Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ПОЛОСЫ

М. Я. Беленький

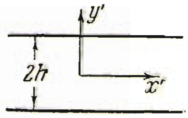
(Ленинград)

В статье содержится решение смешанной задачи теории упругости для бесконечно длинной полосы. Попутно решена вспомогательная задача — задача с заданными на границе полосы напряжениями.

§ 1. Вспомогательная задача. Рассмотрим бесконечную полосу, представленную на фиг. 1. Будем пользоваться безразмерными координатами $x = x' / h$, $y = y' / h$, где h — полуширина полосы.

Найдем напряженное состояние полосы $|y| \leqslant 1$ при граничных условиях

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \begin{cases} f_1(x) & \text{при } y = 1 \\ f_2(x) & \text{при } y = -1 \end{cases} \qquad (1.1)$$



Фиг. 1

где σ_y и τ_{xy} — нормальные и касательные напряжения.

В этом и в последующих параграфах используются формулы Колосова-Мусхелишвили, дающие представление напряжений и смещений через две голоморфные функции.

Понадобятся следующие формулы:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\,\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \qquad (1.2)$$

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varkappa\,\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\,\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \qquad (1.3)$$

где u и v — компоненты смещения вдоль осей x и y соответственно, $\varkappa$ и μ — константы упругости.

Применительно к поставленной задаче функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ голоморфны в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$. Представим $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ следующим образом:

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \qquad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z)$$

где $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ — функции, голоморфные в полуплоскости $\operatorname{Im} z \leqslant 1$. Будем этой полуплоскости приписывать индекс 1.

Функции $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ — голоморфные в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant -1$. Будем этой полуплоскости приписывать индекс 2. Возможность такого представления оправдывает соответствующая лемма, доказательство которой можно найти, например, в статье В. А. Фока [1].

Такое представление дает право рассматривать напряжение в полосе как сумму двух напряжений — напряжений полуплоскостей 1 и 2 — в их общей части. Имея в виду использование известных решений задач теории упругости для полуплоскости, перепишем выражения (1.2) и (1.3) в форме

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \sum_{k=1}^{2} [\Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} + z_k\overline{\Phi_k'(z)} + \overline{\Psi_k(z)}] \tag{1.4}$$

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \sum_{k=1}^{2} [\varkappa\Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(z)} - z_k\overline{\Phi_k(z)} - \overline{\Psi_k(z)}] \tag{1.5}$$

где

$$z_1 = z - i = x + i(y-1), \qquad z_2 = z + i = x + i(y+1)$$

Ищем $\Phi_k(z)$ и $\Psi_k(z)$ в виде

$$\begin{aligned}
\Phi_1(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(t) - iq_1(t)}{t - z_1}dt \\
\Phi_2(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(t) + iq_2(t)}{t - z_2}dt \\
\Psi_1(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(t) + iq_1(t)}{t - z_1}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(t) - iq_1(t)}{(t - z_1)^2}dt \\
\Psi_2(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(t) - iq_2(t)}{t - z_2}dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(t) + iq_2(t)}{(t - z_2)^2}dt
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где функции $p_1(t)$, $p_2(t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ подлежат определению. Формула (1.4) после подстановки $\Phi_k(z)$ и $\Psi_k(z)$ дает

$$\begin{aligned}
\sigma_y - i\tau_{xy} = &-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(t) - iq_1(t)}{t - z_1}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(t) + iq_1(t)}{t - \bar{z}_1}dt + \\
&+ \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(t) + iq_1(t)}{(t - \bar{z}_1)^2}dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q_1(t)\,dt}{t - z_1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(t) + iq_2(t)}{t - z_2}dt + \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(t) - iq_2(t)}{t - \bar{z}_2}dt - \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(t) - iq_2(t)}{(t - \bar{z}_2)^2}dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q_2(t)\,dt}{t - \bar{z}_2}
\end{aligned}$$

Пользуясь формулами Племеля, дающими граничные значения интегралов типа Коши, удовлетворим граничным условиям (1.1). Получим

$$\begin{aligned}
\sigma_y - i\tau_{xy}|_{y=1} = f_1(x) = p_1(x) - iq_1(x) &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(t) + iq_2(t)}{t - x - 2i}dt + \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(t) - iq_2(t)}{t - x + 2i}dt - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(t) - iq_2(t)}{(t - x + 2i)^2}dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q_2(t)\,dt}{t - x - 2i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y - i\tau_{xy}|_{y=-1} = f_2(x) = p_2(x) + iq_2(x) &- \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(t) - iq_1(t)}{t - x + 2i}dt + \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(t) + iq_1(t)}{t - x - 2i}dt - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(t) + iq_1(t)}{(t - x - 2i)^2}dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q_1(t)\,dt}{t - x = 2i}
\end{aligned}$$

Отделив вещественные и мнимые части для $p_k(x)$ и $q_k(x)$, получим систему интегральных уравнений: (1.7)

$$p_1(x)+\frac{16}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(t)}{[4+(t-x)^2]^2}dt+\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t-x)\,q_2(t)}{[4+(t-x)^2]^2}dt=\sigma_y|_{y=1}=\operatorname{Re}f_1(x)$$

$$q_1(x)-\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q_2(t)(t-x)^2}{[4+(t-x)^2]^2}dt-\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(t)\,(t-x)}{[4+(t-x)^2]^2}dt=\tau_{xy}|_{y=1}=\operatorname{Im}f_1(x)$$

$$p_2(x)+\frac{16}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(t)}{[4+(t-x)^2]^2}dt+\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t-x)\,q_1(t)}{[4+(t-x)^2]^2}dt=\sigma_y|_{y=-1}=\operatorname{Re}f_2(x)$$

$$q_2(x)-\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q_1(t)\,(t-x)^2}{[4+(t-x)^2]^2}dt-\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(t)\,(t-x)}{[4+(t-x)^2]^2}dt=\tau_{xy}|_{y=-1}=\operatorname{Im}f_2(x)$$

Для упрощения вычислений положим, что граница полосы свободна от касательных напряжений, т. е. $\operatorname{Im}f_1(x)=\operatorname{Im}f_2(x)\equiv 0$.

Система интегральных уравнений (1.7) легко решается преобразованием Фурье. Опуская выкладки, выпишем решение системы (1.7):

$$p_k(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-4|\alpha|+8\alpha^2-e^{4|\alpha|}}{2+16\alpha^2-e^{4\alpha}-e^{-4\alpha}}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f_k(t)\cos\alpha(x-t)\,dt+ \tag{1.8}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+2|\alpha|)\,e^{2|\alpha|}-(1-2|\alpha|)\,e^{-2|\alpha|}}{2+16\alpha^2-e^{4\alpha}-e^{-4\alpha}}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f_{3-k}(t)\cos\alpha(x-t)\,dt$$

$$(k=1,2)$$

$$q_k(x)=-\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha|\alpha|}{2+16\alpha^2-e^{4\alpha}-e^{-4\alpha}}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f_k(t)\sin\alpha(x-t)\,dt+ \tag{1.9}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha\,(e^{2|\alpha|}-e^{-2|\alpha|})}{2+16\alpha^2-e^{4\alpha}-e^{-4\alpha}}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f_{3-k}(t)\sin\alpha(x-t)\,dt$$

Преобразуем выражения (1.8) и (1.9). Воспользуемся тождеством, которое имеет место, если потребовать, чтобы функция $f_k(t)$ была абсолютно интегрируема. Формулу (1.8) запишем в следующем виде:

$$p_k(x)=f_k(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f_k(t)\,dt\int_0^{\infty}\frac{e^{-2\alpha}-1-2\alpha}{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}+4\alpha}\cos\alpha(x-t)\,d\alpha+ \tag{1.10}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1+2\alpha)\,e^{2\alpha}-(1-2\alpha)\,e^{-2\alpha}}{2+16\alpha^2-e^{4\alpha}-e^{-4\alpha}}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}[f_{3-k}(t)-f_k(t)]\cos\alpha(x-t)\,dt\qquad(k=1,2)$$

Преобразование формулы (1.9) — просто иная запись ее:

$$q_k(x)=-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f_k(t)\,dt\int_0^{\infty}\frac{\alpha\sin\alpha(x-t)}{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}+4\alpha}d\alpha+ \tag{1.11}$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha\,(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})}{2+16\alpha-e^{4\alpha}-e^{-4\alpha}}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}[f_{3-k}(t)-f_k(t)]\sin\alpha(x-t)\,dt\qquad(k=1,2)$$

§ 2. Смешанная задача для полосы. На части границы полосы задана v — составляющая смещения по оси y, на остальной части границы — нормальные напряжения σ_y и на всей границе — касательные напряжения τ_{xy}:

$$v(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{на } L_1 \text{ (часть границы } y = 1) \\ \varphi_2(x) & \text{на } L_2 \text{ (часть границы } y = -1) \end{cases}$$

$$\sigma_y = \begin{cases} \theta_1(x) & \text{вне } L_1 \text{ при } y = 1 \\ \theta_2(x) & \text{вне } L_2 \text{ при } y = -1 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\tau_{xy} = 0 \text{ на всей границе}$$

Найдем нормальные напряжения на участках L_1 и L_2.

Переходим к решению поставленной задачи. Из формул (1.4) и (1.5) их сложением образуем формулу

$$2\mu(u' + iv') = [\varkappa + 1][\Phi_1(z) + \Phi_2(z)] - (\sigma_y - i\tau_{xy})$$

или

$$\frac{2\mu}{\varkappa + 1}(u' + iv') = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) - \frac{1}{\varkappa + 1}(\sigma_y - i\tau_{xy}) \tag{2.2}$$

Функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ представляем попрежнему в виде (1.6).

На границе будем иметь

$$\frac{2\mu}{\varkappa + 1}(u' + iv')|_{y=1} = \frac{p_1(x) - iq_1(x)}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(t) - iq_1(t)}{t - x}dt + $$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(t) + iq_2(t)}{(t - x - 2i)}dt - \frac{f_1(x)}{\varkappa + 1}$$

Отделим мнимую часть последнего выражения: (2.3)

$$\frac{2\mu}{\varkappa + 1}v'|_{y=1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(t)\,dt}{t - x} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(t)(t - x)}{4 + (t - x)^2}dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{q_2(t)\,dt}{4 + (t - x)^2} - \frac{q_1(x)}{2}$$

Совершенно аналогично получим (2·4)

$$\frac{2\mu}{\varkappa + 1}v'|_{y=-1} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(t)\,dt}{t - x} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(t)(t - x)}{4 + (t - x)^2}dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{q_1(t)\,dt}{4 + (t - x)^2} + \frac{q_2(x)}{2}$$

В формулу (2.3) подставим $p_k(t)$ и $q_k(t)$ по записи (1.10), (1.11). Эта подстановка в конечном итоге (выкладки опускаем) даст

$$\frac{2\mu}{\varkappa + 1}v'|_{y=1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\xi - x} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_1(\xi)\,d\xi\int\limits_0^{\infty}K_1(\alpha)\sin\alpha(x - \xi)\,d\alpha + $$
$$- \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}K_2(\alpha)\,d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[f_2(\xi) - f_1(\xi)]\sin\alpha(x - \xi)\,d\xi \tag{2.5}$$

где

$$K_1(\alpha) = \frac{2e^{-2\alpha} - 2 - 4\alpha}{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} + 4\alpha}, \qquad K_2(\alpha) = \frac{(e^{-2\alpha} + 1)[(1 + 4\alpha)e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}]}{2 + 16\alpha^2 - e^{4\alpha} - e^{-4\alpha}}$$

Совершенно аналогично получим

$$-\frac{2\mu}{\varkappa+1}v'|_{y=-1}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_2(\xi)\,d\xi}{\xi-x}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_2(\xi)\,d\xi\int\limits_0^{\infty}K_1(\alpha)\sin\alpha(x-\xi)\,d\alpha+$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}K_2(\alpha)\,d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[f_1(\xi)-f_2(\xi)]\sin\alpha(x-\xi)\,d\xi \qquad (2.6)$$

В формулах (2.5) и (2.6) разобьем интегрирование на участки L_1 и L_2 и участки вне L_1 и L_2 (соответственно C_1 и C_2). Пусть в выражении (2.5) x будет на L_1, а в выражении (2.6) x на L_2. Тогда формулы (2.5) и (2.6) перепишутся так:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_1}\frac{f_1(\xi)}{\xi-x}d\xi-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_1}f_1(\xi)\,d\xi\int\limits_0^{\infty}K_1(\alpha)\sin\alpha(x-\xi)\,d\alpha- \qquad (2.7)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}K_2(\alpha)\Big[\int\limits_{L_2}f_2(\xi)\sin\alpha(x-\xi)\,d\xi-\int\limits_{L_1}f_1(\xi)\sin\alpha(x-\xi)\Big]d\alpha=\varphi_3(x)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_2}\frac{f_2(\xi)}{\xi-x}d\xi-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_2}f_2(\xi)\,d\xi\int\limits_0^{\infty}K_1(\alpha)\sin\alpha(x-\xi)\,d\alpha- \qquad (2.8)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}K_2(\alpha)\Big[\int\limits_{L_1}f_1(\xi)\sin\alpha(x-\xi)\,d\xi-\int\limits_{L_2}f_2(\xi)\sin\alpha(x-\xi)d\xi\Big]d\alpha=\varphi_4(x)$$

где

$$\varphi_3(x)=\frac{2\mu}{\varkappa+1}\varphi_1'(x)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_1}\frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\xi-x}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_1}f_1(\xi)\,d\xi\int\limits_0^{\infty}K_1(\alpha)\sin\alpha(x-\xi)\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}K_2(\alpha)\Big[\int\limits_{C_2}f_2(\xi)\sin\alpha(x-\xi)\,d\xi-\int\limits_{C_1}f_1(\xi)\sin\alpha(x-\xi)\,d\xi\Big]d\alpha$$

Функция $\varphi_4(x)$ получается аналогично. Уравнения (2.7) и (2.8) есть интегральные уравнения для нормальных напряжений $f_1(x)$ и $(f_1(x)$, причем участки их определения — участки задания смещений.

Замечание 1. В формулах (2.7) и (2.8) во вторых интегралах $K_2(\alpha)$ имеет в нуле особенность третьего порядка и для существования этих интегралов необходимо выполнение условий

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[f_2(\xi)-f_1(\xi)]\,d\xi=0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}[f_2(\xi)-f_1(\xi)]\,\xi d\xi=0$$

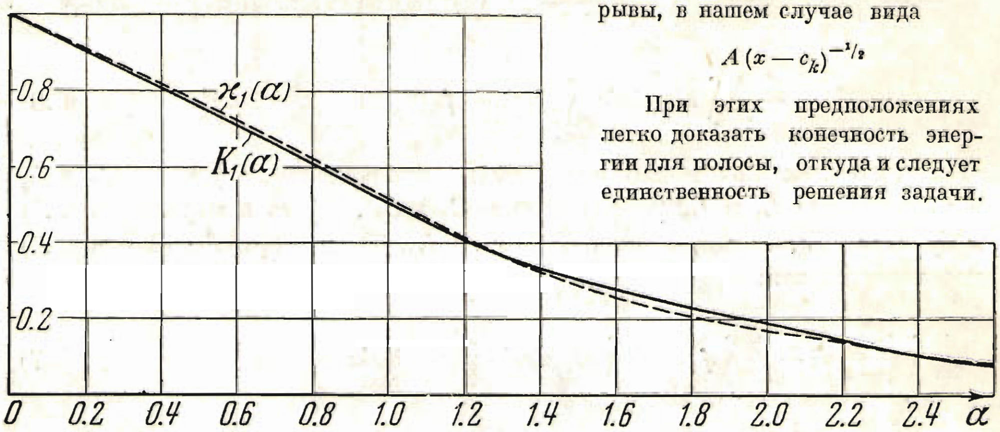
Это так называемые условия статики.

Замечание 2. В интегральных уравнениях (2.7), (2.8) есть интегралы, например, от $K_1(\alpha)\sin\alpha(x-\xi)$, которые в конечном виде не берутся. Придется их вычислить приближенно, после чего решать интегральные уравнения. Приближенное вычисление интегралов приводит к отступлению от исходных уравнений, и потому должны быть решены следующие вопросы: 1) существование решения исходных интегральных уравнений, единственность решения; 2) оценка отклонения приближенного решения от решения исходных уравнений.

Считаем, что L_1 и L_2 — части вещественной оси, состоящие из конечного числа ее отрезков. Концы этих отрезков обозначим через c_k. Решение интегральных уравнений будем искать в классе функций, допускающих на некоторых концах разрывы, в нашем случае вида

$$A(x-c_k)^{-1/2}$$

При этих предположениях легко доказать конечность энергии для полосы, откуда и следует единственность решения задачи.



Фиг. 2

Разрешимость следует из уравнений, получающихся регуляризацией исходных. Оценка (вопрос 2) может быть получена следующим образом. Если имеются два сингулярных интегральных уравнения (предполагаем существование решения)

$$\int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{t-x} - \int\limits_L f(t)\,K(t,x)\,dt = g(x), \qquad \int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x} - \int\limits_L \varphi(t)\,k(t,x)\,dt = g(x) \tag{2.9}$$

то в предположениях

$$|K(t,x)-k(t,x)| \leqslant \varepsilon, \qquad |K(t,x)-K(t,\xi)+k(t,\xi)-k(t,x)| \leqslant \varepsilon\,|\xi - x|$$

имеет место оценка

$$|f(x)-\varphi(x)| \leqslant \varepsilon B\left|\Bigl(\prod_k (x-c_k)\Bigr)^{-1/2}\right| \tag{2.10}$$

где B — величина конечная, а $\prod$ — произведение по тем концам c_k, в которых решение разрывно [1].

§ 3. Приближенное решение интегральных уравнений для частного случая. Рассмотрим случай симметричных относительно оси x граничных условий ($L_1=L_2=L$):

$$v|_{L_1} = -v|_{L_2}, \quad \tau_{xy}=0 \ \text{ на всей границе}, \ \sigma_y = 0 \ \text{ вне } L \text{ (на границе)} \tag{3.1}$$

В этом случае $f_1(x)=f_2(x)=f(x)$ и уравнения (2.7) и (2.8) дадут следующее уравнение:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - x} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_L f(\xi)\,d\xi \int\limits_0^\infty K_1(\alpha)\sin\alpha(x-\xi)\,d\alpha = \varphi(x) \tag{3.2}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{2\mu}{\varkappa+1}v' \quad \text{на } L \tag{3.3}$$

Имея в виду приближенное вычисление

$$\int\limits_0^\infty K_1(\alpha)\sin\alpha(x-\xi)\,d\alpha$$

[1] Обоснование оценки дано в конце статьи в § 4.

напомним, что

$$K_1(\alpha) = 2\,\frac{e^{-2\alpha} - 1 - 2\alpha}{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} + 4\alpha}\,; \qquad K_1(\alpha) \approx -\frac{2+4\alpha}{e^{2\alpha}} \quad \text{(при больших } \alpha) \tag{3.4}$$

$$\int\limits_A^\infty e^{-2\alpha}\sin\alpha(x-\xi)\,d\alpha = \frac{e^{-2\alpha}\left[-2\sin\alpha(x-\xi) - (x-\xi)\cos\alpha(x-\xi)\right]}{4+(\xi-x)^2}\Bigg|_A^\infty \tag{3.5}$$

По причине малости этого интеграла при больших A будем интересоваться аппроксимацией $K_1(\alpha)$ только на участке [0,3].

На этом участке аппроксимируем $K_1(\alpha)$ функцией [1]

$$\varkappa_1(\alpha) = -e^{-{}^3/_2\alpha}\left(1+\frac{5}{4}\alpha\right) \tag{3.6}$$

Некоторое представление об аппроксимации дает график этих функций (фиг. 2). После замены $K_1(\alpha)$ новое интегральное уравнение будет иметь вид:

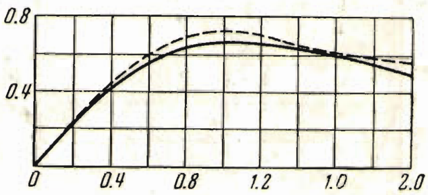
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - x} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_L f(\xi)\left[\frac{\xi - x}{{}^9/_4 + (\xi-x)^2} + \frac{15(\xi-x)}{4\,[{}^9/_4 + (\xi-x)^2]^2}\right]d\xi = \varphi(x) \tag{3.7}$$

Решение этого типа уравнений пока не получено, однако можно указать следующий способ приближенного решения.

Для функций вида

$$\frac{t}{t^2+a^2}, \quad \frac{t}{(t^2+a^2)^2}$$

С. Н. Бернштейном [2] построены полиномы наилучшего приближения. Если в уравнении (3.7) регулярную часть ядра заменить полиномом, то интегральное уравнение решается в конечном виде.



Фиг. 3

Пример. На участке [—1,1] полоса сдавливается силой P прямолинейными жесткими штампами. Найдем нормальные напряжения под штампами. Регулярную часть ядра интегрального уравнения (3.7) заменим полиномом пятой степени наилучшего приближения:

$$(\xi - x)\left[\frac{1}{{}^9/_4 + (\xi-x)^2} + \frac{{}^{15}/_4}{[{}^9/_4 + (\xi-x)^2]^2}\right] \approx (\xi - x)\,[1.22 - 0.55\,(\xi - x)^2 + 0.08\,(\xi - x)^4]$$

На фиг. 3 сплошной линией дана кривая для левой части этого равенства, пунктиром — для правой. Уравнение (3.7) после указанной замены перейдет в следующее:

$$\int\limits_{-1}^{+1}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - x} = x\int\limits_{-1}^{+1} f(\xi)\,[-1.22 + 1.65\xi^2 - 0.4\xi^4]\,d\xi + x^2\int\limits_{-1}^{+1} f(\xi)\,Q_1(\xi)\,d\xi +$$
$$+ x^3\int\limits_{-1}^{+1} f(\xi)\,[0.55 - 0.8\xi^2]\,d\xi + x^4\int\limits_{-1}^{+1} f(\xi)\,Q_2(\xi)\,d\xi - 0.08x^5\int\limits_{-1}^{+1} f(\xi)\,d\xi + \int\limits_{-1}^{+1} f(\xi)\,Q_3(\xi)\,d\xi \tag{3.8}$$

где $Q_k(\xi)$ — функции, нечетные по ξ, и так как $f(\xi)$ четно, то интегралы

$$\int\limits_{-1}^{+1} f(\xi)\,Q_k(\xi)\,d\xi = 0$$

[1] Аппроксимирующую функцию можно искать в более общем виде, а именно

$$\sum_1^h e^{-p_k^\alpha}\,Q_k(\alpha) \qquad (Q_k(\alpha)\text{-полиномы}, \quad p_k > 0)$$

Ищем решение уравнения (3.8) в виде

$$f(\xi)=\frac{c_0+c_1\xi^2+c_2\xi^4+c_3\xi^6}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Левая часть уравнения (3.7) даст

$$\int_{-1}^{+1}\frac{c_0+c_1\xi^2+c_2\xi^4+c_3\xi^6}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi-x)}\,d\xi=\pi\,(c_1x+c_2x^3+c_3x^5)$$

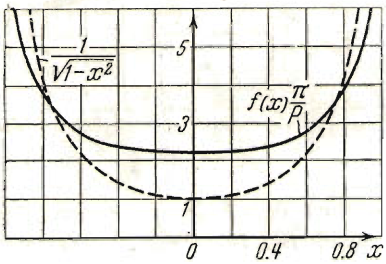
Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и используя условие

$$\int_{-1}^{+1}f(\xi)\,d\xi=P$$

получим для коэффициентов c_k следующую систему:

$$\pi c_1=\int_{-1}^{+1}\frac{c_0+c_1\xi^2+c_2\xi^4+c_3\xi^6}{\sqrt{1-\xi^2}}\,[-1.22+1.65\xi^2-0.4\xi^4]\,d\xi,\qquad \pi c_3=-0.08P$$

$$\pi c_2=\int_{-1}^{+1}\frac{c_0+c_1\xi^2+c_2\xi^4+c_3\xi^6}{\sqrt{1-\xi^2}}\,[0.55-0.8\xi^2]\,d\xi,\qquad c_0+0.5c_1+0.375c_2+0.312c_3=\frac{P}{\pi}$$



Фиг. 4

или

$$c_0+0.5c_1\quad+0.375c_2=1.025\,\frac{P}{\pi}$$

$$0.4c_0+0.3c_1\quad+1.250c_2=0.568\,\frac{P}{\pi}$$

$$0.675c_0-0.506c_1+0.406c_2=1.248\,\frac{P}{\pi}$$

Решив последнюю систему, найдем нормальные напряжения под штампами:

$$f(x)=\frac{1.26-0.62x^2+0.2x^4-0.08x^6}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{P}{\pi}$$

На фиг. 4 изображены напряжения под одинаковыми штампами для полосы и полуплоскости.

§ 4. Приложение. Обоснование оценки (2.10). Рассмотрим два сингулярных уравнения (2.9), в которых L — конечное число отрезков вещественной оси.

Концы этих отрезков обозначим через c_k. Индексом интегрального уравнения назовем по Мусхелишвили число $\varkappa=p-q$, где p — число отрезков, а q — число концов, в которых решение ограничено. Следуя Н. И. Мусхелишвили, введем в рассмотрение уравнения, эквивалентные уравнениям (2.9). Проделаем это для первого уравнения (2.9). Имеем

$$f(x)+\frac{\sqrt{R_1(x)}}{\pi^2\sqrt{R_2(x)}}\int_L f(t)\,dt\int_L\frac{\sqrt{R_2(\xi)}K(t,\xi)}{\sqrt{R_1(\xi)}(\xi-x)}\,d\xi=$$

$$=\frac{\sqrt{R_1(x)}}{\sqrt{R_2(x)}}P_{p-q-1}(x)-\frac{\sqrt{R_1(x)}}{\pi^2\sqrt{R_2(x)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,g(t)}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-x)}\,dt \tag{4.1}$$

Здесь $P_{p-q-1}(x)$ — полином степени не выше $p-q-1$, причем $P_{p-q-1}(x)\equiv 0$ для $\varkappa\leqslant 0$; далее

$$R_1(x)=\prod_{k=1}^{q}(x-c_k),\qquad R_2(x)=\prod_{k=q+1}^{2p}(x-c_k)$$

где c_k в выражении для $R_1(x)$ обозначают концы, в которых решение ограничено, а в выражении для $R_2(x)$ — концы, в которых решение разрывно.

Введем замену $\sqrt{R_2(x)}\, f(x) = f_1(x)$; функция $f_1(x)$ будет всюду на L ограниченной. Такая замена переводит уравнение (2.9) в следующее:

$$f_1(x) + \int_L f_1(t)\, K_1(t, x)\, dt = g_1(x) \tag{4.2}$$

где

$$\begin{gathered} K_1(t, x) = \frac{\sqrt{R_1(x)}}{\pi^2 \sqrt{R_1(t)}} \int_L \frac{\sqrt{R_2(\xi)}\, K(t, \xi)}{\sqrt{R_1(\xi)}(\xi - x)}\, d\xi \\ g_1(x) = \sqrt{R_1(x)}\, P_{p-q-1} - \frac{\sqrt{R_1(x)}}{\pi^2} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, g(t)}{\sqrt{R_1(t)}(t - x)}\, dt \end{gathered} \tag{4.3}$$

Ядро $K_1(t, x)$ как функция x всюду на L ограничено, как функция t имеет особенности вида

$$\frac{1}{\sqrt{R_1(t)}} = \left(\prod_{k=1}^{q} (t - c_k)\right)^{-1/2}$$

Хотя уравнение (4.2) и не совсем фредгольмово, заменой

$$\frac{dt}{\sqrt{R_1(t)}} = d\tau$$

оно переводится в уравнение с ограниченным ядром и потому к нему применима теория Фредгольма (см. [4], стр. 345), из которой в дальнейшем понадобится следующая лемма.

Лемма. Если интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \int_L \varphi(t)\, k_1(t, x)\, dt = g_1(x)$$

при любой правой части имеет единственное решение, то это решение допускает оценку

$$|\varphi(x)| \leqslant A(1 + D)$$

Эта оценка получается из представления решения через резольвенту, а именно

$$\varphi(x) = g_1(x) - \int_L R(x, t)\, g_1(t)\, dt$$

$$D = \max \int_L |R(x, t)|\, dt, \quad A = \max |g_1(x)|$$

Итак, вместо уравнений (2.9) рассмотрим получающиеся из них регуляризацией [а потом заменой $\sqrt{R_2(x)}\, f(x) = f_1(x)$ и $\sqrt{R_2(x)}\, \varphi(x) = \varphi_1(x)$] следующие уравнения:

$$f_1(x) + \int_L f_1(t)\, K_1(t, x)\, dt = g_1(x), \qquad \varphi_1(x) + \int_L \varphi_1(t)\, k_1(t, x)\, dt = g_1(x) \tag{4.4}$$

Индексы обоих уравнений считаем одинаковыми, а концы, в которых решения ограничены, совпадающими; оба уравнения предполагаем разрешимыми при любой правой части.

Составим разность из уравнений (4.4). Имеем

$$[f_1(x) - \varphi_1(x)] + \int_L [f_1(t) - \varphi_1(t)]\, k_1(t, x)\, dt = \int_L f_1(t)\, [k_1(t, x) - K_1(t, x)]\, dt$$

или

$$\psi(x) + \int_L \psi(t)\, k_1(t, x)\, dt = \gamma(x)$$

где

$$\psi(x) = f_1(x) - \varphi_1(x)$$

$$\gamma(x) = \int_L f_1(t)\,[k_1(t, x) - K_1(t, x)]\,dt = \frac{\sqrt{R_1(x)}}{\pi^2}\int_L \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}}\int_L \frac{[k(t, \xi) - K(t, \xi)]}{(\xi - x)}\,d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{R_1(x)}}{\pi^2}\int_L \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}}\int_L \frac{\sqrt{R_2(\xi)}\,[k(t, \xi) - k(t, x) + K(t, x) - K(t, \xi)]}{\sqrt{R_1(\xi)}\,(\xi - x)}\,d\xi +$$

$$+ [k(t, x) - K(t, x)]\,\frac{\sqrt{R_1(x)}}{\pi^2}\int_L \frac{\sqrt{R_2(\xi)}}{\sqrt{R_1(\xi)}}\,\frac{d\xi}{\xi - x}$$

Обозначим

$$\int_L \frac{\sqrt{R_2(\xi)}}{\sqrt{R_1(\xi)}}\,\frac{d\xi}{\xi - x} = F(x) \tag{4.5}$$

Величина $F(x)$ либо полином, либо нуль в зависимости от $\varkappa$. Сделаем следующие допущения:

$$|k(t, x) - K(t, x)| < \varepsilon \tag{4.6}$$

$$|k(t, \xi) - k(t, x) + K(t, x) - K(t, \xi)| < \varepsilon\,|\xi - x| \tag{4.7}$$

Тогда для оценки $\gamma(x)$ имеем

$$|\gamma(x)| < \frac{|\sqrt{R_1(x)}|}{\pi^2}\left(\int_L \frac{|\sqrt{R_2(\xi)}|}{|\sqrt{R_1(\xi)}|}\,d\xi \int \frac{|f(t)|\,dt}{|\sqrt{R_1(t)}|} + |F(x)|\right)\varepsilon$$

или

$$|\gamma(x)| < \varepsilon B$$

где

$$B = \max \frac{|\sqrt{R_1(x)}|}{\pi^2}\left(\int_L \left|\frac{\sqrt{R_2(\xi)}}{\sqrt{R_1(\xi)}}\right| d\xi \int_L \left|\frac{f(t)}{\sqrt{R_1(t)}}\right| dt + |F(x)|\right)$$

Для $\psi(x)$ имеем оценку (по лемме)

$$|\psi(x)| < \varepsilon B(1 + D) \quad \text{или} \quad |f_1(x) - \varphi_1(x)| < \varepsilon B(1 + D)$$

Так как

$$\left.\begin{matrix} f_1(x) \\ \varphi_1(x) \end{matrix}\right\} = \sqrt{R_2(x)}\left\{\begin{matrix} f(x) \\ \varphi(x) \end{matrix}\right.$$

то окончательно имеем

$$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon B(1 + D)}{|\sqrt{R_2(x)}|}$$

Поступила 29 VI 1951

Ленинградский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Матем. сборник. 1944. Т. XIV.

2. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. I. ОНТИ. 1937.

3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР. 1949.

4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.