Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ

А. И. Каландия

(Тбилиси)

Задача равновесия тонкой упругой пластинки с заделанным и со свободным краями разработана в литературе с исчерпывающей полнотой [1—5]. Случай опертого края был изучен способом Н. И. Мусхелишвили З. И. Халиловым [6] для односвязной области, а затем иным путем автором настоящей статьи для случая многосвязной области.

Применяя сингулярные интегральные уравнения, Г. Ф. Манджавидзе [7] изучил смешанную задачу изгиба пластинки, когда часть края пластинки заделана, а часть свободна.

В настоящей работе изучается задача изгиба пластинки, когда часть края оперта, а остальная часть заделана. При помощи интегрального представления Д. И. Шермана [8] строятся интегральные уравнения Фредгольма, эквивалентные задаче, и затем дается исследование полученных уравнений.

§ 1. Постановка задачи. Обозначим через T область, занятую срединной поверхностью тонкой упругой изотропной пластинки. Пусть T — конечная односвязная область плоскости переменной $z = x + iy$, ограниченная одним замкнутым контуром L. Положительным направлением на L будем считать то, которое оставляет T слева. В дальнейшем будем предполагать, что декартовы координаты точек L имеют непрерывные производные четвертого порядка по дуге s.

Пусть граница L состоит из $2n$ дуг L_k с концами a_k и a_{k+1} $(k = 1, 2, \ldots, 2n$ $a^{2n+1} = a_1)$. Обозначим

$$L^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} L_{2k-1}, \qquad L^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} L_{2k}$$

Будем считать, что часть $L^{(1)}$ границы L оперта, а $L^{(2)}$ заделана.

Если обозначим через $q(x, y)$ нормальную нагрузку пластинки, то искомый прогиб ее срединной поверхности $u(x, y)$, как известно [9], определяется условиями

$$\Delta\Delta u = \frac{q}{D} \qquad \text{в области } T \tag{1.1}$$

$$G(u) \equiv \sigma \Delta u + (1 - \sigma)[u_{xx} \cos^2\theta + 2u_{xy} \cos\theta \sin\theta + u_{yy} \sin^2\theta] = 0$$

$$u = 0 \quad \text{на } L^{(1)}; \qquad \frac{du}{d\nu} = 0, \quad u = 0 \quad \text{на } L^{(2)}$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость пластинки, ν — внешняя нормаль к L, θ — угол между ν и осью x, σ — коэффициент Пуассона, Δ — оператор Лапласа.

Эта граничная задача по известному способу может быть заменена следующей. Найти регулярное в области T решение $u(x, y)$ бигармонического уравнения

$$\Delta\Delta u = 0 \tag{1.2}$$

по граничным условиям

$$\sigma \Delta u + (1-\sigma)\left[u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy}\cos\theta\sin\theta + u_{yy}\sin^2\theta\right] = -G(w)$$

$$u = -w \quad \text{на } L^{(1)} \tag{1.3}$$

$$\frac{du}{d\nu} = -\frac{dw}{d\nu}, \quad u = -w \quad \text{на } L^{(2)} \tag{1.4}$$

причем w — некоторое частное решение уравнения (1.1). Кроме того, от искомого решения $u(x, y)$ мы будем требовать непрерывность его первых производных в $T + L$.

Будем также предполагать [1], что все частные производные функции $w(x, y)$ порядка $\leqslant 3$ непрерывны в $T + L$.

Воспользуемся теперь общим комплексным представлением регулярных в области T решений уравнения (1.2). Как известно, оно имеет вид:

$$u = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \tag{1.5}$$

где $\varphi(z)$, $\chi(z)$ — произвольные голоморфные в T функции от переменной z. Заметим, что по этой формуле решению $u = \text{const}$ соответствуют функции

$$\varphi(z) = ikz + C \qquad \chi(z) = -\bar{C}z + C_1 \tag{1.6}$$

где k — произвольная действительная постоянная, C, C_1 — произвольные комплексные постоянные, причем $u = 2\operatorname{Re} C_1$.

Отсюда, в частности, следует, что в формуле (1.5) функцию $\varphi(z)$ можно без ущерба для общности подчинить условию [2]

$$\operatorname{Im}\{\varphi'(0)\} = 0 \tag{1.7}$$

Граничные условия (1.3) и (1.4) после предварительного дифференцирования по s их вторых равенств [3] при помощи (1.5) примут вид [1,3]:

$$\operatorname{Re}\left\{(1+\sigma)\varphi'(t) + \tfrac{1}{2}(1-\sigma)\left[t\overline{\varphi''(t)} + \overline{\psi'(t)}\right]e^{-2i\theta}\right\} = -\tfrac{1}{2}G(w)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\bar{t}'\left[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}\right]\right\} = -\tfrac{1}{2}dw/ds \qquad \text{на } L^{(1)} \tag{1.8}$$

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = h(t) \qquad \text{на } L^{(2)} \tag{1.9}$$

---

[1] Это последнее требование, так же как и требование, налагаемое на границу L области T, может быть ослаблено.

[2] Предполагается, что $z = 0$ принадлежит T.

[3] Так как мы имеем в виду нахождение тех решений нашей задачи, которые удовлетворяют достаточным условиям регулярности в области $T + L$, то такая замена граничных условий может изменить решение лишь на аддитивную постоянную.

где t обозначает аффикс точки на L, отвечающей дуговой абсциссе s

$$\psi(z) = \chi'(z), \qquad h(t) = -\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{1.10}$$

Для сведения задачи к интегральным уравнениям придется брать граничные условия на $L^{(1)}$ в несколько ином виде. Именно, проинтегрируем по s первое равенство (1.8) вдоль каждой дуги L_{2k-1} и сложим со вторым его равенством, умноженным на $\frac{1}{2}(1-\sigma)$. Тогда на опертой части границы мы получим следующие условия:

$$\operatorname{Re}\left[2\overline{t'}\,\varphi(t) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{a_{2k-1}}^{t} \overline{t_1''}\,\overline{t_1'}\,[(1-2\lambda)\varphi(t_1) + t_1\overline{\varphi'(t_1)} + \overline{\psi(t_1)}]\,dt_1\right] = g_1(t) + C_{2k-1}$$

$$\operatorname{Re}\{\overline{t'}\,[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]\} = g_2(t) \qquad \text{на } L_{2k-1} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.11}$$

где C_{2k-1} — неопределенные действительные постоянные;

$$g_1(t) = -\frac{1}{2}\left[\int\limits_{l_{2k-1}}^{s} G(w)\,ds_1 + \frac{1}{\lambda}\frac{dw}{ds}\right], \quad g_2(t) = -\frac{1}{2}\frac{dw}{ds}, \quad \lambda = \frac{2}{1-\sigma} \tag{1.12}$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к определению двух голоморфных в T функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, удовлетворяющих на границе области условиям (1.9) и (1.11).

§ 2. Приведение к интегральным уравнениям. Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будем искать в следующем виде [8]:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z} \tag{2.1}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,\overline{dt}}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{t}\,\omega(t)\,dt}{(t-z)^2} \quad (z \text{ в области } T) \tag{2.2}$$

где $\omega(t)$ — искомая функция точки контура L, непрерывная в смысле Гельдера на L.

Здесь и в дальнейшем интегралы как по полному контуру, так и по его некоторой части будем брать в положительном направлении.

Подставим граничные значения функций $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\psi(z)$, определяемых предыдущими формулами, в граничные условия (1.9) и (1.11) и, кроме того, к левым частям равенств, полученных из (1.9) и второго условия (1.11), прибавим соответственно выражения [8]

$$\frac{b}{t} + \frac{\overline{b}}{\overline{t}}\left(1 - \frac{t}{\overline{t}}\right), \qquad \operatorname{Re}\left\{\overline{t'}\left[\frac{b}{t} + \frac{\overline{b}}{\overline{t}}\left(1 - \frac{t}{\overline{t}}\right)\right]\right\} \qquad (t \text{ на } L_{2k-1})$$

где b — чисто мнимая постоянная, связанная с $\omega(t)$ формулой

$$b = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \left\{\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt + \frac{\overline{\omega(t)}}{\overline{t}^2}\,\overline{dt}\right\} \tag{2.3}$$

Тогда получим следующие соотношения:

$$\frac{1}{2}\left[\overline{t_0'}\omega(t_0)+t_0'\overline{\omega(t_0)}\right]+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{2k-1}}\frac{\overline{t'}\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{t-t_0}\,dt+\sum_{1}^{2n}{}'_{2k-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_p}\frac{\overline{t'}\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{t-t_0}\,dt-$$

$$-\operatorname{Re}\left\{\int\limits_{a_{2k-1}}^{t_0}\overline{t''}\,\overline{t'}\left[\frac{\lambda-1}{\lambda}\omega(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1-t}-\frac{K(t)}{\lambda}\right]dt\right\}-K_1(t_0)=g_1(t_0)+C_{2k-1}$$

$$\frac{1}{2}\left[\overline{t_0'}\,\omega(t_0)+t_0'\,\overline{\omega(t_0)}\right]+\operatorname{Re}\left\{\overline{t_0'}\,K^*(t_0)\right\}=g_2(t_0)\qquad\text{на } L_{2k-1}\ (k=1,\ldots,n)\tag{2.4}$$

$$\omega(t_0)+K^*(t_0)=h(t_0)\qquad\text{на } L^{(2)}\tag{2.5}$$

где

$$K(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\omega(t)\,d\lg\frac{t-t_0}{\overline{t}-\overline{t_0}}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\overline{t}-\overline{t_0}},\quad K^*(t_0)=K(t_0)+\frac{b}{t_0}+\frac{\overline{b}}{\overline{t_0}}\left(1-\frac{t_0}{\overline{t_0}}\right)$$

$$K_1(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{(\overline{t'}-\overline{t_0'})\,\omega(t)-(t'-t_0')\,\overline{\omega(t)}}{t-t_0}\,dt-\frac{t_0'}{2\pi i}\int\limits_L\overline{\omega(t)}\,d\lg\frac{t-t_0}{\overline{t}-\overline{t_0}}\qquad\left(t'=\frac{dt}{ds}\right)\tag{2.6}$$

Легко заметить, что совокупность равенств (2.4), (2.5) дает для определения $\omega(t)$ систему сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами нормального типа [10]. Правая часть этой системы содержит, помимо известных функций, неопределенные постоянные C_{2k-1} $(k=1,\ldots,n)$.

Покажем теперь, что если предыдущие уравнения имеют решение [1], то необходимо $b=0$ и, следовательно, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, определяемые посредством этого решения, будут в точности удовлетворять требуемым граничным условиям. Пусть $\omega(t)$ — решение уравнений (2.4), (2.5), а $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — соответствующие этому решению голоморфные функции.

Тогда в силу (2.5) и второго равенства (2.4) будем иметь

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{t'}\left[\varphi(t)+t\,\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}+b\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\overline{t}}-\frac{t}{\overline{t}^2}\right)\right]\right\}=\operatorname{Re}\left\{\overline{t'}\,h(t)\right\}\quad\text{на } L^{(2)}$$

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{t'}\left[\varphi(t)+t\,\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}+b\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\overline{t}}-\frac{t}{\overline{t}^2}\right)\right]\right\}=g_2(t)\qquad\text{на } L^{(1)}$$

Отсюда, принимая во внимание (1.10) и (1.12), получим

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{t'}\left[\varphi(t)+t\,\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}+b\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\overline{t}}-\frac{t}{\overline{t}^2}\right)\right]\right\}=-\frac{1}{2}\frac{dw}{ds}\quad\text{на } L$$

Интегрирование по s предыдущего равенства даст

$$\operatorname{Re}\left\{\int\limits_L\left[\varphi(t)\,\overline{dt}-\overline{\varphi(t)}\,dt\right]+b\int\limits_L\left[\frac{\overline{dt}}{\overline{t}}+\frac{dt}{t}\right]+2\pi i b\right\}=0$$

---

[1] При этом у решений $\omega(t)$ предполагается достаточная регулярность, о чем речь будет идти ниже.

Отсюда и следует требуемое. Займемся теперь преобразованием равенств (2.4). Вычитая второе из первого, получим[1]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{2k-1}}\frac{\overline{t'}\,\omega(t)-t'\,\overline{\omega(t)}}{t-t_0}\,dt=\Omega(t_0)+C_{2k-1}\quad\text{на } L_{2k-1}\quad(k=1,\ldots,n)\tag{2.7}$$

где C_{2k-1} — постоянные, подлежащие определению,

$$\Omega(t_0)=-\sum_{1}^{2n}{}'_{2k-1}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_p}\frac{\overline{t'}\,\omega(t)-t'\,\overline{\omega(t)}}{t-t_0}\,dt+\operatorname{Re}\Big\{\overline{t_0'}\,K^*(t_0)+\tag{2.8}$$

$$+\int\limits_{a_{2k-1}}^{t_0}\overline{t''}\,\overline{t'}\left[\frac{\lambda-1}{\lambda}\,\omega(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1-t}-\frac{K(t)}{\lambda}\right]dt\Big\}+K_1(t_0)+g_1(t_0)-g_2(t_0)$$

Решая уравнение (2.7), как если бы правая часть была заданной функцией (с точностью до аддитивной постоянной), и принимая во внимание, что искомая функция $\omega(t)$ должна удовлетворять на L условию Гельдера, получим на основании одного результата Н. И. Мусхелишвили [11]

$$\frac{1}{2}\left[\overline{t_0'}\,\omega(t_0)-t_0'\,\overline{\omega(t_0)}\right]=\frac{R(t_0)}{\pi i}\int\limits_{L_{2k-1}}\frac{\Omega(t)\,dt}{R(t)\,(t-t_0)}\quad(t\text{ на } L_{2k-1},\ k=1,\ldots,n)\tag{2.9}$$

где

$$R(t)=\sqrt{(t-a_{2k-1})(t-a_{2k})}\tag{2.10}$$

Постоянные C_{2k-1} определяются из требования непрерывности $\omega(t)$ на L_{2k-1} в виде следующего функционала:

$$C_{2k-1}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_{2k-1}}\frac{\Omega(t)\,dt}{R(t)}\qquad(k=1,\ldots,n)$$

Если подставить (2.8) в (2.9), то среди других выражений встретится выражение вида

$$I_{2k-1,p}(t_0)=-\frac{R(t_0)}{\pi i}\int\limits_{L_{2k-1}}\frac{dt_1}{R(t_1)(t_1-t_0)}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_p}\frac{\overline{t'}\,\omega(t)-t'\,\overline{\omega(t)}}{t-t_1}\,dt\right\}(t_0\text{ на } L_{2k-1},\ p\neq 2k-1)$$

Имеем

$$I_{2k-1,p}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_p}\frac{\overline{t'}\,\omega(t)-t'\,\overline{\omega(t)}}{t-t_0}\,dt-$$

$$-\frac{R(t_0)}{\pi i}\lim_{z\to t_0}\int\limits_{L_{2k-1}}\frac{1}{R(t_1)}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_p}\frac{\overline{t'}\,\omega(t)-t'\,\overline{\omega(t)}}{t-t_1}\,dt\right\}\frac{dt_1}{t_1-z}\tag{2.11}$$

причем z обозначает точку, не расположенную на L_{2k-1}. Введя функцию

$$P_p(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_p}\frac{\overline{t'}\,\omega(t)-t'\,\overline{\omega(t)}}{t-z}\,dt$$

и замечая, что отношение $P_p(z)/R(z)$ является голоморфной функцией в любой области, не содержащей точек дуг L_{2k-1}, L_p, при помощи

[1] В связи с излагаемым ниже следует упомянуть работы Д. И. Шермана, использовавшего сингулярные уравнения для решения основной смешанной задачи плоской теории упругости (см., например, [12]).

интегральной формулы Коши[1] получим

$$\frac{1}{2\pi i R(z)}\int_{L_p}\frac{\bar t'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_{2k-1,\,p}}\frac{P_p(t)\,dt}{R(t)(t-z)} \tag{2.12}$$

где $\Lambda_{2k-1,\,p}$ обозначает совокупность двух замкнутых простых контуров Λ_{2k-1}, Λ_p, охватывающих соответственно дуги L_{2k-1}, L_p, обходящих их в направлении вращения часовой стрелки и настолько близких к ним, чтобы точка z находилась вне каждого из контуров Λ_{2k-1}, Λ_p. Принимая во внимание (2.10), а также равенство

$$P_p^+(t)-P_p^-(t)=\bar t'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}\quad \text{на } L_p$$

находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_{2k-1,\,p}}\frac{P_p(t)\,dt}{R(t)(t-z)}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_p}\frac{\bar t'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{R(t)(t-z)}\,dt+\frac{1}{\pi i}\int_{L_{2k-1}}\frac{1}{R(t_1)}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{L_p}\frac{\bar t'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{t-t_1}\,dt\right\}\frac{dt_1}{t_1-z}$$

Последнее равенство вместе с (2.12) даст

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L_{2k-1}}\frac{1}{R(t_1)}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{L_p}\frac{\bar t'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{t-t_1}\,dt\right\}\frac{dt_1}{t_1-z}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i R(z)}\int_{L_p}\frac{\bar t'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{t-z}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_p}\frac{\bar t'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{R(t)(t-z)}\,dt$$

Подставляя это выражение в (2.11) и переходя к пределу при $z\to t_0$ на L_{2k-1}, получим

$$I_{2k-1,\,p}'(t_0)=-\frac{R(t_0)}{2\pi i}\int_{L_p}\frac{\bar t'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{R(t)(t-t_0)}\,dt \tag{2.13}$$

Далее при помощи легко доказуемого равенства

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{a_{2k-1}}^{t_0}\bar t_1''\bar t_1'\,dt_1\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_1}=\int_{a_{2k-1}}^{t_0}\bar t''\bar t'\omega(t)\,dt+\frac{\bar t_0''\bar t_0'}{\pi i}\int_L\omega(t)\lg\left(1-\frac{t_0}{t}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_L\omega(t)\,dt\int_{a_{2k-1}}^{t_0}\lg\left(1-\frac{t_1}{t}\right)d(\bar t_1''\bar t_1')$$

где под $\lg(1-z/t)$ при данном t подразумевается ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$, можно написать

$$\int_{a_{2k-1}}^{t_0}\bar t''\bar t'\left[\frac{\lambda-1}{\lambda}\omega(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1-t}\right]dt=-\frac{1}{\lambda}\int_{a_{2k-1}}^{t_0}\bar t''\bar t'\,\omega(t)\,dt-$$

$$-\frac{\bar t_0''\bar t_0'}{\pi i}\int_L\omega(t)\lg\left(1-\frac{t_0}{t}\right)dt+\frac{1}{\pi i}\int_L\omega(t)\,dt\int_{a_{2k-1}}^{t_0}\lg\left(1-\frac{t_1}{t}\right)d(\bar t_1''\bar t_1') \tag{2.14}$$

[1] Здесь следует также учесть условие на бесконечности.

Преобразуем, наконец, выражение вида

$$I_{2k-1}(t_0)=\frac{R(t_0)}{\pi i}\int\limits_{2k-1}\frac{dt_1}{R(t_1)(t_1-t_0)}\int\limits_{a_{2k-1}}^{t_1}\tau(t)\,dt \qquad (t_0,\ t_1 \text{ на } L_{2k-1})$$

где $\tau(t)$ — непрерывная функция на L_{2k-1}. Аналогично равенству (2.11) напишем

$$I_{2k-1}(t_0)=-\int\limits_{a_{2k-1}}^{t_0}\tau(t)\,dt+\frac{R(t_0)}{\pi i}\lim_{z\to t_0}\int\limits_{L_{2k-1}}\frac{dt_1}{R(t_1)(t_1-z)}\int\limits_{a_{2k-1}}^{t_1}\tau(t)\,dt \tag{2.15}$$

Далее имеем

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_{2k-1}}\frac{dt_1}{R(t_1)(t_1-z)}\int\limits_{a_{2k-1}}^{t_1}\tau(t)\,dt=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_{2k-1}}\tau(t)\,dt\int\limits_{t}^{a_{2k}}\frac{dt_1}{R(t_1)(t_1-z)}$$

Предыдущее равенство можно записать и так:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_{2k-1}}\frac{dt_1}{R(t_1)(t_1-z)}\int\limits_{a_{2k-1}}^{t_1}\tau(t)\,dt=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_{2k-1}}\tau(t)\,dt\int\limits_{L_{2k-1}}\frac{\sigma(t_1,t)\,dt_1}{R(t_1)(t_1-z)} \tag{2.16}$$

где $\sigma(t_1, t)$ — функция от двух точек на L_{2k-1}, определенная следующим образом:

$$\sigma(t_1,t)=\begin{cases}0 & \text{для } s_1<s\\ 1 & \text{для } s<s_1\end{cases}$$

причем s_1, s обозначают дуговые абсциссы точек t_1 и t соответственно. Подставляя (2.16) в (2.15) и переходя к пределу при $z\to t_0$ на L_{2k-1}, получим

$$I_{2k-1}(t_0)=\frac{R(t_0)}{\pi i}\int\limits_{L_{2k-1}}\sigma(t_0,t)\,\tau(t)\,dt\int\limits_{L_{2k-1}}\frac{\sigma(t_1,t)\,dt_1}{R(t_1)(t_1-t_0)} \tag{2.17}$$

Учитывая (2.13), (2.14) и (2.17), равенство, полученное в результате подстановки выражения (2.8) в (2.9), можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\bar t_0'\omega(t_0)-t_0'\overline{\omega(t_0)}\right]&=-{\sum_{1}^{2n}}'_{2k-1}\frac{R(t_0)}{2\pi i}\int\limits_{L_p}\frac{\bar t'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{R(t)(t-t_0)}\,dt-\\&-\frac{R(t_0)}{2\pi i\lambda}\int\limits_{L_{2k-1}}\sigma(t_0,t)\,\bar t'\left[\bar t''\omega(t)+t''\overline{\omega(t)}\right]dt\int\limits_{L_{2k-1}}\frac{\sigma(t_1,t)\,dt_1}{R(t_1)(t_1-t_0)}+\\&+\frac{R(t_0)}{\pi i}\int\limits_{L_{2k-1}}\frac{K_2(t)+g_1(t)-g_2(t)}{R(t)(t-t_0)}\,dt\end{aligned} \tag{2.18}$$

где

$$\begin{aligned}K_2(t_0)=\mathrm{Re}\Big\{\bar t_0'K^*(t_0)-\frac{1}{\lambda}\int\limits_{a_{2k-1}}^{t_0}\bar t''\bar t'K(t)\,dt-\frac{\bar t_0''\bar t_0'}{\pi i}\int\limits_{L}\omega(t)\lg\left(1-\frac{t_0}{t}\right)dt+\\+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\omega(t)\,dt\int\limits_{a_{2k-1}}^{t_0}\lg\left(1-\frac{t_1}{t}\right)d\,(\bar t_1''\ \bar t_1')\Big\}+K_1(t_0)\end{aligned} \tag{2.19}$$

Имеем

$$\sum_{1}^{2n}{}'_{2k-1}\int_{L_p}\frac{\bar{t}'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{R(t)(t-t_0)}dt=\sum_{1}^{n}{}'_{k}\int_{L_{2p-1}}\frac{\bar{t}'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{R(t)(t-t_0)}dt+\int_{L^{(2)}}\frac{\bar{t}'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{R(t)(t-t_0)}dt$$

Заменим в последнем интеграле выражение $\bar{t}'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}$ его значением из (2.5) и соответствующее выражение для левой части предыдущего равенства внесем в (2.18). Полученное равенство вместе со вторым условием (2.4) и даст искомый вид уравнений на L_{2k-1} $(k=1,\ldots,n)$.

Таким образом, будем иметь

$$\begin{aligned}&\bar{t}_0{}'\omega(t_0)-t_0{}'\overline{\omega(t_0)}=M_1\{\omega(t),g(t),t_0\}\\&\bar{t}_0{}'\omega(t_0)+t_0{}'\overline{\omega(t_0)}=M_2\{\omega(t),g(t),t_0\}\qquad\text{на } L_{2k-1}\,(k=1,\ldots,n)\end{aligned}\tag{2.20}$$

где

$$M_1\{\omega(t),g(t),t_0\}=\frac{R(t_0)}{\pi i}\int_{L^{(2)}}\frac{\bar{t}'K^*(t)-t'\overline{K^*(t)}}{R(t)(t-t_0)}dt-\tag{2.21}$$

$$-\frac{R(t_0)}{\pi i}\int_{L^{(2)}}\frac{\bar{t}'h(t)-t'\overline{h(t)}}{R(t)(t-t_0)}dt+M_0\{\omega(t),g(t),t_0\}$$

$$M_0\{\omega(t),g(t),t_0\}=-R(t_0)\left\{\sum_{1}^{n}{}'_{k}\frac{1}{\pi i}\int_{L_{2p-1}}\frac{\bar{t}'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{R(t)(t-t_0)}dt+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi i\lambda}\int_{L_{2k-1}}\sigma(t_0,t)\,\bar{t}'\,[\bar{t}''\omega(t)+t''\overline{\omega(t)}]\,dt\times$$

$$\left.\times\int_{L_{2k-1}}\frac{\sigma(t_1,t)\,dt_1}{R(t_1)(t_1-t_0)}-\frac{2}{\pi i}\int_{L_{2k-1}}\frac{K_2(t)+g_1(t)-g_2(t)}{R(t)(t-t_0)}dt\right\}$$

$$M_2\{\omega(t),g(t),t_0\}=-2\mathrm{Re}\{\bar{t}_0{}'K^*(t_0)\}+2g_2(t_0)\qquad(t_0\text{ на }L_{2k-1})$$

Легко заметить, что (2.20) и (2.5) дают для определения $\omega(t)$ систему интегральных уравнений Фредгольма, эквивалентную (в смысле разыскания решений, удовлетворяющих условию Гельдера) системе (2.4), (2.5).

Замечание. Уравнения (2.20) могут быть заменены равносильными им уравнениями, имеющими более единообразную форму. Для этого запишем (2.7) в виде одного равенства следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L^{(1)}}\frac{\bar{t}'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{t-t_0}dt=\Omega^*(t_0)+C(t_0)\qquad\text{на } L^{(1)}\tag{2.22}$$

где

$$\Omega^*(t_0)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L^{(2)}}\frac{\bar{t}'\omega(t)-t'\overline{\omega(t)}}{t-t_0}dt+K_1(t_0)+g_1(t_0)-g_2(t_0)+$$

$$+\mathrm{Re}\left\{\bar{t}_0{}'K^*(t_0)+\int_{a_{2k-1}}^{t_0}\bar{t}''\bar{t}'\left[\frac{\lambda-1}{\lambda}\omega(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1-t}-\frac{K(t)}{\lambda}\right]dt\right\}$$

$$C(t_0)=C_{2k-1}$$

при t_0 на L_{2k-1} $(k=1,\ldots,n)$.

Решая (2.22), как если бы функция $\Omega^*(t)$ была заданной на $L^{(1)}$, и принимая во внимание непрерывность искомой функции $\omega(t)$ на L, получим равенство [11], заменяющее (2.9):

$$\frac{1}{2}\left[\bar{t}_0{}'\omega(t_0) - t_0{}'\bar{\omega}(t_0)\right] = \tag{2.23}$$

$$= \frac{R^*(t_0)}{\pi i}\int\limits_{L^{(1)}} \frac{\Omega^*(t)}{R^*(t)}\left\{\frac{1}{t-t_0} + \sum_1^n P_{2k-1}(t)\int\limits_{L_{2k-1}} \frac{dt_1}{R^*(t_1)(t_1-t_0)}\right\}dt \qquad \text{на } L^{(1)}$$

где $P_{2k-1}(t)$ — определенные полиномы степени не выше $n-1$;

$$R^*(t) = \left(\prod_1^n (t-a_{2k-1})(t-a_{2k})\right)^{1/2}$$

Уравнение (2.5), (2.23) и второе из (2.20)

$$\bar{t}_0{}'\omega(t_0) + t_0{}'\overline{\omega(t_0)} = M_2\{\omega(t), g(t), t_0\} \quad \text{на } L^{(1)}$$

дадут после преобразований, аналогичных приведенным выше, другую систему интегральных уравнений Фредгольма, эквивалентную системе (2.5), (2.20)

§ 3. Исследование интегральных уравнений. Полученные в предыдущем параграфе интегральные уравнения приведем к несколько иному виду, более удобному для изучения свойств их решений.

С этой целью преобразуем сперва интеграл:

$$I(t_0) = \int\limits_{L^{(2)}} \frac{dt}{R(t)(t-t_0)} \qquad (t_0 \text{ на } L_{2k-1}) \tag{3.1}$$

Имеем

$$I(t_0) = \sum_1^{2n}{}'_{2k-1}\int\limits_{L_p} \frac{dt}{R(t)(t-t_0)} - \sum_1^{n}{}'_k \int\limits_{L_{2p-1}} \frac{dt}{R(t)(t-t_0)}$$

Но, как легко видеть:

$$\sum_1^{2n}{}'_{2k-1}\int\limits_{L_p} \frac{dt}{R(t)(t-t_0)} = -\lim_{z\to t_0}\int\limits_{L_{2k-1}} \frac{dt}{R(t)(t-z)}$$

причем z — точка, не расположенная на L_{2k-1}. С другой стороны, применяя формулу Коши к функции $R(z)^{-1}$, получим [1]

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_{2k-1}} \frac{dt}{R(t)(t-z)} = \frac{1}{R(z)}$$

Последняя формула вместе с двумя предыдущими даст

$$I(t_0) = -\frac{\pi i}{R(t_0)} - \sum_1^{n}{}'_k \int\limits_{L_{2p-1}} \frac{dt}{R(t)(t-t_0)}. \tag{3.2}$$

[1] См. вывод формулы (2.13).

Введем теперь, следуя Д. И. Шерману [12], функцию $f(t)$, определенную на полной границе L следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} h(t) & \text{для } t \text{ на } L^{(2)} \\ P(t) & \text{для } t \text{ на } L^{(1)} \end{cases} \tag{3.3}$$

причем $P(t)$ обозначает полином от t, подобранный таким образом, чтобы функция $f(t)$ была непрерывной на L вместе со своими производными до второго порядка. В силу (3.1), (3.2) и (3.3) имеем

$$\frac{R(t_0)}{\pi i}\int\limits_{L^{(2)}} \frac{\bar{t}'h(t) - t'\overline{h(t)}}{R(t)(t-t_0)}\,dt = -\left[\bar{t}_0'f(t_0) - t_0'\overline{f(t_0)}\right] + N\{f(t), t_0\}$$

где

$$N\{f(t), t_0\} = R(t_0)\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L^{(2)}} \frac{[\bar{t}'f(t) - t'\overline{f(t)}] - [\bar{t}_0'f(t_0) - t_0'\overline{f(t_0)}]}{R(t)(t-t_0)}\,dt - \right.$$

$$\left. - \left[\bar{t}_0'f(t_0) - t_0'\overline{f(t_0)}\right] \sum_{1}^{n}{}_k' \frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_{2p-1}} \frac{dt}{R(t)(t-t_0)}\right\} \tag{3.4}$$

Аналогично можем написать

$$\frac{R(t_0)}{\pi i}\int\limits_{L^{(2)}} \frac{\bar{t}'K^*(t) - t'\overline{K^*(t)}}{R(t)(t-t_0)}\,dt = -\left[\bar{t}_0'K^*(t_0) - t_0'\overline{K^*(t_0)}\right] + N\{K^*(t), t_0\}$$

В силу предыдущих равенств первое уравнение (2.20) запишется так:

$$\begin{gathered} \bar{t}_0'\omega(t_0) - t_0'\overline{\omega(t_0)} = \\ = \bar{t}_0'[f(t_0) - K^*(t_0)] - t_0'[\overline{f(t_0)} - \overline{K^*(t_0)}] + M^*\{\omega(t), g(t), f(t), t_0\} \end{gathered} \tag{3.5}$$

где

$$M^*\{\omega(t), g(t), f(t), t_0\} = M_0\{\omega(t), g(t), t_0\} - N\{f(t) - K^*(t), t_0\}$$

Любое решение $\omega(t)$ интегральных уравнений (2.20), (2.5) есть непрерывная функция на кривой L, удовлетворяющая в ней условию Гельдера и имеющая абсолютно интегрируемую первую производную. В самом деле, относительно функции $\bar{t}'\omega(t) - t'\overline{\omega(t)}$ это утверждение сразу следует из (2.5), (3.5), если учесть (3.3), а также выражения (2.21) и (3.4), в силу которых $M^*\{\omega(t), g(t), f(t), t_0\}$ обращается в нуль во всех точках a_k $(k = 1, \ldots, 2n)$. Чтобы обнаружить упомянутые свойства у функции $\bar{t}'\omega(t) + t'\overline{\omega(t)}$, стоит только вспомнить равенства (1.10) и (1.12); при помощи последних из (2.5) и второго равенства (2.20) получаем

$$\mathrm{Re}\,\{\bar{t}'[\omega(t) + K^*(t)]\} = -\frac{1}{2}\frac{dw}{ds} \qquad \text{на } L$$

откуда и следует требуемое. Нетрудно также проверить, что то же самое утверждение справедливо для функции $\varphi(t)$ и $\bar{t}\varphi'(t) + \overline{\psi(t)}$ и, кроме того, существуют интегралы

$$\iint\limits_T |\varphi'(z)|^2\,dx\,dy, \qquad \iint\limits_T |z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}|^2\,dx\,dy$$

Теперь легко убедиться, что к функции $u(x, y)$, определяемой формулой

$$u = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \qquad \left(\chi(z) = \int \psi(z)\,dz\right)$$

возможно применить известное тождество для бигармонических функций (см., например, [6])

$$\int\limits_L \left[uH(u) - \frac{du}{d\nu} G(u)\right] ds =$$

$$= -\iint\limits_T \{\sigma(\Delta u)^2 + (1-\sigma)\,[(u_{xx})^2 + (u_{yy})^2 + 2(u_{xy})^2]\}\,dx\,dy$$

где

$$H(u) = \frac{d\Delta u}{d\nu} + (1-\sigma)\frac{d}{ds}\,[u_{xy}\cos 2\theta + (u_{yy} - u_{xx})\cos\theta\sin\theta]$$

Это и доказывает в данном случае справедливость теоремы единственности решения рассматриваемой граничной задачи.

Докажем теперь, что система интегральных уравнений (2.20), (2.5) имеет решение.

Пусть $\omega_0(t)$ — решение однородных интегральных уравнений, а $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — соответствующие голоморфные функции.

Тогда непрерывная в $T + L$ вместе со своими первыми производными функция $u_0(x, y)$, определяемая формулой

$$u_0 = \bar{z}\varphi_0(z) + z\overline{\varphi_0(z)} + \chi_0(z) + \overline{\chi_0(z)} \qquad \left(\chi_0(z) = \int \psi_0(z)\,dz\right)$$

будет удовлетворять граничным условиям

$$G(u_0) = \frac{du_0}{ds} = 0 \quad \text{на } L^{(1)}, \qquad \frac{du_0}{d\nu} = \frac{du_0}{ds} = 0 \quad \text{на } L^{(2)} \tag{3.6}$$

и, следовательно, в силу теоремы единственности будет постоянной в области T. Отсюда имеем в соответствии с (2.6)

$$\varphi_0(z) = ikz + C, \qquad \psi_0(z) = -\overline{C} \tag{3.7}$$

причем k и C — произвольные, соответственно действительная и комплексная, постоянные. С другой стороны, по доказанному выше $b = 0$, что в силу (2.3) в случае однородной задачи (3.6) дает

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \left\{\frac{\omega_0(t)}{t^2}\,dt + \frac{\overline{\omega_0(t)}}{\bar{t}^2}\,\overline{dt}\right\} = 0$$

Но левая часть последнего равенства представляет собой $\operatorname{Im}\{\varphi_0'(0)\}$, поэтому из (3.7) находим, что $k = 0$.

Принимая это во внимание, из (3.7), (2.1) и (2.2) будем иметь

$$C = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_0(t)\,dt}{t - z}, \qquad -\overline{C} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\omega_0(t)}\,dt}{t - z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{t}\,\omega_0'(t)\,dt}{t - z} \qquad (z \text{ в } T)$$

Из этих равенств вытекает [8], что $\omega_0(t) = 0$ на L и, значит, однородные интегральные уравнения не имеют решения.

Если при помощи единственного решения $\omega(t)$ интегральных уравнений (2.20), (2.5) мы построим по формулам (2,1), (2.2) голоморфные функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, то бигармоническая функция $u(x, y)$, определяемая равенством

$$u = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}$$

где $\chi(z)$ — некоторая первообразная функция $\psi(z)$, будет решением задачи с точностью до аддитивной постоянной. Вычитая эту постоянную из u, мы получим функцию, удовлетворяющую всем требованиям нашей задачи.

Поступила 17 XII 1951

Математический институт
Академии наук Грузинской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР. 1949.
2. Мусхелишвили Н. И. Новый общий способ решения основных контурных задач плоской теории упругости. ДАН СССР. 1934. Т. III. № 1, 2.
3. Векуа И. Н. Об изгибе пластинки со свободным краем. Сообщения АН Грузинской ССР. 1942. Т. III. № 7.
4. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ПММ. 1938. Т. II. Вып. 2.
5. Каландия А. И. Основная n-гармоническая задача для многосвязных областей. Изв. АН СССР, сер. мат. 1951. Т. XV. № 2.
6. Халилов З. И. Решение общей задачи изгиба опертой упругой пластинки. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 4.
7. Манджавидзе Г. Ф. Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применении в теории упругости. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 3.
8. Шерман Д. И. К решению плоской статической задачи упругости при заданных внешних силах. ДАН СССР. 1940. Т. XXVIII. № 1.
9. Стретт Дж. В. Теория звука. Т. I. ГИЗ. 1940.
10. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. Гостехиздат. М.—Л. 1950.
11. Мусхелишвили Н. И. Приложение интегралов типа Коши к одному классу сингулярных интегральных уравнений. Труды Тбилисского мат. ин-та. 1941. Т. X.
12. Шерман Д. И. Плоская задача теории упругости со смешанными предельными условиями. Труды сейсмологического ин-та. 1938. № 88.