Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

О СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Р. С. Минасян

(Ереван)

В теплопроводности, так же как и в теории упругости, гидродинамике и т. п., нередко встречаются задачи, в которых искомая функция U определяется заданием ее значений $U = L(s)$ на части C_1 контура C данной области (s принадлежит C_1) и комбинации значений функции с ее нормальной производной $\partial U / \partial n + hU = M(s)$ на другой части C_2 того же контура (s принадлежит C_2).

В работе решается смешанная граничная задача уравнения Лапласа для прямоугольника при условии осевой симметрии.

§ 1. Построение решения. Пусть функция $U(x, y)$ в прямоугольнике $ACC'A'$ (фиг. 1) удовлетворяет уравнению

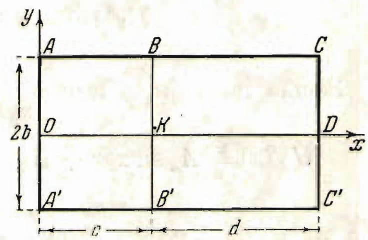
$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.1)$$

и граничным условиям

$$U(0, y) = L_1(y), \qquad [U(x, \pm b)]_{x \leqslant c} = L_2(x)$$

$$\left[\pm \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} + hU(x, y)\right]_{y=\pm b,\ x>c} = M_1(x)$$

$$\left[\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + hU(x, y)\right]_{x=c+d} = M_2(y) \qquad (1.2)$$



Фиг. 1

При этом функции $L_1(y)$ и $M_2(y)$ предполагаются симметричными относительно оси x. Вследствие симметрии достаточно ограничиться рассмотрением верхней половины прямоугольника, причем для продолжения решения на нижнюю половину необходимо равенство нулю нормальной производной вдоль линии OD

$$\left[\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}\right]_{y=0} = 0 \qquad (1.3)$$

Для нахождения решения разбиваем верхнюю половину прямоугольника линией BK на две части. Функцию $U(x, y)$ представляем в виде

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & (0 \leqslant x \leqslant c) \\ U_2(x, y) & (c \leqslant x \leqslant c + d) \end{cases} \qquad (1.4)$$

причем функции $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ — гармонические и должны удовлетворять соответствующим граничным условиям (1.2) и (1.3), а также условиям сращивания на линии раздела BK

$$U_1(c, y) = U_2(c, y), \qquad \frac{\partial U_1(c, y)}{\partial x} = \frac{\partial U_2(c, y)}{\partial x} \qquad (1.5)$$

Следуя идее Г. А. Гринберга [1], ищем функцию $U_1(x, y)$, так же как и при однородных граничных условиях, в виде ряда

$$U_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x) \cos \alpha_k y \qquad \left(\alpha_k = \left(k + \tfrac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b}\right) \tag{1.6}$$

$$U_k(x) = \frac{2}{b}\int_0^b U_1(x, y) \cos \alpha_k y \, dy \tag{1.7}$$

Для нахождения коэффициента $U_k(x)$ разложения (1.6) умножим уравнение (1.1) на $\cos \alpha_k y$ и проинтегрируем от нуля до b. Принимая во внимание (1.7), будем иметь

$$\frac{2}{b}\int_0^b \left(\frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial y^2}\right) \cos \alpha_k y \, dy = U_k''(x) + \frac{2}{b}\int_0^b \frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial y^2} \cos \alpha_k y \, dy = 0$$

Интегрируя последнее слагаемое по частям и используя второе из условий (1.2), после некоторых преобразований получим следующее уравнение для определения $U_k(x)$:

$$U_k''(x) - \alpha_k^2 U_k(x) = (-1)^{k+1} \frac{2\alpha_k}{b} L_2(x)$$

Решая последнее, имеем

$$U_k(x) = A_k \operatorname{sh} \alpha_k x + B_k \operatorname{ch} \alpha_k x + (-1)^{k+1} \frac{2}{b}\int_x^c L_2(t) \operatorname{sh} \alpha_k (t - x) \, dt \tag{1.8}$$

где A_k и B_k — постоянные интегрирования.

Заметим, что выражение (1.6) сходится всюду внутри области $OABK$ за исключением линии AB, где все члены ряда обращаются в нуль. Отсюда следует [1], что члены ряда (1.6) убывают не быстрее, чем k^{-1}.

Для усиления сходимости ряда можно, пользуясь известными методами [2], выделить и просуммировать часть, обусловливающую слабую сходимость.

Для определения $U_2(x, y)$ поступаем следующим образом: предварительно функцию $U_2(x, y)$ представим в виде

$$U_2(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x) \cos \alpha_k y \tag{1.9}$$

Поступая аналогично предыдущему, получим, что дифференциальное уравнение для определения коэффициентов $V_k(x)$ разложения (1.8) имеет вид:

$$V_k''(x) - \alpha_k^2 V_k(x) = (-1)^{k+1} \frac{2\alpha_k}{b} U_2(x, b) \tag{1.10}$$

Из уравнения (1.10) усматриваем, что в правую часть его входит неизвестное граничное значение функции $U_2(x, b)$. Для нахождения последнего разложим функцию $U_2(x, y)$ в ряд

$$U_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y)\, \varphi_k(x-c) \tag{1.11}$$

где функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi_k(0) = 0, \qquad \varphi_k'(d) + h\varphi_k(d) = 0$$

и имеют вид: $\varphi_k(x) = \sin \beta_k x$, причем характеристические числа β_k являются корнями уравнения

$$\beta_k \cos \beta_k d + h \sin \beta_k d = 0 \tag{1.12}$$

Функции $\varphi_k(x) = \sin \beta_k(x)$, ортогональные в $(0, d)$ составляют полную систему.

По той же причине, что и ряд (1.6), ряды (1.9) и (1.11) обладают слабой сходимостью — члены их убывают не быстрее, чем k^{-1}. При этом ряд (1.9) сходится всюду в области $KBCD$ за исключением линии $y=b$, ряд же (1.11) — в той же области, кроме линий $x=c$ и $x=c+d$.

Подставляя выражение для $U_2(x, b)$ из (1.11) в уравнение (1.10) и решая последнее, получим

$$V_k(x) = C_k \operatorname{sh} \alpha_k x + D_k \operatorname{ch} \alpha_k x + (-1)^k \frac{2\alpha_k}{b} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f_p(b)}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} \sin \beta_p (x-c) \tag{1.13}$$

В свою очередь $f_k(y)$ определяются из уравнения

$$f_k''(y) - \alpha_k^2 f_k(y) = -\frac{1}{\rho_k^2}\{M_2(y) \sin \beta_k d + \beta_k U_2(c, y)\} \tag{1.14}$$

причем через ρ_k^2 обозначена норма системы функций $\{\sin \beta_k x\}$, т. е.

$$\rho_k^2 = \int_0^d \sin^2 \beta_k x\, dx = \frac{d}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\beta_k d}{2\beta_k d}\right)$$

Подставляя в правую часть уравнения (1.14) выражение для $U_2(c, y)$ из (1.9) и решая его, будем иметь

$$f_k(y) = F_k \operatorname{sh} \beta_k y + H_k \operatorname{ch} \beta_k y +$$
$$+ \frac{1}{\rho_k^2}\left\{\beta_k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{V_p(c)}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} \cos \alpha_p y - \frac{\sin \beta_k d}{\beta_k} \int_y^b M_2(t) \operatorname{sh} \beta_k (b-t)\, dt \right\} \tag{1.15}$$

Таким образом, из выражений (1.13) и (1.15) замечаем, что функции $V_k(x)$ и $f_k(y)$ как бы взаимно определяются одна посредством другой.

Введем обозначения

$$\frac{2}{b}\int_0^b L_1(y) \cos \alpha_k y\, dy = \lambda_k, \qquad \frac{2}{b}\int_0^b M_2(y) \cos \alpha_k y\, dy = \mu_k$$

$$\frac{1}{\rho_k^2}\int_c^{c+d} M_1(x) \sin \beta_k (x-c)\, dx = \nu_k$$

а также

$$D_k = \frac{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k (c+d) + h \operatorname{sh} \alpha_k (c+d)}{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k d + h \operatorname{sh} \alpha_k d} \left\{ (-1)^k \frac{n_k}{\alpha_k b} - \frac{\mu_k \operatorname{sh} \alpha_k c}{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k (c+d) + h \operatorname{sh} \alpha_k (c+d)} \right\}$$

$$H_k = \frac{\sqrt{2}}{\beta_k d \operatorname{ch} \beta_k b} m_k + \frac{\sin \beta_k d \operatorname{th} \beta_k b}{\beta_k \rho_k^2} \int_0^b M_2(t) \operatorname{ch} \beta_k t \, dt \tag{1.16}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.2) и (1.3), для функций $U_k(x)$, $V_k(x)$ и $f_k(y)$ получим следующие выражения:

$$U_k(x) = \frac{(-1)^k}{\alpha_k b \operatorname{sh} \alpha_k c} \left\{ n_k \operatorname{sh} \alpha_k x + (-1)^k \alpha_k b \lambda_k \operatorname{sh} \alpha_k (c-x) + \right. \tag{1.17}$$

$$\left. + 2\alpha_k \left[\operatorname{sh} \alpha_k (c-x) \int_0^x L_2(t) \operatorname{sh} \alpha_k t \, dt + \operatorname{sh} \alpha_k x \int_x^c L_2(t) \operatorname{sh} \alpha_k (c-t) \, dt \right] \right\}$$

$$V_k(x) = \frac{1}{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k d + h \operatorname{sh} \alpha_k d} \left\{ (-1)^k \frac{n_k}{\alpha_k b} [\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k (c+d-x) + h \operatorname{sh} \alpha_k (c+d-x)] + \right.$$

$$\left. + \mu_k \operatorname{sh} \alpha_k (x-c) \right\} + (-1)^k \frac{2\sqrt{2}\alpha_k}{bd} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{m_p}{\beta_p (\beta_p^2 + \alpha_k^2)} \sin \beta_p (x-c)$$

$$f_k(y) = \frac{1}{\rho_k^2 \beta_k \operatorname{ch} \beta_k b} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \rho_k^2 m_k \operatorname{ch} \beta_k y + \frac{\beta_k^2}{b} \operatorname{ch} \beta_k b \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p n_p}{\alpha_p (\alpha_p^2 + \beta_k^2)} \cos \alpha_p y + \right.$$

$$\left. + \sin \beta_k d \left[\operatorname{sh} \beta_k (b-y) \int_0^y M_2(t) \operatorname{ch} \beta_k t \, dt + \operatorname{ch} \beta_k y \int_y^b M_2(t) \operatorname{sh} \beta_k (b-t) \, dt \right] \right\}$$

Коэффициенты n_k и m_k, входящие в эти выражения, определяются из совокупности двух бесконечных систем линейных уравнений:

$$n_k = \frac{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k c (\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k d + h \operatorname{sh} \alpha_k d)}{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k (c+d) + h \operatorname{sh} \alpha_k (c+d)} \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{m_p}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{\operatorname{sh} \alpha_k c} \left[(-1)^k \lambda_k + \frac{2}{b} \int_0^c L_2(t) \operatorname{sh} \alpha_k t \, dt \right] + \frac{(-1)^k \mu_k b}{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k d + h \operatorname{sh} \alpha_k d} \right\}$$

$$m_k = \frac{\beta_k d \operatorname{ch} \beta_k b}{\sqrt{2} \rho_k^2 (\beta_k \operatorname{sh} \beta_k b + h \operatorname{ch} \beta_k b)} \left\{ \frac{\beta_k}{b} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n_p}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} + \gamma_k \rho_k^2 + \right. \tag{1.18}$$

$$\left. + \frac{\sin \beta_k d}{\operatorname{ch} \beta_k b} \int_0^b M_2(t) \operatorname{ch} \beta_k t \, dt \right\}$$

Заметим, что ряды, входящие в выражения (1.17), обладают усиленной сходимостью (члены их убывают со скоростью p^{-3}) и, очевидно, сходятся равномерно соответственно в промежутках $(0, b)$ или $(0, d)$, включая их концы.

Кроме того, заметим, что совокупность систем (1.18) можно свести к одной системе, если положить $n_k = q_{2k}$, $m_k = q_{2k+1}$.

§ 2. Исследование совокупности бесконечных систем (1.18). Займемся вычислением суммы модулей коэффициентов совокупности системы уравнений (1.18).

Сумма модулей коэффициентов второй системы, как легко видеть, равна

$$\frac{\beta_k^2 d \operatorname{ch} \beta_k b}{\sqrt{2}\, b \rho_k^2 (\beta_k \operatorname{sh} \beta_k b + h \operatorname{ch} \beta_k b} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} =$$

$$= \frac{\beta_k^3 d}{\sqrt{2}\,(\beta_k^2 d + h \sin^2 \beta_k d)(\beta_k + h \operatorname{cth} \beta_k b)} < \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{2.1}$$

Для вычисления суммы модулей коэффициентов первой системы, пользуясь ортогональностью и полнотой системы функций $\{\sin \beta_k x\}$, предварительно разложим в промежутке $(0, d)$ функции x и $\operatorname{sh} \alpha_k x$ в ряды по $\sin \beta_k x$. Будем иметь

$$x = \sum_{p=1}^{\infty} b_p \sin \beta_p x$$

где

$$b_p = \frac{1}{\rho_p^2} \int_0^d x \sin \beta_p x\, dx = -\frac{d}{\beta_p \rho_p^2} \left(\cos \beta_p d - \frac{\sin \beta_p d}{\beta_p d} \right) = \frac{hd+1}{\rho_p^2 \beta_p^2} \sin \beta_p d$$

$$\rho_p^2 = \frac{d}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\beta_p d}{2\beta_p d} \right) = \frac{\beta_p^2 d + h \sin^2 \beta_p d}{2\beta_p^2}$$

Отсюда

$$\frac{x}{hd+1} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_p d \sin \beta_p x}{\rho_p^2 \beta_p^2} \tag{2.2}$$

Аналогично находим

$$\frac{\operatorname{sh} \alpha_k x}{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k d + h \operatorname{sh} \alpha_k d} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_p d}{\rho_p^2 (\beta_p^2 + \alpha_k^2)} \sin \beta_p x \tag{2.3}$$

Замечая, что ряды в правых частях соотношений (2.2) и (2.3) сходятся равномерно во всем промежутке $(0, d)$, включая его концы, при $x = d$ будем иметь

$$\frac{d}{hd+1} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_p d}{\rho_p^2 \beta_p^2}, \quad \frac{\operatorname{sh} \alpha_k d}{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k d + h \operatorname{sh} \alpha_k d} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_p d}{\rho_p^2 (\beta_p^2 + \alpha_k^2)} \tag{2.4}$$

Преобразуем ряд

$$\frac{2}{d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \alpha_k^2}$$

входящий в сумму модулей коэффициентов первой системы, следующим образом: умножим числитель и знаменатель каждого члена на

$$1 + \frac{h}{d} \frac{\sin^2 \beta_p d}{\beta_p^2}$$

Заменив единицу суммой квадратов синуса и косинуса, после некоторых преобразований, учитывая соотношение (1.12), получим

$$\frac{2}{d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_p^2+\alpha_k^2}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin^2\beta_p d}{\rho_p^2(\beta_p^2+\alpha_k^2)}+h\,\frac{hd+1}{d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin^2\beta_p d}{\rho_p^2\beta_p^2(\beta_p^2+\alpha_k^2)}$$

Но

$$\frac{1}{\beta_p^2(\beta_p^2+\alpha_k^2)}=\frac{1}{\alpha_k^2}\left(\frac{1}{\beta_p^2}-\frac{1}{\beta_p^2+\alpha_k^2}\right)$$

Отсюда

$$\frac{2}{d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_p^2+\alpha_k^2}=\left(1-h\,\frac{hd+1}{\alpha_k^2 d}\right)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin^2\beta_p d}{\rho_p^2(\beta_p^2+\alpha_k^2)}+h\,\frac{hd+1}{\alpha_k^2 d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin^2\beta_p d}{\rho_p^2\beta_p^2}$$

Принимая же во внимание (2.4), окончательно находим

$$\frac{2}{d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_p^2+\alpha_k^2}=\frac{\operatorname{sh}\alpha_k d}{\alpha_k\operatorname{ch}\alpha_k d+h\operatorname{sh}\alpha_k d}\left[1+\frac{h}{\alpha_k}\left(\operatorname{cth}\alpha_k d-\frac{1}{\alpha_k d}\right)\right]$$

Таким образом, сумма модулей коэффициентов первой системы равна

$$\frac{\sqrt{2}\,\alpha_k\operatorname{sh}\alpha_k c\operatorname{sh}\alpha_k d}{\alpha_k\operatorname{ch}\alpha_k(c+d)+h\operatorname{sh}\alpha_k(c+d)}\left[1+\frac{h}{\alpha_k}\left(\operatorname{cth}\alpha_k d-\frac{1}{\alpha_k d}\right)\right]\tag{2.5}$$

Как легко видеть, выражение (2.5) всегда меньше $1/\sqrt{2}$.

Таким образом, система (1.18) вполне регулярна. Из теории регулярных систем[3] следует, что она, наверное, имеет ограниченное решение, если свободные члены ее ограничены в своей совокупности.

Для этого, как явно видно из (1.18), достаточно потребовать, чтобы функции $L_1(y)$, $L_2(x)$, $M_1(x)$ и $M_2(y)$, заданные на контуре, были ограниченной вариации. Задаваясь отношениями длин сторон b, c и d, а также задаваясь контурными условиями и определив соответствующие корни β_k уравнения (1.12), на основании теорем о вполне регулярных системах легко оценим сверху и снизу значения неизвестных m_k и n_k, посредством которых определятся из формул (1.17) коэффициенты $U_k(x)$, $V_k(x)$ и $f_k(y)$ разложений искомой функции.

§ 3. Предельные случаи. Рассмотрим вначале случай, когда стремится к нулю длина c стороны AB, на которой заданы значения самой функции (фиг. 1). Подставляя в (1.18) значение $c=0$, видим, что совокупность бесконечных систем линейных уравнений вырождается в равенства

$$n_k=(-1)^k\alpha_k b\lambda_k$$

$$m_k=\frac{\beta_k d\operatorname{ch}\beta_k b}{\sqrt{2}\,\rho_k^2(\beta_k\operatorname{sh}\beta_k b+h\operatorname{ch}\beta_k b)}\times$$

$$\times\left\{\beta_k\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\alpha_p\lambda_p}{\alpha_p^2+\beta_k^2}+\nu_k\rho_k^2+\frac{\sin\beta_k d}{\operatorname{ch}\beta_k b}\int_0^d M_2(t)\operatorname{ch}\beta_k t\,dt\right\}\tag{3.1}$$

Следовательно, выражение (1.17) для коэффициента $f(y)$ имеет вид:

$$f_k(y) = \frac{1}{\rho_k^2}\left\{\frac{\operatorname{ch}\beta_k y}{\beta_k \operatorname{sh}\beta_k b + h\operatorname{ch}\beta_k b}\left[\beta_k \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\alpha_p\lambda_p}{\alpha_p^2+\beta_k^2} + \nu_k\rho_k^2 + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\sin\beta_k d}{\operatorname{ch}\beta_k b}\int_0^b M_2(t)\operatorname{ch}\beta_k t\, dt\right] + \beta_k\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\lambda_p\cos\alpha_p y}{\alpha_p^2+\beta_k^2} +$$

$$\left. + \frac{\sin\beta_k d}{\beta_k \operatorname{ch}\beta_k b}\left[\operatorname{sh}\beta_k(b-y)\int_0^y M_2(t)\operatorname{ch}\beta_k t\, dt + \operatorname{ch}\beta_k y\int_y^b M_2(t)\operatorname{sh}\beta_k(b-t)\, dt\right]\right\} \quad (3.2)$$

Для приведения выражения (3.2) к окончательному виду воспользуемся следующими соотношениями:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\lambda_p\frac{\cos\alpha_p y}{\alpha_p^2+\beta_k^2} = \frac{2}{b}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos\alpha_p y}{\alpha_p^2+\beta_k^2}\int_0^b L_1(t)\cos\alpha_p t\, dt =$$

$$= \frac{1}{b}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_p^2+\beta_k^2}\int_0^y L_1(t)\Big[\cos\alpha_p(y+t) + \cos\alpha_p(y-t)\Big]dt +$$

$$+ \frac{1}{b}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_p^2+\beta_k^2}\int_y^b L_1(t)\left[\cos\alpha_p(y+t) + \cos\alpha_p(t-y)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\beta_k\operatorname{ch}\beta_k b}\left\{\operatorname{sh}\beta_k(b-y)\int_0^y L_1(t)\operatorname{ch}\beta_k t\, dt + \operatorname{ch}\beta_k y\int_y^b L_1(t)\operatorname{sh}\beta_k(b-t)\, dt\right\} \quad (3.3)$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\alpha_p\lambda_p}{\alpha_p^2+\beta_k^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}\beta_k b}\int_0^b L_1(t)\operatorname{ch}\beta_k t\, dt$$

Подставляя эти выражения в (3.2), после некоторых преобразований окончательно получим

$$f_k(y) = \frac{1}{\rho_k^2(\beta_k\operatorname{sh}\beta_k b + h\operatorname{ch}\beta_k b)}\left\{[\beta_k\operatorname{ch}\beta_k(b-y) + h\operatorname{sh}\beta_k(b-y)]\int_0^y\Big[L_1(t) + \right.$$

$$+ \frac{\sin\beta_k d}{\beta_k}M_2(t)\Big]\operatorname{ch}\beta_k t\, dt + \operatorname{ch}\beta_k y\int_y^b\Big[L_1(t) + \frac{\sin\beta_k d}{\beta_k}M_2(t)\Big][\beta_k\operatorname{ch}\beta_k(b-t) +$$

$$\left. + h\operatorname{sh}\beta_k(b-t)\, dt] + \rho_k^2\nu_k\operatorname{ch}\beta_k y\right\} \quad (3.4)$$

и для $U(x, y)$ будем иметь решение

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\beta_k x}{\rho_k^2(\beta_k\operatorname{sh}\beta_k b + h\operatorname{ch}\beta_k b)}\left\{[\beta_k\operatorname{ch}\beta_k(b-y) + h\operatorname{sh}\beta_k(b-y)]\times\right.$$

$$\times\int_0^y\Big[L_1(t) + \frac{\sin\beta_k d}{\beta_k}M_2(t)\Big]\operatorname{ch}\beta_k t\, dt + \operatorname{ch}\beta_k y\int_y^b\Big[L_1(t) + \frac{\sin\beta_k d}{\beta_k}M_2(t)\Big]\times$$

$$\left.\times[\beta_k\operatorname{ch}\beta_k(b-t) + h\operatorname{sh}\beta_k(b-t)]\, dt + \operatorname{ch}\beta_k y\int_0^d M_1(t)\sin\beta_k t\, dt\right\} \quad (3.5)$$

совпадающее с решением, получаемым по обычному методу.

Заметим, что, подставляя значения m_k и n_k во вторую из формул (1.17), получим выражение коэффициента $V_k(x)$ разложения функции $U(x, y)$ в ряд по $\cos\alpha_k y$.

Рассмотрим далее случай, когда равна нулю длина d стороны BC, на которой заданы смешанные граничные условия (фиг. 1).

Принимая во внимание, что [4]

$$\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\pi < \beta_k d < \left(k-\tfrac{1}{2}\right)\pi + \frac{hd}{(k-{}^1/_2)\pi}$$

из (1.18) получаем

$$n_k = \frac{\alpha_k b}{\alpha_k \operatorname{ch}\alpha_k c + h\operatorname{sh}\alpha_k c}\left\{(-1)^k\alpha_k\lambda_k + (-1)^k\mu_k\operatorname{sh}\alpha_k c + \frac{2}{b}\int_0^c L_2(t)\operatorname{sh}\alpha_k t\,dt\right\}$$

Подставив значение n_k в первую из формул (1.17) и определив величину коэффициента разложения $U_k(x)$, для $U(x, y) = U_1(x, y)$ получим

$$U(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k\operatorname{ch}\alpha_k c + h\operatorname{sh}\alpha_k c}\Big\{[\alpha_k\operatorname{ch}\alpha_k(c-x) +$$

$$+ h\operatorname{sh}\alpha_k(c-x)]\left[\lambda_k + (-1)^k\frac{2}{b}\int_0^x L_2(t)\operatorname{sh}\alpha_k t\,dt\right] + \mu_k\operatorname{sh}\alpha_k x +$$

$$+ (-1)^k\frac{2}{b}\int_x^c L_2(t)\,[\alpha_k\operatorname{ch}\alpha_k(c-t) + h\operatorname{sh}\alpha_k(c-t]\,dt\Big\}\cos\alpha_k y \qquad (3.6)$$

Наконец, остановимся на предельном случае, когда $h\to\infty$ (задача Дирихле), предполагая при этом для общности, что

$$\lim_{h\to\infty}\frac{M_1(x)}{h} = L_2(x) \qquad (c\leqslant x\leqslant c+d), \qquad \lim_{h\to\infty}\frac{M_2(y)}{h} = N(y) \qquad (3.7)$$

Из уравнения (1.12) имеем $\beta_k d = k\pi$. Из (1.18) определяем

$$m_k = \frac{\sqrt{2}\,k\pi}{d}\int_c^{c+d} L_2(t)\sin\frac{k\pi(t-c)}{d}\,dt$$

$$n_k = \frac{\alpha_k\operatorname{sh}\alpha_k c\operatorname{sh}\alpha_k d}{\operatorname{sh}\alpha_k(c+d)}\left\{\frac{2}{\operatorname{sh}\alpha_k d}\int_c^{c+d} L_2(t)\operatorname{sh}\alpha_k(c+d-t)\,dt +\right. \qquad (3.8)$$

$$\left. + \frac{b}{\operatorname{sh}\alpha_k c}\left[(-1)^k\lambda_k + \frac{2}{b}\int_0^c L_2(t)\operatorname{sh}\alpha_k t\,dt\right] + \frac{2(-1)^k}{\operatorname{sh}\alpha_k d}\int_0^b N(t)\cos\alpha_k t\,dt\right\}$$

Подставив значения m_k и n_k в (1.17), после преобразований получим

$$U_k(x) = \frac{2}{b\operatorname{sh}\alpha_k(c+d)}\Big\{\operatorname{sh}\alpha_k(c+d-x)\int_0^b L_1(t)\cos\alpha_k t\,dt +$$

$$+ \operatorname{sh}\alpha_k x\int_0^b N(t)\cos\alpha_k t\,dt + (-1)^k\Big[\operatorname{sh}\alpha_k x\int_0^{c+d} L_2(t)\operatorname{sh}\alpha_k(c+d-t)\,dt -$$

$$- \operatorname{sh}\alpha_k(c+d)\int_0^x L_2(t)\operatorname{sh}\alpha_k(x-t)\,dt\Big]\Big\} \qquad (3.9)$$

Заметим, что такой же вид будет иметь и выражение для $V_k(x)$.

§ 4. Распределение тепла в призме с квадратным поперечным сечением. Рассмотрим в качестве примера задачу о плоском стационарном распределении тепла в призматическом теле с поперечным сечением в виде квадрата со стороной $2b$ (фиг. 2), на одной половине поверхности которого $BAA'B'$, поддерживается постоянная температура T_1, а на другой половине $BCC'B'$ происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей постоянную температуру T_2. Коэффициент теплоотдачи h принимаем равным $h = 2/b$. Таком образом функция распределения температуры $U(x, y)$ удовлетворяет уравнению

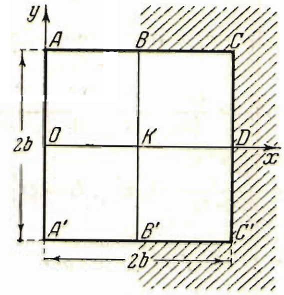
$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

и граничным условиям

$$U(0, y) = U(x, \pm b) = T_1 \qquad (0 \leqslant x \leqslant b)$$

$$\pm \frac{\partial U}{\partial y}\bigg|_{y=\pm b} = -\frac{2}{b}\left[U(x, \pm b) - \mathrm{T}_2\right] \qquad (b < x < 2b)$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_{x=2b} = -\frac{2}{b}\left[U(2b, y) - T_2\right]$$



Фиг. 2

Тогда величины, входящие в выражения (1.17) и (1.18), будут следующие:

$$c = d = b, \qquad h = \frac{2}{b}, \qquad L_1(y) = L_2(x) = T_1, \qquad M_1(x) = M_2(y) = \frac{2T_2}{b}$$

$$\lambda_k = (-1)^k \frac{4T_1}{(2k+1)\pi}, \qquad \mu_k = (-1)^k \frac{8T_2}{b\pi(2k+1)}, \qquad \nu_k = 2T_2 \frac{1-\cos\beta_k b}{\beta_k b \rho_k^2} \qquad (4.1)$$

При этом трансцендентное уравнение (1.12) примет вид:

$$\operatorname{tg}\beta_k b = -\frac{\beta_k b}{2}$$

Приведем значения первых десяти корней этого уравнения, используемых в дальнейшем:

$k =$	1	2	3	4	5
$\beta_k b =$	2.28892	5.08698	8.09617	11.17271	14.27635
$\sin\beta_k b =$	+0.75304	—0.93065	+0.97083	—0.98435	+0.99033
$k =$	6	7	8	9	10
$\beta_k b =$	17.39324	20.51752	23.64632	26.77808	29.91190
$\sin\beta_k b =$	—0.99345	+0.99528	—0.99644	+0.99730	—0.99722

Определим коэффициенты $U_k(x)$, $V_k(x)$ и $f_k(y)$ разложений функций $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$.

Подставляя в (1.17) значения величин (4.1), для $U_k(x)$ будем иметь

$$U_k(x) = \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)\operatorname{sh}\alpha_k b}\{(n_k - 2T_1)\operatorname{sh}\alpha_k x + 2T_1 \operatorname{sh}\alpha_k b\} \qquad (4.2)$$

Отсюда

$$U_1(x, y) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k \cos\alpha_k y}{(2k+1)\operatorname{sh}\alpha_k b}\{(n_k - 2T_1)\operatorname{sh}\alpha_k x + 2T_1\operatorname{sh}\alpha_k b\} \quad \left(\alpha_k = \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b}\right)$$

Преобразуем предыдущее выражение, просуммировав вторую часть, обусловливающую слабую сходимость.

Принимая во внимание, что

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\alpha_k y = 1$$

получим

$$U_1(x, y) = T_1 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\operatorname{sh}\alpha_k b}(n_k - 2T_1)\operatorname{sh}\alpha_k x\cos\alpha_k y \tag{4.3}$$

Далее, выражение для $V_k(x)$ будет иметь вид:

$$V_k(x) = \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi\operatorname{ch}\alpha_k b + 4\operatorname{sh}\alpha_k b}\left\{n_k\left[\operatorname{ch}\alpha_k(2b-x) + \frac{4}{(2k+1)\pi}\operatorname{sh}\alpha_k(2b-x)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{8T_2}{(2k+1)\pi}\operatorname{sh}\alpha_k(2b-x)\right\} + (-1)^k\frac{4\sqrt{2}(2k+1)}{\pi b}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{m_p}{\beta_p[(\beta_p\gamma)^2 + (2k+1)^2]}\sin\beta_p(x-b)$$

где $\gamma = 2b/\pi$. Отсюда находим

$$U_2(x, y) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)[(2k+1)\pi\operatorname{ch}\alpha_k b + 4\operatorname{sh}\alpha_k b]}\left\{n_k\left[(2k+1)\operatorname{ch}\alpha_k(2b-x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4}{\pi}\operatorname{sh}\alpha_k(2b-x)\right] + \frac{8T_2}{\pi}\operatorname{sh}\alpha_k(2b-x)\right\}\cos\alpha_k y +$$

$$+ \frac{4\sqrt{2}}{b\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\cos\alpha_k y\sum_{p=1}^{\infty}\frac{m_p}{\beta_p[(\gamma\beta_p)^2 + (2k+1)^2]}\sin\beta_p(x-b) \tag{4.4}$$

Меняя порядок суммирования в последнем слагаемом и замечая, что

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2 + (\beta_p\gamma)^2}\cos\alpha_k x = \frac{\operatorname{ch}\beta_p x}{\operatorname{ch}\beta_p b}$$

получим

$$U_2(x, y) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos\alpha_k y}{(2k+1)[(2k+1)\pi\operatorname{ch}\alpha_k b + 4\operatorname{sh}\alpha_k b]}\left\{n_k\left[(2k+1)\operatorname{ch}\alpha_k(2b-x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4}{\pi}\operatorname{sh}\alpha_k(2b-x)\right] + \frac{8T_2}{\pi}\operatorname{sh}\alpha_k(x-b)\right\} + \frac{\sqrt{2}}{b}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m_k}{\beta_k\operatorname{ch}\beta_k b}\sin\beta_k(x-b)\operatorname{ch}\beta_k y \tag{4.5}$$

С другой стороны, третье из соотношений (1.17) дает нам

$$f_k(y) = \frac{1}{\rho_k^2\beta_k b\operatorname{ch}\beta_k b}\left\{\sqrt{2}\rho_k^2 m_k\operatorname{ch}\beta_k y + \frac{2\beta_k^2 b\operatorname{ch}\beta_k b}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\cos\alpha_p y}{(2p+1)(\alpha_p^2 + \beta_k^2)}n_p + \right.$$

$$\left. + \frac{2T_2}{\beta_k}\sin\beta_k b(\operatorname{ch}\beta_k b - \operatorname{ch}\beta_k y)\right\}$$

Отсюда для $U_2(x, y)$ получаем новое разложение:

$$U_2(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{b}\sum_{k=1}^{\infty}\left(m_k - \sqrt{2}T_2\frac{\sin\beta_k b}{\rho_k^2\beta_k}\right)\frac{\operatorname{ch}\beta_k y}{\beta_k\operatorname{ch}\beta_k b}\sin\beta_k(x-b) +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\rho_k^2}\sin\beta_k(x-b)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p n_p\cos\alpha_p y}{(2p+1)(\alpha_p^2 + \beta_k^2)} + \frac{2T_2}{b}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\beta_k b}{\beta_k^2\rho_k^2}\sin\beta_k(x-b) \tag{4.6}$$

Меняя порядок суммирования во втором слагаемом и принимая во внимание, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \sin \beta_k (x-b)}{\rho_k^2 (\beta_k^2 + z^2)} = \frac{zb \operatorname{ch} z(2b-x) + 2 \operatorname{sh} z(2b-x)}{zb \operatorname{ch} zb + 2 \operatorname{sh} zb} \tag{4.7}$$

а также используя (2.2), окончательно получим

$$U_2(x,y) = \frac{2T_2(x-b)}{3b} + \frac{\sqrt{2}}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k b} \left(m_k - \sqrt{2} T_2 \frac{\sin \beta_k b}{\beta_k \rho_k^2} \right) \operatorname{ch} \beta_k y \sin \beta_k (x-b) +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k n_k \frac{(2k+1)\pi \operatorname{ch} \alpha_k (2b-x) + 4 \operatorname{sh} \alpha_k (2b-x)}{(2k+1)\left[(2k+1)\pi \operatorname{ch} \alpha_k b + 4 \operatorname{sh} \alpha_k b\right]} \cos \alpha_k y \tag{4.8}$$

При вычислении $U_2(x, y)$ можно пользоваться как (4.5), так и (4.8), в зависимости от быстроты сходимости в исследуемой точке рядов, входящих в эти соотношения. Заметим, что из сравнения (4.5) и (4.8) получается следующая формула:

$$\frac{1}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_k b}{\rho_k^2 \beta_k^2 \operatorname{ch} \beta_k b} \sin \beta_k x \operatorname{ch} \beta_k y = \frac{x}{3b} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k x}{(2k+1)\left[(2k+1)\pi \operatorname{ch} \alpha_k b + 4 \operatorname{sh} \alpha_k b\right]}$$

$$(0 \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant b) \tag{4.9}$$

Неизвестные коэффициенты m_k и n_k, входящие в выражения (4.3), (4.5) и (4.8), определяются из совокупности вполне регулярных систем уравнений:

$$n_k = \frac{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k b \, (\alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k b + 2 \operatorname{sh} \alpha_k b)}{\alpha_k b \operatorname{ch} 2\alpha_k b + 2 \operatorname{sh} 2\alpha_k b} \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{m_p}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} + \right.$$

$$\left. + (-1)^k \frac{2T_1}{\alpha_k} \operatorname{cth} \alpha_k b + \frac{4T_2}{\alpha_k (\alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k b + 2 \operatorname{sh} \alpha_k b)} \right\}$$

$$m_k = \frac{b \operatorname{ch} \beta_k b}{\sqrt{2} \rho_k^2 (\beta_k b \operatorname{sh} \beta_k b + 2 \operatorname{ch} \beta_k b)} \left\{ \beta_k^2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n_p}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} + \right. \tag{4.10}$$

$$\left. + 2T_2 \left[1 + \sin \beta_k b \left(\operatorname{th} \beta_k b + \frac{2}{\beta_k b} \right) \right] \right\}$$

где

$$\alpha_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{b}, \qquad \rho_k^2 = \frac{b}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\beta_k b}{2\beta_k b}\right)$$

Введя новые неизвестные:

$$n_k^* = n_k - 2T_1, \qquad m_k^* = m_k - \frac{bT_1}{\sqrt{2} \rho_k^2} - \frac{\sqrt{2} T_2 \sin \beta_k b}{\rho_k^2 b} \tag{4.11}$$

после некоторых преобразований придем к системе:

$$n_k^* = \frac{\operatorname{sh} \alpha_k b \left[(2k+1)\pi \operatorname{ch} \alpha_k b + 4 \operatorname{sh} \alpha_k b\right]}{(2k+1)\pi \operatorname{ch} 2\alpha_k b + 4 \operatorname{sh} 2\alpha_k b} \times$$

$$\times \left\{ \frac{4\sqrt{2}(2k+1)}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{m_p^*}{(\beta_p \gamma)^2 + (2k+1)^2} + \frac{8}{3\pi(2k+1)} (T_2 - T_1) \right\} \tag{4.12}$$

$$m_k^* = \frac{b}{\sqrt{2} \rho_k^2 (\beta_k b \operatorname{th} \beta_k b + 2)} \left\{ \beta_k^2 \gamma^2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n_p^*}{(2p+1)^2 + (\beta_k \gamma)^2} + 2(T_2 - T_1) \right\} \quad \left(\gamma = \frac{2b}{\pi}\right)$$

со стремящимися к нулю свободными членами. Предположим, что $T_1 > T_2$. Обозначим значения неизвестных m_k и n_k с недостатком соответственно через m_k^- и n_k^-, а с избытком — через m_k^+ и n_k^+.

Пользуясь известными теоремами о вполне регулярных системах [3], из (4.12) и (4.11) получим

$$n_0^- = 1.292\,T_1 + 0.708\,T_2\,, \qquad n_0^+ = 1.342\,T_1 + 0.658\,T_2$$
$$n_1^- = 1.448\,T_1 + 0.552\,T_2\,, \qquad n_1^+ = 1.567\,T_1 + 0.432\,T_2$$
$$n_2^- = 1.506\,T_1 + 0.494\,T_2\,, \qquad n_2^+ = 1.670\,T_1 + 0.330\,T_2$$
$$n_3^- = 1.540\,T_1 + 0.460\,T_2\,, \qquad n_3^+ = 1.736\,T_1 + 0.264\,T_2$$
$$n_k^- = 1.506\,T_1 + 0.494\,T_2\,, \qquad n_k^+ = 2T_1 + \frac{0.4244}{2k+1}\,T_2 \qquad (k > 3)$$
$$m_1^- = 0.420\,T_1 + 1.507\,T_2\,, \qquad m_1^+ = 0.458\,T_1 + 1.468\,T_2$$
$$m_2^- = 0.675\,T_1 + 0.165\,T_2\,, \qquad m_2^+ = 0.769\,T_1 + 0.072\,T_2$$
$$m_3^- = 0.796\,T_1 + 0.908\,T_2\,, \qquad m_3^+ = 0.934\,T_1 + 0.770\,T_2$$
$$m_4^- = 0.869\,T_1 + 0.278\,T_2\,, \qquad m_4^+ = 1.041\,T_1 + 0.106\,T_2$$
$$m_k^- = 0.920\,T_1 + \left(0.494 + 2.828\,\frac{\sin\beta_k b}{\beta_k b}\right) T_2$$
$$m_k^+ = \frac{1.414}{\beta_k b + 2}\left\{\beta_k b T_1 + 2\left(1 + \sin\beta_k b + \frac{2\sin\beta_k b}{\beta_k b}\right) T_2\right\} \qquad (k > 4)$$

Подставляя в соотношения (4.3), (4.5) и (4.8) вместо m_k и n_k соответственно значения m_k^-, n_k^- или m_k^+, n_k^+, получим нижнюю и верхнюю границы $U(x, y)$.

Результаты вычисленных значений $U(x, y)$ для некоторых точек приведены в табл. 1, при этом вверху каждой строки даны значения $U^+(x, y)$ с избытком, а внизу $U^-(x, y)$ — с недостатком.

Как видно из таблицы, наибольшее расхождение между верхней и нижней границами имеет место при $x = b$, т. е. в случае наиболее медленной сходимости рядов.

Таблица 1

$y \backslash x$	0	$\frac{1}{4}b$	$\frac{1}{2}b$	b	$\frac{3}{2}b$
0	T_1	$0.929\,T_1+0.071\,T_2$ $0.924\,T_1+0.076\,T_2$	$0.850\,T_1+0.150\,T_2$ $0.840\,T_1+0.160\,T_2$	$0.650\,T_1+0.350\,T_2$ $0.626\,T_1+0.374\,T_2$	$0.407\,T_1+0.593\,T_2$ $0.390\,T_1+0.610\,T_2$
$\pm\frac{b}{4}$	T_1	$0.933\,T_1+0.067\,T_2$ $0.928\,T_1+0.072\,T_2$	$0.857\,T_1+0.143\,T_2$ $0.847\,T_1+0.153\,T_2$	$0.642\,T_1+0.358\,T_2$ $0.634\,T_1+0.366\,T_2$	$0.403\,T_1+0.597\,T_2$ $0,386\,T_1+0.615\,T_2$
$\pm\frac{b}{2}$	T_1	$0.946\,T_1+0.054\,T_2$ $0.942\,T_1+0.058\,T_2$	$0.883\,T_1+0.117\,T_2$ $0.873\,T_1+0.127\,T_2$	$0.684\,T_1+0.316\,T_2$ $0.645\,T_1+0.355\,T_2$	$0.386\,T_1+0.615\,T_2$ $0.366\,T_1+0.634\,T_2$
$\pm\frac{3b}{4}$	T_1	$0.970\,T_1+0.030\,T_2$ $0.967\,T_1+0.033\,T_2$	$0.931\,T_1+0.069\,T_2$ $0.923\,T_1+0.077\,T_2$	$0.712\,T_1+0.288\,T_2$ $0.691\,T_1+0.309\,T_2$	$0.339\,T_1+0.661\,T_2$ $0.318\,T_1+0.682\,T_2$
$\pm b$	T_1	T_1	T_1	T_1	$0.259\,T_1+0.742\,T_2$ $0.232\,T_1+0.769\,T_2$

Заметим, что при $T_1 < T_2$ индексы плюс и минус нужно везде поменять местами.

Поступила 25 VIII 1951 Академия наук Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР. 1948.
2. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Гостехиздат. 1950.
3. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат. 1950.
4. Минасян Р. С. Об одной задаче теплопроводности. ДАН Арм.ССР. 1950. Т. XII. № 3.