты напряжений и деформаций:

$$X_x - \sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_{xx} - e), \quad X_y = \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{xy} \quad (xyz) \quad (2)$$

$$\sigma = 3ke \quad (3)$$

Здесь и ниже обозначением (xyz) , а также (xyz, lmn) указывается, что остальные формулы получаются из написанных круговой перестановкой одновременно всех указанных в скобках букв.

Кроме того, должны удовлетворяться следующие граничные условия:

$$X_v = X_x l + X_y m + X_z n \quad (xyz, lmn) \quad (4)$$

Если, наконец, считать, что компоненты, напряжений, входящие в (1), не выражены через перемещения, то следует удовлетворить еще известным условиям совместности деформаций.

Будем предполагать, что между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций e_i существует линейная зависимость

$$\sigma_i = \lambda \sigma_s + 3G(1 - \lambda) e_i \quad (5)$$

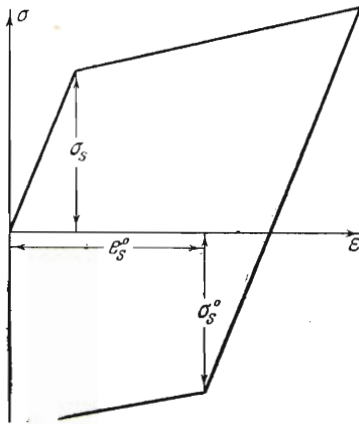
где σ_s — предел упругости, λ — коэффициент упрочнения, G — модуль сдвига.

Будем теперь уменьшать внешние силы, приложенные к телу, таким образом, чтобы $X_v = \mu X_v^*, \dots, X = \mu X^*, \dots$

При этом в теле будет происходить разгрузка. Пусть в процессе этой разгрузки материал вновь выходит за предел упругости. Мы ставим своей задачей определить напряжения и доформации, которые остаются в теле после полного удаления внешних сил, включая и ту область тела, где в процессе разгрузки материал вышел за предел упругости.

Обозначим через X'_x, X'_y, \dots, Z'_z и $e'_{xx}, e'_{yy}, \dots, e'_{zz}$ соответственно компоненты напряжений и деформаций в области вторичных пластических деформаций, а через $X''_x, X''_y, \dots, Z''_z$ и $e''_{xx}, e''_{yy}, \dots, e''_{zz}$ компоненты напряжений и деформаций в области упругой разгрузки.

Составим уравнения, связывающие деформации и напряжения в области вторичных пластических деформаций. Обозначим через $e_{xx}^{(p)}, e_{xy}^{(p)}, \dots, e_{zz}^{(p)}$ пластические слагаемые деформаций $e_{xx}, e_{xy}, \dots, e_{zz}$ в данном элементе тела, которые существовали в теле перед началом разгрузки. В процессе разгрузки наступит такой момент, когда в данном элементе будут существовать только деформации $e_{xx}^{(p)}, e_{xy}^{(p)}, \dots, e_{zz}^{(p)}$. Рассматривая состояние $e_{xx}^{(p)}, e_{xy}^{(p)}, \dots, e_{zz}^{(p)}$ как некоторое начальное, мы должны использовать условие совпадения направляющего тензора напряжений и направляющего тензора деформированного состояния, характеризуемого тензором



Фиг. 1

$$\begin{pmatrix} e_{xx}' - e_{xx}^{(p)} & e_{xy}' - e_{xy}^{(p)} & e_{xz}' - e_{xz}^{(p)} \\ e_{xy}' - e_{xy}^{(p)} & e_{yy}' - e_{yy}^{(p)} & e_{yz}' - e_{yz}^{(p)} \\ e_{2x}' - e_{2x}^{(p)} & e_{xy}' - e_{2y}^{(p)} & e_{2z}' - e_{2z}^{(p)} \end{pmatrix}$$

Это условие приводит к следующим уравнениям, связывающим компоненты напряжений и деформаций:

$$X'_x - \sigma' = \frac{2}{3} \frac{\sigma'_i}{e_i'''} (e_{xx}''' - e'''),$$

$$X'_y = \frac{1}{3} \frac{\sigma'_i}{e_i'''} e_{xy}''' \quad (xy_2) \quad (6)$$

где

$$e_{xy}''' = e_{xy}' - e_{xy}^{(p)},$$

$$e_{xx}''' = e_{xx}' - e_{xx}^{(p)} \quad (xy_2) \quad (7)$$

Предположим, что поведение материала при нагружении, разгрузке и последующем нагружении усилившем обратного знака характеризуется диаграммой, представленной на фиг. 1. Эта схема рассматривалась А. Ю. Ишлинским в его докторской диссертации. Из фиг. 1 следует, что

$$\sigma'_i = \lambda \sigma_s + 3G(1 - \lambda)(e_i^{(p)} - e'_i)$$

Но так как в случае линейного упрочнения $e_i^{(p)} = \lambda(e_i - e_s)$, то

$$\sigma'_i = \lambda \sigma_s - 3G(1 - \lambda)e'_i \quad (8)$$

Компоненты деформаций $e_{xx}^{(p)}, e_{xy}^{(p)}, \dots, e_{yz}^{(p)}$ связаны следующими зависимостями [2] с компонентами напряжений X_x, Y_y, \dots, Y_z :

$$e_{xx}^{(p)} = \frac{\varphi'}{3G} \left[X_x - \frac{1}{2}(Y_y + Z_z) \right], \quad e_{xy}^{(p)} = \frac{\varphi'}{G} X_y \quad (xy_2) \quad (9)$$

где

$$\varphi' = \frac{3G\lambda - \sigma_i}{\sigma_i}$$

Вычитая левые и правые части уравнений (7) из соответственно левых и правых частей соответствующих уравнений (2) и учитывая при этом (5) и (8), получим

$$\begin{aligned}
 X_x - X_x' - (\sigma - \sigma') &= \frac{2}{3} \left\{ [\lambda\sigma_s + 3G(1-\lambda)e_i] \frac{e_{xx} - e}{e_i} - \right. \\
 &\quad \left. - [\lambda\sigma_s - 3G(1-\lambda)e_i'] \frac{e_{xx}''' - e'''}{e_i'''} \right\} \quad (xy_2) \quad (10) \\
 Y_z - Y_z' &= \frac{1}{3} \left\{ [\lambda\sigma_s + 3G(1-\lambda)e_i] \frac{e_{yz}}{e_i} - [\lambda\sigma_s - 3G(1-\lambda)e_i'] \frac{e_{yz}'''}{e_i'''} \right\}
 \end{aligned}$$

В области упругой разгрузки, как известно, справедливы следующие уравнения, связывающие напряжения $X_x'', X_y'', \dots, Z_z''$ и деформации $e_{xx}'', e_{xy}'', \dots, e_{zz}''$:

$$X_x - X_x'' = \lambda^\circ (\theta - \theta'') + 2G(e_{xx} - e_{xx}''), \quad X_y - X_y'' = G(e_{xy} - e_{xy}'') \quad (xy_2)$$

где X_x, X_y, \dots, Z_z и $e_{xx}, e_{xy}, \dots, e_{zz}$ — соответственно напряжения и деформации, которые существовали в теле перед началом разгрузки.

Предположим теперь, что компоненты деформаций перед началом разгрузки представляются в следующем виде:

$$e_{xx} = e_{xx}^*(x, y, z) \varphi, \quad e_{yx} = e_{yx}^*(x, y, z) \varphi \quad (xy_2) \quad (11)$$

где множители, отмеченные звездочкой, зависят только от координат x, y, z , а множитель $\varphi = \varphi(\lambda, G, X, Y, Z, X_\nu, Y_\nu, Z_\nu)$ зависит от внешних сил и постоянных, характеризующих материал (предполагается, что внешние силы не зависят от координат). При этом в выражениях, определяющих компоненты деформаций в области вторичных пластических деформаций, должны сохраниться множители, зависящие только от координат, т. е. компоненты деформаций $e_{xx}', e_{xy}', \dots, e_{zz}'$ представляются в следующем виде:

$$e_{xx}' = e_{xx}^*(x, y, z) \psi, \quad e_{xy}' = e_{xy}^*(x, y, z) \psi \quad (xy_2) \quad (12)$$

а в области упругой разгрузки

$$e_{xx}'' = e_{xx}^*(x, y, z) \eta, \quad e_{xy}'' = e_{xy}^*(x, y, z) \eta \quad (xy_2) \quad (13)$$

На основании (9) и (2) величины (7) выразятся следующим образом:

$$e_{xx}''' = e_{xx}' - \frac{\varphi'}{3G} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_{xx} - e), \quad e_{xy}''' = e_{xy}' - \frac{\varphi'}{3G} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{xy} \quad (xy_2)$$

Поэтому

$$e_i''' = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left[e_{xx}' - e_{yy}' - (e_{xx} - e_{yy}) \frac{\varphi'}{3G} \frac{\sigma_i}{e_i} \right]^2 + \dots + \frac{3}{2} \left[e_{xy}' - \frac{\varphi'}{3G} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{xy} \right]^2 + \dots}$$

и, принимая во внимание (11) и (12), легко получим

$$e_i''' = \left| \frac{\psi}{\varphi} - \frac{\varphi'}{3G} \frac{\sigma_i}{e_i} \right| e_i \quad (14)$$

Так как $e''' = e$, то

$$\frac{e_{xx}''' - e'''}{e_i'''} = \frac{e_{xx} - e}{e_i} \operatorname{sign} \left(\frac{\psi}{\varphi} - \frac{\varphi'}{3G} \frac{\sigma_i}{e_i} \right) \quad (15)$$

Покажем теперь, что

$$\frac{\psi}{\varphi} - \frac{\varphi'}{3G} \frac{\sigma_i}{e_i} < 0 \quad (16)$$

В самом деле, если ψ и φ имеют разные знаки, то по определению величины φ'

$$\frac{\varphi' \sigma_i}{3G e_i} = 1 - \frac{\sigma_i}{3G e_i} = \lambda \left(1 - \frac{\sigma_s}{3G e_i} \right) > 0$$

и неравенство (16) действительно имеет место. Если же ψ и φ имеют одинаковые знаки, то, пользуясь отношением $\psi/\varphi = e_i'/e_i$, имеем

$$\frac{\psi}{\varphi} - \frac{\varphi' \sigma_i}{3G e_i} = e_i' - e + \frac{\sigma_i}{3G}$$

Но из фиг. 1 следует, что $e_i - e_i' > \sigma_i/3G$, поэтому на основании предыдущего соотношения неравенство (16) имеет место и в этом случае.

На основании неравенства (16) и (15) получим

$$\frac{e_{xx}''' - e'''}{e_i'''} = - \frac{e_{xx} - e}{e_i} \quad (17)$$

Аналогично можно показать справедливость подобных соотношений и для других компонент деформаций. Введем обозначения

$$\begin{aligned} X_x - X_x' &= X_x^\circ, & e_{xx} - e_{xx}' &= e_{xx}^\circ, & (xyz) \\ X_y - X_y'' &= X_y^{\circ\circ}, & e_{xy} - e_{xy}'' &= e_{xy}^{\circ\circ} \end{aligned} \quad (18)$$

Основываясь на (11) и (12), легко показать, что $e_i^\circ = e_i - e_i'$ и что

$$\frac{e_{xx} - e}{e_i} = \frac{e_{xx}^\circ - e_x^\circ}{e_i^\circ}, \quad \frac{e_{yz}}{e_i} = \frac{e_{yz}^\circ}{e_i^\circ} \quad (xyz)$$

При этом уравнения (10) принимают вид:

$$X_x^\circ - \sigma^\circ = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i^\circ}{e_i^\circ} (e_{xx}^\circ - e^\circ), \quad X_y^\circ = \frac{1}{3} \frac{\sigma_i^\circ}{e_i^\circ} e_{xy}^\circ \quad (xyz) \quad (19)$$

где

$$\sigma_i^\circ = 2\lambda\sigma_s + 3G(1 - \lambda)e_i^\circ \quad (20)$$

Величины $X_x^\circ, X_y^\circ, \dots, Z_z^\circ$ должны удовлетворять уравнениям равновесия (1); кроме того, должно удовлетворяться уравнение

$$\sigma^\circ = 3ke^\circ \quad (21)$$

Очевидно, что

$$X_x^{\circ\circ} = \lambda^\circ \theta^{\circ\circ} + 2G e_{xx}^{\circ\circ}, \quad X_y^{\circ\circ} = G e_{xy}^{\circ\circ} \quad (xyz) \quad (22)$$

Кроме того, должно выполняться

$$\sigma^{\circ\circ} = 3ke^{\circ\circ} \quad (23)$$

Величины $X_x^{\circ\circ}, X_y^{\circ\circ}, \dots, Z_z^{\circ\circ}$ в области упругой разгрузки должны удовлетворять уравнениям равновесия (1).

Нетрудно видеть, что если часть поверхности, ограничивающая рассматриваемое тело, принадлежит области упругой разгрузки, то на этой части поверхности должны выполняться следующие граничные условия:

$$X_x^{\circ\circ} l + X_y^{\circ\circ} m + X_z^{\circ\circ} n = X_v, \quad (xyz, lmn) \quad (24)$$

На остальной же части внешней поверхности тела должны выполняться аналогичные граничные условия для напряжений $X_x^\circ, X_y^\circ, \dots, Z_z^\circ$. Наконец, нетрудно видеть, что деформации $e_{xx}^\circ, e_{xy}^\circ, \dots, e_{zz}^\circ$ и $e_{xx}^{\circ\circ}, e_{xy}^{\circ\circ}, \dots, e_{zz}^{\circ\circ}$ удовлетворяют известным условиям совместности деформаций.

Таким образом, для определения остаточных напряжений и деформаций необходимо знать, кроме напряжений и деформаций, существующих в теле перед началом разгрузки, еще и величины $X_x^{\circ\circ}, \dots$ и $e_{xx}^{\circ\circ}, \dots$ в области упругой разгрузки и величины X_x°, \dots и e_{xx}°, \dots в области вторичных пластических деформаций. Так как эти величины удовлетворяют соответствующим уравнениям (19) — (23) и условиям (24), то для их определения имеем следующую упруго-пластическую задачу: определить напряжения $X_x^\circ, \dots, Z_z^\circ$ и деформации $e_{xx}^\circ, e_{xy}^\circ, \dots, e_{zz}^\circ$ в пластической области и напряжения $X_x^{\circ\circ}, X_y^{\circ\circ}, \dots, Z_z^{\circ\circ}$ и деформации $e_{xx}^{\circ\circ}, e_{xy}^{\circ\circ}, \dots, e_{zz}^{\circ\circ}$ в упругой области при упруго-пластическом деформировании некоторого (назовем фиктивного) тела, находящегося под действием сил, которыми было нагружено рассматриваемое тело перед началом разгрузки. При этом фиктивное тело обладает линейным упрочнением и отличается от рассматриваемого тела лишь тем, что имеет удвоенный предел упругости по сравнению с величиной предела упругости рассматриваемого тела, что следует из сравнения соотношений (5) и (20).

Остается только показать, что на поверхности, отделяющей область упругой разгрузки и область вторичных пластических деформаций (эта поверхность совпадает с поверхностью, отделяющей область упругих и пластических деформаций в указанном выше фиктивном теле), компоненты $X_x^\circ, \dots, e_{xx}^\circ, \dots$ и $X_x^{\circ\circ}, \dots, e_{xx}^{\circ\circ}, \dots$ соответственно совпадают. Установим это. Из фиг. 1 следует, что переход материала в процессе разгрузки за предел упругости происходит в том случае, если в данном элементе тела величина $e_i^{\prime\prime}$ (интенсивность деформаций в процессе разгрузки) достигает значения e_s° , где

$$e_s^\circ = |e_i - 2e_s|$$

Это условие на основании (13) приводит к соотношению

$$e_i^* \eta = |e_i^* \varphi - 2e_s| \tag{25}$$

которое должно выполняться на поверхности, отделяющей область упругой разгрузки и область вторичных пластических деформаций. Но на этой поверхности должно выполняться и условие $e_i' = e_s^\circ$, т. е.

$$e_i^* \psi = |e_i^* \varphi - 2e_s| \tag{26}$$

Из (25) и (26) заключаем, что $\eta \equiv \psi$, т. е. остаточные деформации во всем теле описываются одними и теми же формулами. Уравнения (25) и (26) можно рассматривать, как уравнения поверхности, отделяющей область упругой разгрузки от области вторичных пластических деформаций.

Покажем теперь, что на поверхности (25) напряжения $X_x^\circ, X_y^\circ, \dots$ и $X_x^{\circ\circ}, X_y^{\circ\circ}, \dots$ соответственно совпадают. Приравняем напряжения X_x° и $X_x^{\circ\circ}$, определяемые соответственно формулами (19) и (22).

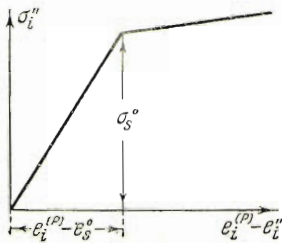
$$2 \left[\frac{2}{3} \frac{\lambda \sigma}{e_i (\varphi - \psi)} + (1 - \lambda) G \right] (e_{xx}^* - e^*) + 3ke^* = 3\lambda^\circ e^* + 2Ge_{xx}^*$$

или, так как $\lambda^\circ = k - \frac{2}{3} G$, то $e_i^* \psi = e_i^* \varphi - 2e_s$, что совпадает с (26).

Аналогично можно показать совпадение $X_y^\circ, \dots, Z_z^\circ$ и $X_y^{\circ\circ}, \dots, Z_z^{\circ\circ}$ на поверхности, отделяющей области упругой разгрузки и вторичных пластических деформаций.

Итак, доказана следующая теорема: остаточные напряжения и деформации, остающиеся в теле, обладающем линейным упрочнением, после удаления внешних сил, под действием которых тело деформировалось чисто пластически, предста-

вляются как разности соответствующих напряжений и деформаций, которые существовали в теле перед началом разгрузки, и некоторых фиктивных соответственно напряжений и деформаций, причем эти последние представляют собой напряжения и деформации в некотором фиктивном теле, нагруженном теми же внешними силами, что и рассматриваемое тело перед началом разгрузки; фиктивное тело отличается



Фиг. 2

от рассматриваемого только тем, что обладает удвоенным пределом упругости по сравнению с величиной предела упругости рассматриваемого тела. Поверхность, отделяющая области вторичных пластических деформаций и упругой разгрузки, совпадает с поверхностью, которая отделяет области упругих и пластических деформаций в фиктивном теле. Если указанное выше фиктивное тело деформируется только упруго, то в процессе разгрузки материал рассматриваемого тела не выйдет за предел упругости; при этом для определения остаточных напряжений и деформаций остается справедливой теорема о разгрузке.

Примечание. При доказательстве теоремы предполагалось, что поведение материала после перехода за вторичный предел упругости характеризуется зависимостью (8), которой соответствует диаграмма, представленная на фиг. 1. Но полученный результат можно распространить и на случай, когда в области вторичных пластических деформаций зависимость между напряжением и деформацией не характеризуется зависимостью (8), а определяется диаграммой, представленной на фиг. 2. Здесь k — произвольное число, которое определяется, так же как постоянные λ и G , из эксперимента.

Из фиг. 2 следует

$$\sigma_i' = k\lambda\sigma_s - 3G(1 - \lambda)e_i'$$

При $k = 1$ мы получаем зависимость (8). Все рассуждения, использованные при доказательстве теоремы, остаются в силе; зависимость (20) примет следующий вид:

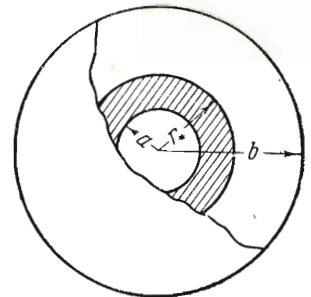
$$\tilde{\sigma}_i = (k + 1)\lambda\sigma_s + 3G(1 - \lambda)\tilde{e}_i$$

Отсюда следует, что указанное в теореме фиктивное тело будет иметь предел упругости, равный $(k + 1)\sigma_s$; в остальном теорема остается справедливой.

Рассмотрим пример применения полученной теоремы.

Пусть толстостенный полый шар (фиг. 3) нагружен внутренним давлением p . Материал будем считать несжимаемым.

Пусть материал шара полностью выпел за предел упругости; тогда по его толщине для напряжений и деформаций имеем следующие выражения (индексом 3 отмечены радиальные компоненты):



Фиг. 3

$$\sigma_3 = -p + 2\lambda\sigma_s \ln \frac{r}{a} + \left(p - 2\lambda\sigma_s \ln \frac{b}{a}\right) \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \frac{b^3}{r^3}$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 + \lambda\sigma_s + \frac{3}{2} \left(p - 2\lambda\sigma_s \ln \frac{b}{a}\right) \frac{b^3}{b^3 - a^3} \frac{a^3}{r^3} \quad (27)$$

$$e_2 = \frac{1}{4G(1 - \lambda)} \left(p - 2\lambda\sigma_s \ln \frac{b}{a}\right) \frac{b^3}{b^3 - a^3} \frac{a^3}{r^3}, \quad e_3 = -2e_2$$

При упруго-пластическом деформировании полого шара по его толщине возникают следующие напряжения и деформации (в пластической области):

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= -p + 2\lambda\sigma_s \ln \frac{r}{a} + \frac{2}{3}(1-\lambda)\sigma_s \frac{r^3 - a^3}{a^3} \frac{r_*^3}{r^3} \\ \sigma_2 &= \sigma_3 + \lambda\sigma_s + (1-\lambda)\sigma_s \frac{r_*^3}{r^3} \\ e_2 &= \frac{1}{2} \frac{r_*^3}{r^3} e_s, \quad e_3 = -\frac{r_*^3}{r^3} e_s \end{aligned} \quad (28)$$

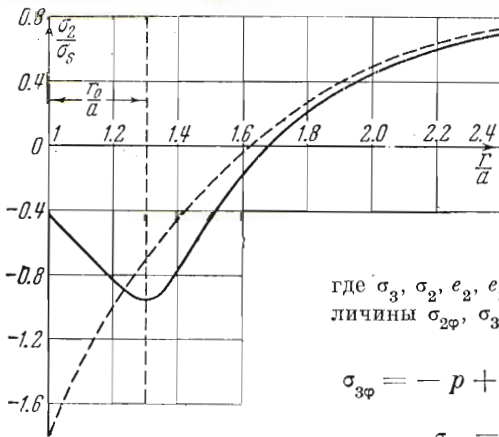
и (в упругой области)

$$\sigma_3' = -\frac{2}{3}\sigma_s \left(1 - \frac{r^3}{b^3}\right) \frac{r_*^3}{r^3}, \quad \sigma_2' = \frac{1}{3}\sigma_s \left(1 + \frac{2r^3}{b^3}\right) \frac{r_*^3}{r^3} \quad (29)$$

где r_* — радиус шаровой поверхности, отделяющей области упругих и пластических деформаций. Величина r_* удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{3p}{2\sigma_s} = \frac{b^3 - r_*^3}{b} + 3\lambda \ln \frac{r_*}{a} + (1-\lambda) \frac{r_*^3 - a^3}{a^3} \quad (30)$$

На основании формул (27) заключаем, что в нашем случае удовлетворяются условия теоремы (11). Поэтому остаточные напряжения в области вторичных пластических деформаций согласно этой теореме представляются в следующем виде:



Фиг. 4

условия теоремы (11). Поэтому остаточные напряжения в области вторичных пластических деформаций согласно этой теореме представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_3' &= \sigma_3 - \sigma_{3\varphi}, \quad e_3' = e_3 - e_{3\varphi} \\ \sigma_2' &= \sigma_2 - \sigma_{2\varphi}, \quad e_2' = e_2 - e_{2\varphi} \end{aligned} \quad (31)$$

где $\sigma_3, \sigma_2, e_2, e_3$ определяются формулами (27), а величины $\sigma_{2\varphi}, \sigma_{3\varphi}$ и $e_{3\varphi}, e_{2\varphi}$ на основании (28) равны:

$$\begin{aligned} \sigma_{3\varphi} &= -p + 4\lambda\sigma_s \ln \frac{r}{a} + \frac{4}{3}(1-\lambda)\sigma_s \frac{r^3 - a^3}{a^3} \frac{r_0^3}{r^3} \\ \sigma_{2\varphi} &= \sigma_{3\varphi} + 2\lambda\sigma_s + 2(1-\lambda)\sigma_s \frac{r_0^3}{r^3} \\ e_{3\varphi} &= -2e_s \frac{r_0^3}{r^3}, \quad e_{2\varphi} = e_s \frac{r_0^3}{r^3} \end{aligned}$$

где r_0 — радиус цилиндрической поверхности, отделяющей области упругой разгрузки и вторичных пластических деформаций.

Остаточные напряжения в области упругой разгрузки представляются в виде, аналогичном (31), где фиктивными напряжениями согласно (29) будут

$$\begin{aligned} \sigma_{3\varphi} &= -\frac{4}{3}\sigma_s \left(1 - \frac{r^3}{b^3}\right) \frac{r_0^3}{r^3} \\ \sigma_{2\varphi} &= \frac{2}{3}\sigma_s \left(1 + \frac{2r^3}{b^3}\right) \frac{r_0^3}{r^3} \end{aligned}$$

Величина r_0 согласно (30) удовлетворяет уравнению

$$\frac{3p}{4\sigma_s} = \frac{b^3 - r_0^3}{b} + 3\lambda \ln \frac{r_0}{a} + (1-\lambda) \frac{r_0^3 - a^3}{a^3}$$

Таким образом, получаем следующее распределение остаточных напряжений по толщине шара:

при $a \leq r \leq r_0$

$$\sigma_3' = -2\lambda\sigma_s \ln \frac{r}{a} + \left(p - 2\lambda\sigma_s \ln \frac{b}{a}\right) \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \frac{b^3}{r^3} - \frac{4}{3}(1 - \lambda)\sigma_s \frac{r^3 - a^3}{a^3} \frac{r_0^3}{r^3}$$

$$\sigma_2' = \sigma_3' - \lambda\sigma_s + \frac{3}{2}\left(p - 2\lambda\sigma_s \ln \frac{b}{a}\right) \frac{b^3 a^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{r^3} - 2(1 - \lambda)\sigma_s \frac{r_0^3}{r^3}$$

при $r_0 \leq r \leq b$

$$\sigma_3'' = -p + 2\lambda\sigma_s \ln \frac{r}{a} + \left(p - 2\lambda\sigma_s \ln \frac{b}{a}\right) \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \frac{b^3}{r^3} + \frac{4}{3}\sigma_s \left(1 - \frac{r^3}{b^3}\right) \frac{r_0^3}{r^3}$$

$$\sigma_2'' = \sigma_3'' + \frac{3}{2}\left(p - 2\lambda\sigma_s \ln \frac{b}{a}\right) \frac{b^3 a^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{r^3} + \lambda\sigma_s - 2\sigma_s \frac{r_0^3}{r^3}$$

На фиг. 4 представлен график распределения остаточных напряжений по толщине шарового слоя $b/a = 2.5$ при давлении $p = 2.227\sigma_s$ и $\lambda = 0.95$. Пунктиром обозначено распределение остаточных напряжений, вычисленных по теореме о разгрузке. Из этого графика следует, что распределение напряжений в области вторичных пластических деформаций существенно отличается от распределения напряжений, подсчитанных по теореме о разгрузке.

Поступила 26 VII 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильяшин А. А. Некоторые вопросы теории пластических деформаций. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 4.
2. Ильяшин А. А. Пластичность. Ч. I. Гостехиздат. 1948.