Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

О ПРИМЕНИМОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В. М. Панферов

(Москва)

В теории малых упруго-пластических деформаций при простом нагружении [1] доказаны теоремы о существовании и единственности решения краевых задач и что решение эффективно определяется методом упругих решений [2, 3].

Как следствие этих теорем покажем, что вариационные методы решения задач Галеркина и Ритца также применимы к задачам пластичности и соответствующие минимизирующие последовательности сходятся к решению.

Назовем виртуальным или возможным перемещением простую вариацию δu_i $(i = 1, 2, 3)$, совместимую со связями, наложенными на тело T и его части.

Тогда справедливо, например,

$$\delta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \delta u_1, \ldots \tag{1}$$

Вариационный принцип равновесия Лангранжа утверждает, что вариация внутренних сил при виртуальных перемещениях частиц тела равна работе внешних сил на вариациях перемещений

$$\delta V(e_{xx}, \ldots, e_{xy}, \ldots) = \iiint\limits_T \rho (X_1 \delta u_1 + X_2 \delta u_2 + X_3 \delta u_3)\, d\tau + \\ + \iint\limits_\delta (X_{1\nu} \delta u_1 + X_{2\nu} \delta u_2 + X_{3\nu} \delta u_3)\, d\zeta \tag{2}$$

Работа внутренних сил может быть записана [1]

$$V(e_{xx}, \ldots, e_{xy} \ldots) = \iiint\limits_T w\, d\tau \tag{3}$$

где

$$w = w(e_i, \theta) = w(e_{xx}, \ldots, e_{xy} \ldots) = \int\limits_\delta^{e_i} \sigma_i\, de_i + \tfrac{1}{2} k\theta \tag{4}$$

Вариация δw равна:

$$\delta w = \frac{dw}{de_{xx}} \delta e_{xx} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial e_{xy}} \delta e_{xy} + \cdots$$

Уравнениями Эйлера вариационной задачи (2) является краевая задача

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X_1 = 0, \qquad && X_x l + X_y m + X_z n = X_{1\nu} \\
&\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho X_2 = 0, && Y_x l + Y_y m + Y_z n = X_{2\nu} \\
&\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho X_3 = 0, && Z_x l + Z_y m + Z_z n = X_{3\nu}
\end{aligned} \tag{5}$$

Напряжения выражаются через деформации по известным формулам

$$X_x - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3e_i}(e_{xx} - e) \quad \text{и т. д.} \tag{6}$$

В теории упругости для ряда задач показано (Ритц, Галеркин и др.), что прямыми методами можно найти решение вариационной задачи (4), т. е. возможно построение минимизирующей последовательности, сходящейся равномерно к решению и необходимое число раз дифференцируемой. Построение минимизирующей последовательности производится различными методами. Большое распространение получили метод Ритца и метод Галеркина.

Метод Ритца заключается в следующем. Пусть, например, на границе заданы перемещения

$$u_1 = \bar{u}(x, y, z), \qquad u_2 = \bar{v}(x, y, z), \qquad u_3 = \bar{w}(x, y, z) \tag{7}$$

Тогда выбирается следующее поле перемещений, сравнимых с истинным:

$$\begin{aligned} u_1^{(k+1)} &= u_{10} + \sum a_m^{(k+1)} \chi_m(x, y, z) \\ u_2^{(k+1)} &= u_{20} + \sum b_m^{(k+1)} \varphi_m(x, y, z) \\ u_3^{(k+1)} &= u_{30} + \sum c_m^{(k+1)} \psi_m(x, y, z) \end{aligned} \tag{8}$$

где $a_\nu^{(k+1)}$, $b_\nu^{(k+1)}$, $c_\nu^{(k+1)}$ — произвольные постоянные.

Функции χ_m, φ_m, ψ_m, u_{10}, u_{20}, u_{30} выбираются так, чтобы удовлетворить граничным условиям (7) и всем геометрическим связям, наложенным на тело. Конечно, при этом существенна полнота системы функций χ_m, φ_m, ψ_m. Подставляя (8) в уравнение (2), получим систему линейных уравнений для определения постоянных:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial a_m} + \iiint \rho f_m X_1^{(k)}\, d\tau + \iint f_m X_{1\nu}^{(k)}\, ds &= 0 \\ -\frac{\partial V}{\partial b_m} + \iiint \rho \varphi_m X_2^{(k)}\, d\tau + \iint \varphi_m X_{2\nu}^{(k)}\, ds &= 0 \qquad (m = 1, 2, 3) \\ -\frac{\partial V}{\partial c_m} + \iiint \rho \psi_m X_3^{(k)}\, d\tau + \iint \psi_m X_{3\nu}^{(k)}\, ds &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Метод Галеркина заключается в следующем. Функции (8) выбираются так, чтобы были заранее удовлетворены как геометрические связи, так и статические граничные условия вида

$$\begin{aligned} \bar{X}_{1\nu} &= lX_x + mX_y + nX_z \\ \bar{X}_{2\nu} &= lY_x + mY_y + nY_z \\ \bar{X}_{3\nu} &= lZ_x + mZ_y + nZ_z \end{aligned}$$

Тогда уравнение Лагранжа (2) дает условие для определения произвольных постоянных a_{m_1}, b_{m_1}, c_m вида

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\delta u_1 + \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\delta u_2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\delta u_3\right] d\tau \equiv 0 \tag{10}$$

где $X_x, \ldots$ выражены в перемещениях, т. е. коэффициенты при вариациях представляются при помощи оператора Ламе.

Заметим, что более общий метод Галеркина при условии существования потенциала по существу совпадает с методом Ритца и весьма эффективен для решения целого класса задач.

Метод Галеркина и метод Ритца в настоящее время в теории упругости достаточно апробированы, и можно считать доказанным, что построение последовательности указанным способом приводит к решению краевой задачи теории упругости.

Покажем, что прямые методы, пригодные для решения вариационного уравнения Лагранжа для упругих перемещений, пригодны и для решения вариационного уравнения Лагранжа для упруго-пластических деформаций.

Рассмотрим вариационное уравнение Лагранжа для упругих деформаций при заданных массовых силах $\sigma X_1^{(k)}$, $\rho X_2^{(k)}$, $\rho X_3^{(k)}$ и поверхностных силах $X_{1\nu}^{(k)}$, $X_{2\nu}^{(k)}$, $X_{3\nu}^{(k)}$. Перемещения будем обозначать u_i^{k+1} $(i = 1, 2, 3)$.

В этих обозначениях имеем

$$\delta V(e_{xx}^{k+1}, \ldots, e_{xy}^{k+1}, \ldots) = \iiint_T \rho\,(X_1^{(k)}\,\delta u_1 + X_2^{(k)}\,\delta u_2 + X_3^{(k)}\delta u_3)\,d\tau + \\ + \iint_S [X_{1\nu}^{(k)}\,\delta u_1 + X_{2\nu}^{(k)}\,\delta u_2 + X_{3\nu}^{(k)}\,\delta u_2]\,ds \qquad (11)$$

Рассмотрим краевую задачу (5) для упруго-пластических деформаций в перемещениях. Решение этой задачи, как показано в работе [3], может быть найдено методом упругих решений. Согласно методу, каждый раз решается такая же краевая задача, как и (5), но для упругих деформаций с новыми массовыми силами $X_1^{(k)}$, $X_2^{(k)}$, $X_3^{(k)}$, которые суть результат подстановки k-го приближения в нелинейные дифференциальные члены уравнений, и поверхностными силами, которые суть результат подстановки приближения в граничные условия. Таким образом, мы имеем решение краевой задачи (5):

$$u_1 = \sum (u_1^{(k+1)} - u_1^{(k)}), \quad u_2 = \sum (u_2^{(k+1)} - u_2^{(k)}), \quad u_3 = \sum (u_3^{(k+1)} - u_3^{(k)}) \qquad (12)$$

Но $k+1$-е приближение есть в то же время решение вариационного уравнения для упругих деформаций с неизвестными $X_i^{(k)}$, $X_{i\nu}^{(k)}$, которые определяются по k-му приближению. Это $k+1$-е решение можно построить, согласно предыдущему, по методу Ритца, задав его по формулам (8) и определив коэффициенты $a_m^{(k+1)}$, $b_m^{(k+1)}$, $c_m^{(k+1)}$ из уравнений (9). Получим

$$u_1 = \sum_k \sum_m (a_m^{(k+1)} - a_m^{(k)})\,\chi_m \\ u_2 = \sum_k \sum_m (b_m^{(k+1)} - b_m^{(k)})\,\varphi_m \qquad (13) \\ u_3 = \sum_k \sum_m (c_m^{(k+1)} - c_m^{(k)})\,\psi_m$$

Ряд (12) есть равномерно сходящийся ряд и необходимое число раз дифференцируем, ибо это и есть решение по методу упругих решений.

С другой стороны, ряды (упругая задача)

$$\sum_m a_m^{(k+1)}\chi_m(x, y, z), \qquad \sum_m b_m^{(k+1)}\varphi_m(x, y, z), \qquad \sum_m c_m^{(k+1)}\psi_m(x, y, z) \qquad (14)$$

также равномерно сходящиеся и необходимое число раз дифференцируемые

Следовательно, в равенствах (13) можно группировать члены последовательности, например, так:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sum_m \Big[\sum_k a_m{}^{(k+1)} - \sum_k a_m{}^{(k)} \Big] \chi_m + u_{10} \\
u_2 &= \sum_m \Big[\sum_k b_m{}^{(k+1)} - \sum_k b_m{}^{(k)} \Big] \varphi_m + u_{20} \\
u_3 &= \sum_m \Big[\sum_k c_m{}^{(k+1)} - \sum_k c_m{}^{(k)} \Big] \psi_m + u_{30}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

При этом разности рядов, входящих в эти выражения, окажутся сходящимися:

$$
\begin{aligned}
&\sum_k a_m{}^{(k+1)} - \sum_k a_m{}^{(k)} \to \alpha_m \\
&\sum_k b_m{}^{(k+1)} - \sum_k b_m{}^{(k)} \to \beta_m \\
&\sum_k c_m{}^{(k+1)} - \sum_k c_m{}^{(k)} \to \gamma_m
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Следовательно, решение представляется в виде (8).

Таким образом, можно искать решение в виде (8), где произвольные коэффициенты α_m, β_m, γ_m определяются из вариационного уравнения Лагранжа (2) для упруго-пластических деформаций. При этом систему функций χ_m, φ_m, ψ_m должно выбирать ту же, что и для упругой задачи, с теми же граничными условиями. В результате указанный способ построения приведет к решению краевой задачи для упруго-пластических деформаций.

Проведенное доказательство повторимо и для метода Галеркина.

Таким образом, мы доказали, что прямые методы решения вариационного уравнения Лагранжа в такой же мере позволяют решать задачи упруго-пластических деформаций, как и в теории упругости.

Поступила 24 XI 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат. 1948.
2. Панферов В. М. Общий метод решения задач в теории малых упруго-пластических деформаций. Вестник Московского университета. 1952. № 2.
3. Панферов В. М. Метод упругих решений в задаче пластического изгиба. ПММ. 1952. Т. XVI. Вып. 2.