

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБЫКНОВЕННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В. В. Новожилов

(Ленинград)

Наиболее распространенным в настоящее время методом приближенного решения краевых задач является метод Бубнова-Галеркина, отличающийся достаточной простотой и точностью (особенно, если вычислению подлежат либо только функция, удовлетворяющая рассматриваемому дифференциальному уравнению, либо его первое характеристическое число). Однако если, кроме самой функции, нужно знать по условиям задачи также и ее производную (или производные), то выкладки, связанные с упомянутым методом (равно как и с другими прямыми методами), становятся гораздо более громоздкими ввиду необходимости сохранения в приближающем ряду значительного числа членов. В наиболее острой форме данные трудности проявляются, если рассматриваемое дифференциальное уравнение нелинейно.

Чтобы обойти указанные затруднения, П. Ф. Папкович^[1] (стр. 355—369), предложил комбинированный метод, который позволяет добиваться хорошей степени точности уже во втором приближении.

Предлагаемый ниже метод приближенного решения краевых задач для уравнений в обыкновенных производных обладает теми же преимуществами, что и рекомендация П. Ф. Папковича, но точность его, как правило, еще более высока. Метод рассчитан на применение к таким задачам, которые при решении их известными прямыми методами приводят к слишком громоздким системам уравнений.

1. **Постановка вопроса.** Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$L(y) + f(x, y) = F(x) \quad (1.1)$$

(где $L()$ линейный дифференциальный оператор в обыкновенных производных порядка $n \geq 2$) и пусть это уравнение надо проинтегрировать при заданных на границах интервала $a \leq x \leq b$ некоторых краевых условиях. При этом сделаем следующие предположения.

(а) Решение поставленной задачи существует и является конечным во всем указанном выше интервале (решение не обязательно должно быть единственным).

(б) Граничные условия линейны, т. е. сформулированы в виде

$$\alpha_{0j}y + \alpha_{1j}y' + \alpha_{2j}y'' + \dots = \gamma_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

причем часть из этих равенств имеет место при $x = a$, а другая часть при $x = b$; $\alpha_{i,j}$, γ_j — постоянные.

(в) Уравнение
$$L(y) = 0 \quad (1.3)$$

не имеет отличного от нуля решения при нулевых граничных условиях, получающихся из (1.2) при $\gamma_j = 0$.

(г) Уравнение
$$L(y) = F(x) \quad (1.4)$$

может быть решено точно. Предположение (г) позволяет использовать для решения рассматриваемой задачи известный метод последовательных приближений, согласно которому приближение y_k получается из приближения y_{k-1} путем интегрирования уравнения

$$L(y_k) = F(x) - f(x, y_{k-1}) \quad (1.5)$$

и подчинения затем его общего решения имеющимся краевым условиям.

При этом, однако, возникает вопрос: из каких соображений следует выбрать первое приближение? Обычно за первое приближение принимают удовлетворяющий имеющимся граничным условиям частный интеграл уравнения (1.4). Однако такое решение вопроса является случайным и недостаточно обоснованным, поскольку решения уравнений (1.1) и (1.4) могут значительно отличаться друг от друга. Между тем, как известно, скорость сходимости всякого процесса последовательных приближений обычно весьма зависит от того, насколько удачно (в смысле близости к окончательному результату) выбрано первое приближение.

Учитывая последнее обстоятельство, П. Ф. Папкович ^[1] предложил брать в качестве первого приближения выражение

$$y_1 = a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_m \varphi_m(x) \quad (1.6)$$

определяя входящие сюда коэффициенты a_j одним из прямых методов, например методом Бубнова-Галеркина. В соответствии с этим функции $\varphi_i(x)$ должны удовлетворять требованиям последнего метода.

Предложение П. Ф. Папковича значительно более обоснованно, чем предыдущая рекомендация, поскольку несомненно, что (даже если число членов в выражении (1.6) невелико) приближенное решение, даваемое любым из прямых методов, будет, вообще говоря, ближе к точному решению уравнения (1.1), чем решение уравнения (1.4). Слабым местом рекомендации П. Ф. Папковича является, однако, то, что она основана на механическом соединении двух разнородных методов (метода последовательных приближений с одним из прямых методов), погрешность каждого из которых подчиняется своим собственным закономерностям. Поэтому желательно, сохраняя для первого приближения форму (1.6), попытаться подойти к определению варьируемых постоянных таким образом, чтобы вывод уравнений для этих постоянных был подсказан самим методом последовательных приближений. Придерживаясь данной точки зрения, можно предложить излагаемые ниже несколько способов получения уравнений для определения a_j .

2. Сближение первого и второго приближений по способу наименьших квадратов. Примем первое приближение в форме (1.6), считая пока коэффициенты a_j неопределенными. Тогда для y_2 имеем уравнение

$$L(y_2) = F(x) - f(x, a_1\varphi_1 + \dots + a_m\varphi_m) \quad (2.1)$$

проинтегрировав которое и подчинив его общее решение имеющимся краевым условиям, получим

$$y_2 = y_2(a_1, \dots, a_m, x) \quad (2.2)$$

Чтобы найти теперь входящие в первое и второе приближения постоянные a_j , потребуем, чтобы квадратичное отклонение y_2 от y_1 в пределах $a \leq x \leq b$

$$\Phi_0 = \int_a^b (y_2 - y_1)^2 dx \quad (2.3)$$

было минимальным. Это условие дает систему уравнений для постоянных:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial a_j} = \int_a^b (y_2 - y_1) \left(\frac{\partial y_2}{\partial a_j} - \frac{\partial y_1}{\partial a_j} \right) dx = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (2.4)$$

Иными словами, постоянные a_j предлагается определять из условия, чтобы разность $y_2 - y_1$ была ортогональна ко всем m выражениям вида

$$\frac{\partial y_2}{\partial a_j} - \frac{\partial y_1}{\partial a_j} = \frac{\partial y_2}{\partial a_j} - \varphi_j \quad (2.5)$$

Из сказанного ясно, что в основе рассматриваемого способа определения постоянных a_j лежат требование максимальной близости первого и второго приближений, поскольку есть основание полагать, что эта близость является, вообще говоря, одним из существенных условий быстрой сходимости процесса последовательных приближений. Помимо этого, очевидно, что добиться равенства $y_1 = y_2$ это значит найти точное решение задачи, что является еще одним аргументом в пользу необходимости сближения y_1 с y_2 .

В том случае, когда в рассматриваемой задаче практический интерес представляет не столько сама искомая функция, сколько ее производная порядка k ($k < n$), целесообразно определять постоянные a_j из условия непосредственного сближения $d^k y_2 / dx^k$ с $d^k y_1 / dx^k$, поскольку это должно, по видимому, улучшить точность вычисления именно данной производной. В этом последнем случае уравнения для a_j получаются путем минимизации выражения

$$\Phi_k = \int_a^b [y_2^{(k)} - y_1^{(k)}]^2 dx \quad (2.6)$$

что приведет к системе уравнений

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_k}{\partial a_j} = \int_a^b [y_2^{(k)} - y_1^{(k)}] \left[\frac{\partial y_2^{(k)}}{\partial a_j} - \frac{\partial y_1^{(k)}}{\partial a_j} \right] dx = 0 \quad (2.7)$$

Аналогично следует поступать, если основной интерес представляет не $y^{(k)}$, а некоторая дифференциальная операция $M_k(y)$.

3. Сближение первых трех приближений. Для частного случая, когда рассматриваемое уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x, y) = F(x) \quad (3.1)$$

можно предложить следующий путь получения уравнений для постоянных a_j . Рассмотрим уравнения для второго и третьего приближений:

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = F(x) - f(x, y_1), \quad \frac{d^2 y_3}{dx^2} = F(x) - f(x, y_2) \quad (3.2)$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем:

$$\frac{d^2 \Delta_{32}}{dx^2} = \frac{d^2 y_3}{dx^2} - \frac{d^2 y_2}{dx^2} = f(x, y_1) - f(x, y_2) \quad (3.3)$$

Входящие в y_1 и y_2 постоянные a_j считаем пока неопределенными.

Граничные условия для $\Delta_{32} = y_3 - y_2$ будут нулевыми, поскольку и y_3 и y_2 по условиям построения последовательных приближений подчиняются одинаковым краевым условиям. Поэтому Δ_{32} будет тем меньше, чем меньше свободный член уравнения (3.3), т. е. чем меньше выражение $f(x, y_1) - f(x, y_2)$. Таким образом, сближая y_2 с y_1 по способу наименьших квадратов (т. е. в соответствии с п. 2), мы тем самым сближаем и y_3 с y_2 . Однако более прямым способом уменьшения Δ_{32} будет непосредственное сближение $f(x, y_1)$ с $f(x, y_2)$. Отсюда возникает мысль получить уравнение для определения a_j из условия, чтобы выражение

$$\Phi_{23} = \int_a^b [f(x, y_2) - f(x, y_1)]^2 dx \quad (3.4)$$

было минимальным, что, как видно из изложенного выше, равносильно сближению по способу наименьших квадратов вторых производных, взятых от третьего и второго приближений.

Указанное выше условие приводит к системе (3.5)

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial a_j} = \int_a^b [f(x, y_2) - f(x, y_1)] \left[\frac{\partial f(x, y_2)}{\partial a_j} - \frac{\partial f(x, y_1)}{\partial a_j} \right] dx = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

В частном случае, если уравнение (3.1) линейно, т. е. если

$$f(x, y) = f(x) y \quad (3.6)$$

формула (3.4) принимает вид:

$$\Phi_{23} = \int_a^b (y_2 - y_1)^2 f^2(x) dx \quad (3.7)$$

Таким образом, для линейных уравнений рассматриваемый способ определения a_j эквивалентен требованию, чтобы квадратичное отклонение y_2 от y_1 (в пределах $a \leq x \leq b$) с весовой функцией $f^2(x)$ было минимальным.

Из сказанного следует, что изложенный способ основан на достаточно эффективном сближении как y_2 с y_1 , так и $d^2 y_2 / dx^2$ с $d^2 y_3 / dx^2$, что позволяет ожидать от него хороших результатов.

4. О возможности получения уравнений для определения a_j путем приравнивания первого и второго приближений в отдельных точках. Все рассмотренные выше способы основывались на приравнивании результатов двух различных смежных приближений в среднем.

Вместо этого можно было бы получить уравнение для определения постоянных a_j путем приравнивания, например, y_1 и y_2 в m различных точках интервала $a < x < b$.

Данный путь приводит к системе

$$y_2(a_1, \dots, a_m, x_i) = a_1 \varphi_1(x_i) + \dots + a_m \varphi_m(x_i) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.1)$$

Преимуществом этого способа является его простота: уравнения для a_j получаются без необходимости выполнять интегрирование. Недостатком способа является неизбежная случайность выбора точек x_i и в связи с этим меньшая, вообще говоря, точность по сравнению с предыдущими способами (при равном числе варьируемых постоянных).

Точки x_i желательно выбирать в районах, где ожидаются экстремумы решения и, наоборот, их следует избегать брать вблизи нулей решения. При малом числе варьируемых постоянных рассматриваемый способ в сложных задачах может (см. ниже пример 2) приводить к ошибкам. Ввиду всего этого им следует пользоваться с должной осторожностью, применяя его либо в тех случаях, когда общий характер решения заранее известен, либо когда число варьируемых постоянных достаточно велико.

Необходимо в заключение отметить, что данный способ при $m = 1$ (одна варьируемая постоянная) совпадает с известным в строительной механике способом определения критических нагрузок по Вианелло. Применяя свой комбинированный метод к определению критических нагрузок, П. Ф. Папкович [1] также основывался на приравнивании результатов первого и второго приближений в одной точке. Таким образом, способ получения уравнений для постоянных a_j путем приравнивания второго и первого приближений в отдельных точках интервала $a < x < b$ не является новым.

5. Применение метода к интегральным уравнениям. Предположим, что функция $f(x, y)$ имеет вид $f(x)y$, т. е. что уравнение (1.1) линейно.

Тогда решение краевой задачи для данного уравнения может быть сведено к решению следующего интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$y(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) y(t) dt + \Psi_0(x) \quad (5.1)$$

Примем в качестве первого приближения для $y(t)$ выражение (1.6) (полагая в нем $x = t$) и подставим это выражение в правую часть (5.1).

Тогда для второго приближения получится формула

$$y_2(x) = \Psi_0(x) + a_1 \Psi_1(x) + \dots + a_m \Psi_m(x) \quad (5.2)$$

в которой

$$\Psi_j(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) \varphi_j(t) dt \quad (j \geq 1) \quad (5.3)$$

Потребуем теперь, чтобы среднее квадратичное отклонение y_2 от y_1 в пределах $a \leq x \leq b$ было минимальным. Это приводит к уравнениям вида

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_k} \left\{ \int_a^b \left[\sum_{j=1}^m a_j (\Psi_j - \varphi_j) + \Psi_0 \right]^2 dx \right\} = 0 \quad (k = 1, \dots, m) \quad (5.4)$$

или после выполнения дифференцирования

$$\int_a^b \left\{ \sum_{j=1}^m a_j (\Psi_j - \varphi_j) + \Psi_0 \right\} [\Psi_k - \varphi_k] dx = 0 \quad (k = 1, \dots, m) \quad (5.5)$$

Последняя система в точности совпадает с системой (2.4), если считать исходное дифференциальное уравнение (1.1) линейным. Таким образом, изложенное в данном разделе есть всего лишь несколько иная формулировка метода раздела 2 (применительно к линейным задачам).

Формула (5.5) выявляет разницу между предлагаемым методом и известным в теории интегральных уравнений так называемым «методом моментов». Именно, в методе моментов выражение

$$\sum_{j=1}^m a_j [\Psi_j(x) - \varphi_j(x)] + \Psi_0(x) \quad (5.6)$$

делают ортогональным по всем функциям $\varphi_k(x)$, тогда как выше рекомендуется делать его ортогональным к функциям $\Psi_k(x) - \varphi_k(x)$. Кроме того, выше предлагается считать окончательным результатом вычислений не выражение (1.6), а выражение (5.2), являющееся по отношению к (1.6) вторым приближением и, следовательно, более точно изображающее искомую функцию и ее производные.

Ввиду этого рассмотренный здесь метод должен давать, как правило, существенно лучшие результаты, чем метод моментов (при равном числе варьируемых постоянных).

Заканчивая на этом изложение существа различных вариантов предлагаемого метода, следует подчеркнуть, что все сказанное выше, разумеется, не приходится рассматривать как строгое их обоснование. Последнее будет представлять значительные трудности, особенно если иметь в виду нелинейные задачи. Отсутствие строгого обоснования не может, однако, являться препятствием для практического применения данного метода¹, так как ясно, что если говорить не об исключениях, а о правилах, то приведенные выше соображения являются достаточно убедительными.

¹ Подобно тому, как оно не являлось и не является препятствием для применения других приближенных методов, как, например, метода Рунге-Галлеркина.

6. Пример 1. Интегрирование уравнения балки на упругом основании. Рассмотрим дифференциальное уравнение равномерно нагруженной балки на упругом основании

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 64y = 64 \quad (6.1)$$

при граничных условиях

$$y = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x = \pm 1$$

соответствующих предположению, что балка свободно оперта на абсолютно жесткие опоры.

Точным решением данной задачи является выражение

$$y = 0.1175 \operatorname{ch} 2x \cos 2x - 0.2478 \operatorname{sh} 2x \sin 2x + 1 \quad (6.2)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} y' &= -0.731 \operatorname{ch} 2x \sin 2x - 0.2606 \operatorname{sh} 2x \cos 2x \\ y'' &= -0.940 \operatorname{sh} 2x \sin 2x - 1.981 \operatorname{ch} 2x \cos 2x \end{aligned} \quad (6.3)$$

Найдем приближенное решение задачи по Бубнову-Галеркину, ограничиваясь при этом одной варьируемой постоянной. Полагаем

$$y_1 = a \cos \frac{1}{2} \pi x \quad (6.4)$$

Постоянная a получается равной $a = 1.162$, откуда

$$y = 1.162 \cos \frac{1}{2} \pi x, \quad y' = -1.825 \sin \frac{1}{2} \pi x, \quad y'' = -2.867 \cos \frac{1}{2} \pi x \quad (6.5)$$

Получим далее приближенное решение задачи предлагаемым методом.

Первое приближение принимаем в виде (6.4), т. е. таким же, как в методе Бубнова-Галеркина. Следуя далее рекомендациям раздела 1, находим

$$\begin{aligned} \frac{d^4 y_2}{dx^4} &= 64 - 64a \cos \frac{1}{2} \pi x, & \frac{d^3 y_2}{dx^3} &= 64x - \frac{2}{\pi} 64a \sin \frac{1}{2} \pi x \\ \frac{d^2 y_2}{dx^2} &= 32(x^2 - 1) + \frac{4}{\pi^2} 64a \cos \frac{\pi}{2} x, & \frac{d y_2}{dx} &= 32 \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) + \frac{8}{\pi^3} 64a \sin \frac{\pi}{2} x \\ y_2 &= 16 \left(\frac{1}{6} x^4 - x^2 + \frac{5}{6} \right) - \frac{16}{\pi^4} 64a \cos \frac{\pi}{2} x \end{aligned} \quad (6.6)$$

Используем далее для определения постоянной a три различных способа.

I. *Постоянная a определяется из условия минимальности среднего квадратичного отклонения y_2 от y_1 .* При этом для a получается уравнение

$$16 \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{6} x^4 - x^2 + \frac{5}{6} \right) \cos \frac{1}{2} \pi x dx - 11.52a \int_{-1}^{+1} \cos^2 \frac{1}{2} \pi x dx = 0 \quad (6.7)$$

Отсюда $13.4 = 11.52a$ и $a = 1.162$.

Подставляя это значение a в формулы (6.6), находим

$$\begin{aligned} y_2 &= 16 \left(\frac{1}{6} x^4 - x^2 + \frac{5}{6} \right) - 12.22 \cos \frac{1}{2} \pi x \\ y_2' &= 32 \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) + 19.15 \sin \frac{1}{2} \pi x \\ y_2'' &= 32(x^2 - 1) + 30.16 \cos \frac{1}{2} \pi x \end{aligned} \quad (6.8)$$

II. *Постоянная a определяется из условия минимальности среднего квадратичного отклонения y_2'' от y_1'' .* При этом для a получается уравнение

$$\int_{-1}^{+1} \left[32(x^2 - 1) + 28.4a \cos \frac{1}{2} \pi x \right] \cos \frac{1}{2} \pi x dx = 0 \quad (6.9)$$

которое после выполнения интегрирования и деления на 32 принимает вид:

$$-\frac{16}{\pi^2} + 0.887 \frac{\pi}{2} a = 0 \quad (6.10)$$

Откуда $a = 1.161$. Таким образом, в данном частном случае определение постоянной из условия сближения y_2'' с y_1'' приводят к такому же ее значению, какое получилось выше при непосредственном сближении y_2 с y_1 .

III. Постоянная a определяется путем приравнивания y_1 и y_2 в середине пролета балки ($x = 0$). При этом для a получается уравнение

$$\frac{5}{6} 16 - 10.52a = a \quad (6.11)$$

из которого $a = 1.158$. Подставляя это значение a в (6.6), находим

$$\begin{aligned} y_2 &= 16 \left(\frac{1}{6} x^4 - x^2 + \frac{5}{6} \right) - 12.20 \cos \frac{1}{2} \pi x \\ y_2' &= 32 \left(\frac{1}{3} x^2 - x \right) + 19.13 \sin \frac{1}{2} \pi x \\ y_2'' &= 32 (x^2 - 1) + 30.05 \cos \frac{1}{2} \pi x \end{aligned} \quad (6.12)$$

В табл. 1 приведены значения y , y' и y'' согласно точному решению (Т), значения полученные методом Бубнова-Галеркина (Б-Г), и значения по предлагае-

Таблица 1

		1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0
y	(Т)	0.00	0.403	0.728	0.952	1.077	1.118
	(Б-Г)	0.00	0.359	0.683	0.940	1.105	1.16
	(I-II)	0.00	0.41	0.73	0.96	1.09	1.10
	(III)	0.00	0.42	0.74	0.98	1.11	1.12
y'	(Т)	-2.106	-1.870	-1.374	-0.906	-0.409	0.0
	(Б-Г)	-1.825	-1.732	-1.475	-1.072	-0.564	0.0
	(-II)	-2.13	-1.85	-1.37	-0.87	-0.415	0.0
	(III)	-2.19	-1.90	-1.41	-0.90	-0.417	0.0
y''	(Т)	0.00	-2.087	-2.620	-2.446	-2.122	-1.981
	(Б-Г)	0.00	-0.816	-1.66	-2.32	-2.73	-2.87
	(I-II)	0.00	-2.18	-2.73	-2.45	-2.03	-1.84
	(III)	0.00	-2.21	-2.78	-2.53	-2.11	-1.95

мому методу в трех его вариантах, при одной варьируемой постоянной во всех случаях (I—II) и (III). Из этой таблицы видно, что предлагаемый метод во всех рассмотренных его вариантах дал существенно лучшие результаты, чем метод Бубнова-Галеркина (при равном числе варьируемых постоянных). Особенно это относится к вычислению производных.

Сопоставляя значения, полученные при определении постоянной a путем приравнивания y_1 и y_2 при $x = 0$ и путем сближения их в среднем, видим, что оба эти способа дали примерно равноценные результаты. Таким образом, метод сравнения y_1 и y_2 в отдельных точках в данном частном случае себя вполне оправдал. Объясняется это относительной простотой характера решения и удачным выбором точки сравнения (в максимуме y).

Необходимо в заключение обратить внимание на то, что значение постоянной a при определении ее по методу сближения y_1 и y_2 в среднем получилось равным значению этой постоянной по методу Бубнова-Галеркина. Таким образом, в данном частном случае нет разницы между результатами предлагаемого метода и результатами, какие дал бы комбинированный метод П. Ф. Папковича. Такое совпадение является случайным, и в следующем, более сложном примере его уже не будет.

7. Пример 2. Интегрирование уравнения вынужденных нелинейных колебаний.
Пусть требуется найти периодическое решение (с периодом 2π) уравнения

$$y'' + y^3 = 6 \sin x - 9 \sin^3 x + \sin^9 x \quad (7.1)$$

Данная задача, как будет видно из дальнейшего, имеет несколько решений. Одним из них является

$$y = \sin^3 x \quad (7.2)$$

с которым и будут в дальнейшем сравниваться результаты приближенных методов. Первое приближение будем брать в виде

$$y_1 = a \sin x \quad (7.3)$$

т. е. в виде простейшей нечетной периодической функции.

Метод Бубнова-Галеркина приводит при этом к следующему кубическому уравнению для варьируемой постоянной:

$$a^3 - 1.333a + 0.344 = 0 \quad (7.4)$$

Данное уравнение имеет три вещественных корня:

$$a_1 = 0.995, \quad a_2 = 0.274, \quad a_3 = -1.27 \quad (7.5)$$

из которых первый соответствует точному решению (7.2).

Таким образом, метод Бубнова-Галеркина при одной варьируемой постоянной даёт для рассматриваемой задачи три различных решения.

Решим далее задачу предлагаемым методом. Полагая

$$y_1 = a \sin x$$

и следуя указаниям п. 2, находим

$$\begin{aligned} y_2'' &= 6 \sin x - (9 + a^3) \sin^3 x + \sin^9 x \\ y_2' &= -6 \cos x - (9 + a^3) \left(\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x \right) - \cos x + \frac{4}{3} \cos^3 x - \\ &\quad - \frac{6}{5} \cos^5 x + \frac{4}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x \\ y_2 &= \frac{1}{3} a^3 \left(2 \sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x \right) - 0.406 \sin x + 0.932 \sin^3 x - \\ &\quad - 0.030 \sin^5 x - 0.0181 \sin^7 x - 0.0123 \sin^9 x \end{aligned} \quad (7.6)$$

Ниже используются три различных способа определения постоянной a .

I. Сближение y_2 с y_1 по способу наименьших квадратов. Пользуясь формулой (2.4) и применяя ее к рассматриваемой задаче, получаем для a уравнение пятой степени

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{3} a^3 \left(2 \sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x \right) - a \sin x - 0.406 \sin x + 0.932 \sin^3 x - 0.030 \sin^5 x - \right. \\ \left. - 0.0181 \sin^7 x - 0.0123 \sin^9 x \right\} \left[a^2 \left(2 \sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x \right) - \sin x \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

которое после выполнения интегрирования принимает вид:

$$a^5 - 1.775a^3 + 0.354a^2 + 0.592a - 0.154 = 0 \quad (7.8)$$

Это уравнение имеет пять вещественных корней:

$$a_1 = 0.981, \quad a_2 = 0.678, \quad a_3 = 0.274, \quad a_4 = -0.665, \quad a_5 = -1.27 \quad (7.9)$$

из которых a_2 и a_4 , однако, должны быть отброшены, так как они отвечают не минимуму, а максимуму Φ_0 [см. формулу (2.3)] и не представляют интереса.

В дальнейшем, интересуясь главным образом выяснением степени точности предлагаемого метода, мы будем заниматься только одним из полученных трех решений: именно тем, которому соответствует корень $a_1 = 0.981$ уравнения (7.8). Подставляя это значение постоянной в последнюю из формул (7.6), получаем

$$y_2 = 1.037 \sin^3 x + 0.223 \sin x - 0.030 \sin^5 x - 0.0181 \sin^7 x - 0.0123 \sin^9 x \quad (7.10)$$

II. *Сближение трех первых приближений.* Для определения постоянной a в рассматриваемой задаче можно воспользоваться способом, предложенным в п. 3. При этом получится уравнение

$$\int_0^{1/2\pi} \{ [z F_1 + F_2]^3 - z \sin^3 x \} \{ 3 [z F_1 + F_2]^2 F_1 - \sin^3 x \} dx = 0 \quad (7.11)$$

где

$$z = a^3$$

$$F_1(x) = \frac{1}{3} (2 \sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x) \quad (7.12)$$

$$F_2(x) = -0.406 \sin x + 0.932 \sin^3 x - 0.030 \sin^5 x - 0.0181 \sin^7 x - 0.0123 \sin^9 x$$

При выводе этого уравнения Φ_{23} [формула (3.4)] дифференцировалась не по a , а по $z = a^3$.

При этом утрачивается корень $a = 0$, который, однако, не представляет интереса, поскольку он обращает в нуль не только $\partial \Phi_{23} / \partial a$, но и $\partial^2 \Phi_{23} / \partial a^2$.

Выполняя в (7.11) интегрирование, приходим к уравнению пятой степени

$$z^5 + 2.46z^4 - 0.360z^3 - 1.85z^2 + 0.628z - 0.0594 = 0 \quad (7.13)$$

исследование которого показывает, что оно имеет пять вещественных корней, которым соответствуют следующие значения постоянной a :

$$a_1 = 0.858, \quad a_2 = 0.632, \quad a_3 = 0.457, \quad a_4 = -1.09, \quad a_5 = -1.29 \quad (7.14)$$

Из них a_2 и a_4 отвечают не минимумам, а максимумам Φ_{23} , и потому они должны быть отброшены.

Первому корню, представляющему для нас наибольший интерес, соответствует следующее решение:

$$y_2 = 1.002 \sin^3 x + 0.0156 \sin x - 0.030 \sin^5 x - 0.0181 \sin^7 x - 0.0123 \sin^9 x \quad (7.15)$$

III. *Определение постоянной a путем приравнивания y_1 и y_2 в одной точке.* В качестве точки сравнения в данном случае естественно взять $x = 1/2\pi$, поскольку эта точка соответствует максимуму первого приближения и вероятному максимуму решения.

Приравнивая y_1 и y_2 в этой точке, приходим к кубическому уравнению

$$a^3 - 1.285a + 0.599 = 0 \quad (7.16)$$

имеющему только один вещественный корень $a = -1.32$.

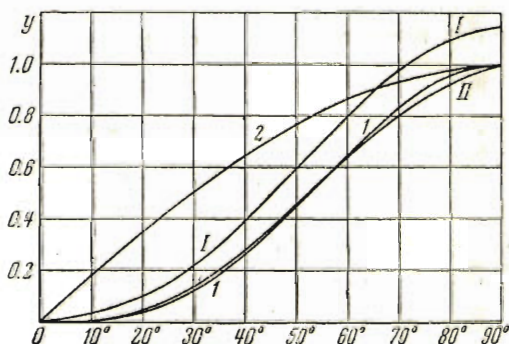
Отсюда видно, что способ определения a из условия равенства y_1 и y_2 в одной точке не приводит в рассматриваемой задаче к правильным результатам, поскольку он дает не три, а всего одно решение, причем то решение, которое нас наиболее интересует, оказывается пропущенным.

Таблица 2

	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
I	0.000	0.005	0.040	0.125	0.266	0.450	0.650	0.831	0.956	1.000
2	0.000	0.173	0.340	0.497	0.640	0.762	0.862	0.935	0.980	0.995
I	0.000	0.045	0.117	0.240	0.415	0.624	0.842	1.031	1.157	1.200
II	0.000	0.003	0.045	0.132	0.272	0.450	0.638	0.803	0.915	0.958
I	0.000	0.088	0.330	0.648	0.950	1.130	1.125	0.905	0.508	0.000
2	0.995	0.980	0.935	0.862	0.762	0.640	0.497	0.340	0.173	0.000
I	0.223	0.312	0.550	0.857	1.120	1.250	1.190	0.920	0.500	0.000
II	0.016	0.103	0.342	0.658	0.936	1.090	1.050	0.820	0.454	0.000

На фиг. 1 и 2 изображены графики функций y и y' , соответствующие определению постоянной a различными, изложенными выше способами. При этом кривые, отмеченные цифрой I, соответствуют точному решению (7.2), отмеченные цифрой 2 — решению по Бубнову-Галеркину, отмеченные цифрой I — решению, полученному при сближении y_1 с y_2 по способу наименьших квадратов, и отмеченные цифрой II — решению, полученному путем сближения первых трех приближений.

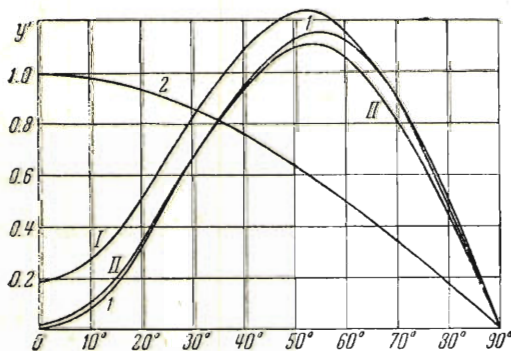
В верхней части табл. 2 приведены значения y , а в нижней y' , на основании которых указанные графики построены. Как видно, решение, полученное путем сближения первых трех приближений, дало наиболее хорошие результаты, делающие практически излишними какие-либо дополнительные уточнения. Погрешность решения, полученного путем сближения двух приближений, более велика (достигая в максимуме 20%), однако и в этом случае



Фиг. 1

соответствует точному решению. Следует отметить, что использование при решении рассматриваемой задачи вместо предлагаемого метода метода, рекомендованного П. Ф. Папковичем (см. выше), дало бы худшие результаты, в чем можно убедиться, подставив значение постоянной, найденной по методу Бубнова-Галеркина (т. е. $a = 0.995$), в y_2 [последняя из формул (7.6)]. Вычисление постоянной a по способу сближения трех первых приближений отняло довольно много времени (около трех дней вычислительной работы).

Однако это не характерно, поскольку вычислительные трудности предопределялись в данном случае наличием в правой части уравнения (7.1) члена $\sin^3 x$, который необычен для подобных задач и введен в уравнение лишь для того, чтобы выражение $y = \sin^3 x$ являлось точным решением (7.1).



Фиг. 2

Однако это не характерно, поскольку вычислительные трудности предопределялись в данном случае наличием в правой части уравнения (7.1) члена $\sin^3 x$, который необычен для подобных задач и введен в уравнение лишь для того, чтобы выражение $y = \sin^3 x$ являлось точным решением (7.1).

8. Пример 3. *Приближенное решение гипергеометрического уравнения.* В качестве последнего примера рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x(1+x^2)^2 \frac{dy}{dx} \right] + 3y = 0 \quad (8.1)$$

при граничных условиях $y=1$ при $x=\infty$ и y, y' конечны при $x=0$.

Данное уравнение подстановкой

$$z = \frac{x^2}{1+x^2} \quad (8.2)$$

приводится к виду

$$z(1-z) \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + \frac{3}{4}y = 0 \quad (8.3)$$

Отсюда ясно, что точным решением рассматриваемой задачи будет выражение

$$y = \frac{F(1/2, -3/2, 1, z)}{F(1/2, -3/2, 1, 1)} \quad (8.4)$$

где символ $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ означает гипергеометрическую функцию.

При решении задачи методом Бубнова-Галеркина будем исходить из выражения

$$y = 1 + a_1(1-z) + a_2(1-z)^2 = 1 + a_1u + a_2u^2 \quad (8.5)$$

Использование в данном случае одноконстантного выражения, т. е.

$$y = 1 + a_1(1-z) = 1 + a_1u \quad (8.6)$$

заведомо не может привести к удовлетворительным результатам, поскольку (8.6) обращает в нуль существенный первый член уравнения (8.3).

Подставляя (8.5) в (8.3) и выполняя необходимые выкладки, находим

$$y = 1 + 0.830(1-z) + 0.569(1-z)^2 = 1 + 0.830u + 0.569u^2 \quad (8.7)$$

При решении задачи предлагаемым методом будем исходить непосредственно из уравнения (8.1), принимая первое приближение в виде

$$y_1 = 1 + \frac{a_1}{1+x^2} + \frac{a_2}{(1+x^2)^2} \quad (8.8)$$

т. е. в виде, по существу идентичном (8.5).

Подставляя (8.8) в (8.1), получаем

$$\frac{d}{dx} \left[x(1+x^2)^2 \frac{dy_2}{dx} \right] = -3 \left[x + \frac{a_1x}{1+x^2} + \frac{a_2x}{(1+x^2)^2} \right] \quad (8.9)$$

Отсюда

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{3}{2} \left[\frac{x}{(1+x^2)^2} + a_1 \frac{\ln(1+x^2)}{x(1+x^2)^2} - \frac{a_2}{x(1+x^2)^2} \right] + \frac{C_1}{x(1+x^2)^2} \quad (8.10)$$

Постоянную интегрирования C_1 определяем из условия, чтобы производная dy_2/dx была конечной при $x=0$. После этого

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{3}{2} \left[\frac{x}{(1+x^2)^2} + a_1 \frac{\ln(1+x^2)}{x(1+x^2)^2} + \frac{a_2x}{(1+x^2)^3} \right] \quad (8.11)$$

Продолжая интегрирование, находим

$$y_2 = \frac{3}{4} \left[\frac{1}{1+x^2} + a_1 I + \frac{a_2}{2(1+x^2)^2} \right] + C_2 \quad (8.12)$$

Здесь

$$I = - \int_{\infty}^{x^2} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)^2} dx \quad (8.13)$$

Постоянная C_2 на основании имеющихся краевых условий должна быть принята равной единице. Переходя затем к новому аргументу

$$u = \frac{1}{1+x^2} = 1-z \quad (8.14)$$

будем иметь

$$y_1 = 1 + a_1 u + a_2 u^2, \quad y_2 = 1 + \frac{3}{4} (u + a_1 I + \frac{1}{2} a_2 u^2) \quad (8.15)$$

$$I = \int_0^u \frac{u \ln u}{u-1} du$$

I. *Определение a_1 и a_2 методом сближения y_1 с y_2 по способу наименьших квадратов.* В отличие от метода Бубнова-Галеркина предлагаемый метод дает в рассматриваемой задаче удовлетворительную точность не только при двухконстантном первом приближении, но и при одноконстантном. Ввиду этого ниже рассматриваются оба эти варианта.

$$(a) \quad y_1 = 1 + a_1 u, \quad y_2 = 1 + \frac{3}{4} (u + a_1 I) \quad (8.16)$$

Пользуясь формулой (2.4), имеем следующее уравнение для определения постоянной a_1 :

$$\int_0^1 [u + a_1 (I - 1.333u)] (I - 1.333u) du = 0 \quad (8.17)$$

Вычисляя входящие сюда интегралы по способу трапеций ($\Delta u = 0.1$), получаем

$$2.65 - 2.13 a_1 = 0, \quad a_1 = 1.244 \quad (8.18)$$

Отсюда

$$y_2 = 1 + 0.75 u + 0.932 I \quad (8.19)$$

$$(б) \quad y_1 = 1 + a_1 u + a_2 u^2, \quad y_2 = 1 + 0.75 (u + a_1 I + \frac{1}{2} a_2 u^2) \quad (8.20)$$

На основании (2.4) имеем систему

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{u + a_1 (I - 1.333u) + 0.833 a_2 u^2\} (I - 1.333u) du &= 0 \\ \int_0^1 \{u + a_1 (I - 1.333u) + 0.833 a_2 u^2\} u^2 du &= 0 \end{aligned} \quad (8.21)$$

которая после выполнения интегрирования принимает вид:

$$2.65 - 2.13 a_1 - 1.615 a_2 = 0, \quad 2.50 - 1.94 a_1 - 1.67 a_2 = 0 \quad (8.22)$$

Отсюда

$$a_1 = 0.90, \quad a_2 = 0.45 \quad (8.23)$$

и, следовательно,

$$y_1 = 1 + 0.90 u + 0.45 u^2, \quad y_2 = 1 + 0.75 u + 0.674 I + 0.169 u^2 \quad (8.24)$$

II. *Определение постоянных способом приравнивания y_1 и y_2 в отдельных точках.* В данном случае нерационально брать первое приближение в одноконстантном виде, так как вид решения заранее не известен и так как неизвестно значение y при $u = 1$. Поэтому затруднительно выбрать точку сравнения, если она одна.

На этом основании будем исходить из решения в двухконстантном виде (8.20) и получим уравнения для a_1 , a_2 , приравняв y_1 и y_2 в точках $u = 0.5$, $u = 1$ (поскольку такой выбор точек сравнения, при отсутствии заранее представления о характере решения, наиболее естествен). Имеем

$$1 + a_1 [I(1) - 1.333] - 0.833 a_2 = 0, \quad 0.5 + a_1 [I(0.5) - 0.667] - 0.208 a_2 = 0 \quad (8.25)$$

Подставляя сюда вычисленные по правилу трапеций ($\Delta u = 0.1$) значения $I(1) = 0.642$, $I(0.5) = 0.213$, получаем

$$\text{Отсюда} \quad 0.691a_1 + 0.833a_2 = 1, \quad 0.908a_1 + 0.416a_2 = 1 \quad (8.26)$$

$$a_1 = 0.905, \quad a_2 = 0.448 \quad (8.27)$$

Найденные значения постоянных, в пределах точности вычислений, совпадают с их значениями (8.23) и, следовательно, выражения для y_1 и y_2 при определении a_1, a_2 по способу приравнивания первых двух приближений в отдельных точках практически совпадают с (8.24).

Таблица 3

u	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
T	1.00	1.080	1.185	1.305	1.42	1.56	1.70	1.86	2.01	2.18	2.35
Б-Г	1.00	1.089	1.189	1.299	1.42	1.56	1.70	1.86	2.03	2.21	2.40
I(a)	1.00	1.087	1.192	1.310	1.44	1.57	1.72	1.87	2.02	2.18	2.35
I(б)-II	1.00	1.085	1.187	1.302	1.43	1.56	1.70	1.85	2.01	2.18	2.35
T	0.75	0.93	1.08	1.20	1.30	1.39	1.47	1.56	1.63	1.70	1.76
Б-Г	0.83	0.94	1.06	1.17	1.29	1.40	1.51	1.63	1.74	1.85	1.97
I(a)	0.75	0.99	1.12	1.23	1.32	1.40	1.46	1.53	1.58	1.63	1.68
I(б)-II	0.75	0.96	1.09	1.20	1.30	1.39	1.47	1.55	1.61	1.69	1.76

В верхней части табл. 3 приведены значения y , а в нижней y' , полученные при решении рассматриваемой задачи различными приближенными способами.

Из этой таблицы видно, что в рассматриваемой задаче все примененные выше приближенные способы дали вполне удовлетворительные результаты.

При внимательном сравнении значений можно, однако, заметить, что метод Бубнова-Галеркина (с двумя варьируемыми постоянными) несколько уступает в точности предлагаемому методу; максимальная погрешность в определении y' по методу Бубнова-Галеркина достигает 12%, тогда как погрешность предлагаемого способа при одной варьируемой постоянной не превосходит 6,5%, а при двух варьируемых постоянных — 3%.

Все выкладки, связанные с решением изложенных выше трех примеров, были выполнены на логарифмической линейке.

Замечание. Приведенные выше примеры показывают, что предлагаемый метод, если рассматривать второе приближение y_2 как окончательный результат вычислений, приводит к существенно более точному приближенному решению, чем метод Бубнова-Галеркина (при равном числе варьируемых постоянных). Однако достижение более высокой точности сопровождается и некоторым увеличением выкладок. В связи со сказанным правильнее всего сравнивать оба метода путем сопоставления количества выкладок, которые нужно затратить для того, чтобы эти методы дали равную степень точности. При этом, повидимому, окажется, что в некоторых задачах будет более выгодно пользоваться методом Бубнова-Галеркина, а в некоторых — предлагаемым методом. Дело в том, что переходя от первого метода ко второму, мы переносим центр тяжести вычислительной работы из области решения системы для a_j в область составления этой системы. Соотношение возникающих при этом трудностей в различных задачах будет разным, что и делает невозможным однозначное решение вопроса о преимуществах одного метода перед другим.

Говоря о преимуществах предлагаемого метода, нельзя не отметить его гибкость: он позволяет добиваться наилучшей точности определения именно той величины (комбинации искомой функции и ее производных), которая является основным объектом вычисления. Метод легко обобщается и на системы уравнений.

Поступила 15 I 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Панкович П. Ф. Строительная механика корабля. Ч. II. Судпромгиз. 1941.