Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Х. Арутюнян

(Ереван)

В работе приводятся развитие и обобщение основных результатов теории ползучести, полученных в предыдущих исследованиях [1, 2] для более широкой области изменения напряжения (т. е. и при $\sigma > {}^1/_2 R$), а именно, когда линейная связь между деформациями ползучести и соответствующим напряжением нарушается.

Как уже указывалось ранее [3, 4, 5], линейная зависимость между деформациями ползучести и соответствующими напряжениями для ряда материалов, как бетон, пластмасса и т. д., справедлива лишь для напряжений, не превышающих половины пределов их прочности R. Что же касается мгновенных деформаций, то было установлено, что в этих материалах мгновенные деформации остаются прямо пропорциональными напряжениям почти вплоть до момента разрушения [5, 6].

Таким образом, в работе материал предполагается обладающим одновременно свойством нелинейной ползучести и изменяемости во времени модуля мгновенной деформации.

При этом принимается, что для деформации ползучести имеет место закон наложения.

Последние исследования [4] показали, что закон наложения для деформации ползучести бетона хорошо подтверждается даже при напряжениях σ, превышающих половину временного сопротивления R в случае монотонно изменяющихся нагрузок, т. е. для активной деформации.

§ 1. Связь между напряжениями и деформациями при нелинейной ползучести. А. *Продольная деформация.* Полную относительную деформацию бетонного бруса к моменту времени t, находящегося под действием единичного нормального напряжения, приложенного в некотором возрасте τ, как и прежде [1], будем определять зависимостью

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \tag{1.1}$$

Допустим теперь, что к бетонному брусу в момент времени, совпадающий с возрастом $\tau = \tau_1$, было приложено напряжение $\sigma_x = \sigma_x(\tau_1)$, которое в последующее время $t > \tau_1$ сохраняется постоянным: $\sigma_x(\tau_1) = \text{const}$.

Тогда будем иметь

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(\tau_1)}{E(\tau_1)} + F[\sigma_x(\tau_1)]\, C(t, \tau_1) \tag{1.2}$$

где $F[\sigma_x(\tau_1)]$ — некоторая функция от места $\sigma_x(\tau_1)$, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного бетона, определенная из опыта.

При этом, как было указано, для бетона имеет место соотношение

$$F(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{при} \quad \sigma \leqslant {}^1/_2 R \\ f(\sigma) & \text{при} \quad \sigma \geqslant {}^1/_2 R \end{cases} \tag{1.3}$$

напряжённое состояние

где R — временное сопротивление бетона, причем очевидно, что

$$f\left(\tfrac{1}{2} R\right) = \tfrac{1}{2} R \tag{1.4}$$

Если положить, что мера ползучести бетона $C(t, \tau)$ и модуль его мгновенной деформации $E(\tau)$ не зависят от возраста

$$E(\tau) = E_0, \qquad C(t, \tau) = \psi(t)$$

т. е. не учитывать процесса старения материала, а функция $\omega(\sigma)$ является степенной функцией вида $\omega(\sigma) = \sigma^m$, где m — постоянное число, то выражение (1.2) примет вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + \sigma^m \psi(t) \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) известно в теории ползучести как зависимость, на которой базируется так называемая теория старения[1].

Здесь следует отметить, что соотношение (1.5) справедливо при постоянных напряжениях, однако часто многие авторы распространяют его на случай нагрузок, изменяющихся во времени. Такая ошибочная трактовка уравнения (1.5) может привести к ложным результатам.

Рассмотрим случай, когда в момент времени $\tau = \tau_1$ к бетонному брусу приложено напряжение $\sigma_x = \sigma_x(t)$, которое меняется с течением времени. Тогда на основании соотношения (1.2) и принципа наложения полная относительная деформация выразится зависимостью

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(\tau_1)}{E(\tau_1)} + F[\sigma_x(\tau_1)]\, C(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^{t} \frac{1}{E(\tau)} \frac{\partial \sigma_x(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{\tau_1}^{t} C(t, \tau) \frac{\partial F[\sigma_x(\tau)]}{\partial \tau} d\tau \tag{1.6}$$

Интегрируя последнее слагаемое соотношения (1.6) по частям, получим

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right] d\tau - \int_{\tau_1}^{t} F[\sigma_x(\tau)] \frac{dC(t, \tau)}{d\tau} d\tau \tag{1.7}$$

Принимая во внимание условие (1.3), получаем, что при $\sigma_x(t) \leqslant \frac{1}{2} R$ соотношение (1.7) обращается в зависимость

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)\right] d\tau \tag{1.8}$$

подробно исследованную в предыдущих работах.

[1] Отметим, что теория «старения», которая излагается в различных работах, посвященных вопросам ползучести, не имеет никакого отношения к явлению старения материалов [7].

При $\sigma_x > \frac{1}{2} R$ соотношение (1.7) принимает вид:

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t)} - \int\limits_{\tau_1}^{t} \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right] d\tau - \int\limits_{\tau_1}^{t} f[\sigma_x(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial\tau} d\tau \tag{1.9}$$

при всех значениях t.

Полученное соотношение (1.9) представляет собой основное уравнение теории нелинейной ползучести, когда одновременно учитываются наследственность и процесс старения материала.

При этом уравнение (1.9) справедливо для напряжения в диапазоне от нуля до R. ‖ ?

Как показывают опыты [6], мера ползучести бетона для растяжения и сжатия почти одинакова, поэтому уравнение (1.9), будучи справедливым для деформации сжатия $\sigma > 0$, может быть применено также к деформации растяжения, только в этом случае нужно в уравнение (1.9) вместо σ положить $-\sigma$ и $\omega(-\sigma) = -\omega(\sigma)$, т. е. в области отрицательных значений σ функция $\omega(\sigma)$ продолжается нечетным образом. Как понять это?

Б. *Поперечная деформация.* Пусть к бетонному брусу в возрасте $\tau = \tau_1$ в продольном направлении было приложено напряжение $\sigma_x(t) = \sigma_x(\tau_1)$, которое в последующее время $t \geqslant \tau_1$ остается постоянным. Тогда деформации в поперечном направлении могут быть разделены на две части: упруго-мгновенную, равную $\nu_1(\tau_1)\, \sigma_x(\tau_1) / E(\tau_1)$, и деформацию ползучести, равную $\nu_2(t, \tau_1) f[\sigma_x(\tau_1)]\, C(t, \tau_1)$.

Полная поперечная деформация будет

$$-\varepsilon_y(t) = -\varepsilon_z(t) = \nu_1(\tau_1) \frac{\sigma_x(\tau_1)}{E(\tau_1)} + \nu_2(t, \tau_1) f[\sigma_x(\tau_1)]\, C(t, \tau_1) \tag{1.10}$$

Если осевое напряжение $\sigma_x(t)$, приложенное к брусу в возрасте бетона $\tau = \tau_1$, меняется с течением времени, для поперечных деформаций будем иметь следующее выражение:

$$\varepsilon_y(t) = \varepsilon_z(t) = -\frac{\nu_1(t)}{E(t)} \sigma_x(t) + \int\limits_{\tau_1}^{t} \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \frac{1}{E(\tau)} d\tau + \int\limits_{\tau_1}^{t} f[\sigma_x(\tau)] \frac{\partial}{\partial\tau}[\nu_2(t, \tau)\, C(t, \tau)]\, d\tau \tag{1.11}$$

В. *Деформация сдвига.* Деформацию сдвига, так же как и осевую деформацию, можно разделить на две части: упруго-мгновенную и деформацию ползучести. В этом случае полная относительная деформация сдвига будет

$$\gamma_{xy}(t) = \frac{\tau_{xy}(\tau_1)}{G(\tau_1)} + f[\tau_{xy}(\tau_1)]\, \omega(t, \tau_1) \qquad \left(G(\tau) = \frac{E(\tau)}{2[1 + \nu_1(\tau_1)]}\right) \tag{1.12}$$

где $G(\tau)$ — мгновенный модуль сдвига, $\omega(t, \tau)$ — мера ползучести при чистом сдвиге для данного бетона.

Если тангенциальное напряжение $\tau_{xy}(t)$, приложенное в возрасте $\tau=\tau_1$, меняется в течение времени, то для полной относительной деформации сдвига получим следующее выражение:

$$\gamma_{xy}(t)=\frac{\tau_{xy}(t)}{G(t)}-\int_{\tau_1}^{t}\tau_{xy}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{G(\tau)}\,d\tau-\int_{\tau_1}^{t}f[\tau_{xy}(\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}\omega(t,\tau)\,d\tau \quad (1.13)$$

Таким образом, деформация ползучести в бетоне, когда она рассматривается как нелинейный процесс, характеризуется тремя физическими характеристиками: мерами ползучести $C(t,\tau)$ и $\omega(t,\tau)$ для одноосного напряженного состояния и чистого сдвига и коэффициентом поперечного сжатия $\nu_2(t,\tau)$ для неупругой части деформации.

Однако все эти три функции связаны между собой аналитической зависимостью, совершенно аналогичной, как это имеет место при линейных процессах ползучести.

В самом деле, в случае чистого сдвига в плоскости xy при действии постоянных тангенциальных усилий $\tau_{xy}(\tau_1)$ главные напряжения будут

$$\sigma_x(\tau_1)=\tau_{xy}(\tau_1),\qquad \sigma_y(\tau_1)=-\tau_{xy}(\tau_1),\qquad \sigma_z(\tau_1)=0 \quad (1.14)$$

Относительная деформация сдвига согласно (1.12) есть

$$\gamma_{xy}(t)=\frac{\tau_{xy}(\tau_1)}{G(\tau_1)}+f[\tau_{xy}(\tau_1)]\,\omega(t,\tau_1) \quad (1.15)$$

Относительное удлинение диагонали выделенного элемента в силу (1.2) и (1.10) будет

$$\varepsilon_x(t)=\frac{\sigma_x(\tau_1)}{E(\tau_1)}+f[\sigma_x(\tau_1)]\,C(t,\tau_1)-\frac{\sigma_y(\tau_1)+\sigma_z(\tau_1)}{E(\tau_1)}\nu_1(\tau_1)-$$
$$-\{f[\sigma_y(\tau_1)]+f[\sigma_z(\tau_1)]\}\,\nu_2(t,\tau_1)\,C(t,\tau_1) \quad (1.16)$$

Подставляя значение $\sigma_x(\tau_1)$, $\sigma_y(\tau_1)$ и $\sigma_z(\tau_1)$ из (1.14) в (1.16) и замечая, что $f[-\sigma]=f[\sigma]$, получим

$$\varepsilon_x(t)=\frac{\tau_{xy}(\tau_1)}{2G(\tau_1)}+f[\tau_{xy}(\tau_1)]\,C(t,\tau_1)\,[1+\nu_2(t,\tau_1)] \quad (1.17)$$

Пользуясь известной геометрической зависимостью

$$\varepsilon_x(t)=\frac{1}{2}\gamma_{xy}(t) \quad (1.18)$$

которая должна выполняться при чистом сдвиге для любых значений t, получим аналитическую зависимость между мерами ползучести $C(t,\tau)$, $\omega(t,\tau)$ и $\nu_2(t,\tau)$:

$$\omega(t,\tau)=2\,[1+\nu_2(t,\tau)]\,C(t,\tau) \quad (1.19)$$

Г. *Объемное напряженное состояние.* Пользуясь соотношениями (1.9), (1.11) и (1.13), можно получить основные зависимости для случая пространственного напряженного состояния, если, следуя Ю. Н. Работнову [8], воспользоваться теорией малых упруго-пластических деформаций.

Зависимость между напряжениями и деформациями в теории малых упруго-пластических деформаций, когда сжимаемостью материала можно пренебречь, дается формулами

$$
\begin{aligned}
\sigma_x - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy} \\
\sigma_y - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_y, & \tau_{xz} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xz} \\
\sigma_z - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_z, & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{yz}
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Здесь $\sigma = \frac{1}{3}[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z]$, а σ_i и ε_i — интенсивности тензора напряжения и тензора деформации, равные

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left({\tau_{xy}}^2 + {\tau_{yz}}^2 + {\tau_{zx}}^2\right)}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\left({\gamma_{xy}}^2 + {\gamma_{yz}}^2 + {\gamma_{zx}}^2\right)}$$

Если считать, что интенсивности напряжения σ_i и деформации ε_i при объемном напряженном состоянии связаны между собой той же зависимостью, что и напряжения и деформации в одномерной задаче, а именно

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\sigma_i(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_i(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{E(\tau)}\,d\tau - \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_i(\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}C(t, \tau)\,d\tau \tag{1.21}$$

то, присоединяя это соотношение с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
\sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy}\cos(ny) + \tau_{xz}\cos(nz) &= F_{nx} \\
\tau_{xy}\cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) + \tau_{yz}\cos(nz) &= F_{ny} \\
\tau_{xz}\cos(nx) + \tau_{yz}\cos(ny) + \sigma_z \cos(nz) &= F_{nz}
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

к уравнениям (1.20), приходим к полной системе уравнений нелинейной теории ползучести, выраженной в напряжениях, при сложном напряженном состоянии.

§ 2. Приведение интегральных соотношений теории ползучести к дифференциальным уравнениям. Будем определять меру ползучести бетона при одноосном напряженном состоянии, как и прежде [1], функцией вида

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right] \tag{2.1}$$

Здесь $\varphi(\tau)$ — некоторая функция только возраста, определяемая из опыта и характеризующая процесс старения данного бетона.

Тогда интегральное уравнение (1.19), связывающее напряжение $\sigma_x(t)$ с учетом ползучести бетона и изменяемости его модуля мгновенной деформации с соответствующей деформацией $\varepsilon_x(t)$, примет вид

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_x(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{E(\tau)}\,d\tau - \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma(\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right]d\tau \tag{2.2}$$

Дифференцируя уравнение (2.2) по t, получим

$$\varepsilon_x'(t) = \frac{\sigma_x'(t)}{E(t)} + \gamma\varphi(t) f[\sigma_x(t)] - \gamma \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_x(\tau)]\,[\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)]\, e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \quad (2.3)$$

Исключая последний интеграл из (2.3) и (2.5) и дифференцируя полученный результат еще раз по t, получим дифференциальное уравнение

$$\sigma_x''(t) + \sigma_x'(t)\left[\gamma - \frac{E'(t)}{E^2(t)}\right] + \gamma E(t)\,\varphi(t)\, f'[\sigma_x(t)]\,\sigma_x'(t) = E(t)\,[\varepsilon_x''(t) + \gamma\varepsilon_x'(t)] \quad (2.4)$$

с начальными условиями при $t = \tau_1$

$$\sigma_x(\tau_1) = E(\tau_1)\,\varepsilon_x(\tau_1)$$

$$\sigma_x'(\tau_1) = \varepsilon_x'(\tau_1)\,E(\tau_1) - \gamma E(\tau_1)\,\varphi(\tau_1)\, f[\varepsilon_x(\tau_1)\,E(\tau_1)] \quad (2.5)$$

Если модуль мгновенной деформации бетона изменяется во времени незначительно и его можно считать постоянным, то уравнение (2.4) примет вид:

$$\sigma_x''(t) + \gamma\sigma_x'(t) + \gamma E_0\varphi(t)\, f'[\sigma_x(t)]\,\sigma_x'(t) = E_0\,[\varepsilon_x''(t) + \gamma\varepsilon_x'(t)] \quad (2.6)$$

Начальные же условия будут

$$\sigma_x(\tau_1) = E_0\varepsilon_x(\tau_1)$$

$$\sigma_x'(\tau_1) = E_0\varepsilon_x'(\tau_1) - \gamma E_0\varphi(\tau_1)\, f[E_0\varepsilon_x(\tau_1)] \quad (2.7)$$

Если в соотношении (2.6) заменить функцию $\varphi(t)$ ее предельным значением $\varphi(\infty) = C_0$, то полученное уравнение будет характеризовать состояние ползучести для старого и стареющего бетона.

В этом случае согласно (2.6), принимая во внимание второе из условий (2.7), будем иметь

$$\sigma_x'(t) + \gamma\sigma_x(t) - \gamma E_0 C_0 f[\sigma_x(t)] = E_0\,[\varepsilon_x'(t) + \gamma\varepsilon_x(t)] \quad (2.8)$$

с начальным условием

$$\sigma_x(\tau_1) = E_0\varepsilon_x(\tau_1) \quad (2.9)$$

Перепишем уравнение (2.8) в следующем виде:

$$\frac{\sigma_x'(t)}{E_0} + \gamma\frac{\sigma_x(t)}{E_0} + \gamma C_0 f[\sigma_x(t)] = \varepsilon_x'(t) + \gamma\varepsilon_x(t) \quad (2.10)$$

Если в этом уравнении отбросить слагаемые, относящиеся к скорости упругой деформации, считая ее малой по сравнению с деформацией ползучести при больших значениях t, то будем иметь

$$\varepsilon_x^{\circ\prime}(t) + \gamma\varepsilon_x^{\circ}(t) = \gamma C_0 f[\sigma_x(t)] + \gamma\frac{\sigma_x(t)}{E_0} \quad (2.11)$$

или

$$\varepsilon_x^{\circ}(t) = \frac{\gamma}{E_0}\int_{\tau_1}^{t} \{\sigma_x(\tau) + C_0 E_0 f[\sigma_x(\tau)]\}\, e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \quad (2.12)$$

Если в уравнении (2.10) пренебречь как скоростью, так и величиной упругой деформации при больших значениях t, то будем иметь

$$\varepsilon_x^\circ(t) = \gamma C_0 \int\limits_{\tau_1}^{t} f[\sigma(\tau)]\, e^{-\gamma(t-\tau)}\, d\tau \tag{2.13}$$

Здесь $\varepsilon_x^\circ(t)$ — деформация ползучести при больших значениях t.

Соотношение (2.12), так же как и (2.13), представляет собой уравнение установившейся ползучести бетона, понимаемой в более общем смысле; это уравнение справедливо вообще при постоянстве внешней нагрузки.

Таким образом, под действием постоянной нагрузки напряженное состояние тела, обладающего свойством ползучести, монотонно изменяется от своего начального упругого состояния (при $t=\tau_1$), приближаясь к состоянию установившейся ползучести (при $t=\infty$).

Очень часто состояние ползучести, близкое к установившемуся, практически наступает по прошествии известного промежутка времени, и если этот промежуток мал по сравнению с длительностью работы рассматриваемого элемента сооружения, то изучение напряженного состояния последнего можно проводить, основываясь на уравнении установившейся ползучести (2.12) или уравнении (2.13).

Положим, что $f[\sigma]$ (индексы для простоты будем в дальнейшем опускать) является степенной функцией вида

$$f[\sigma] = \sigma + \beta\sigma^2 \tag{2.14}$$

и характерна тем, что обладает слабой нелинейностью, т. е. параметр β является малым. Подставляя значение $f[\sigma]$ из (2.14) в (2.4), приведем последнее к следующему виду:

$$\sigma''(t) + \sigma'(t)\left\{\gamma\,[1 + E(t)\,\varphi(t)] - \frac{E'(t)}{E^2(t)}\right\} + 2\beta\gamma\varphi(t)\,\sigma(t)\,\sigma'(t) =$$
$$= E(t)\,[\varepsilon''(t) + \gamma\varepsilon'(t)] \tag{2.15}$$

При постоянном модуле мгновенных деформаций уравнение (2.15) примет вид:

$$\sigma''(t) + \sigma'(t)\,\gamma\,[1 + E_0\varphi(t)] + 2\beta\gamma E_0\varphi(t)\,\sigma'(t)\,\sigma(t) = E_0\,[\varepsilon''(t) + \gamma\varepsilon'(t)] \tag{2.16}$$

Для состояния ползучести при старом или стареющем возрасте бетона согласно (2.8) и (2.14) получим следующее уравнение[1]:

$$\sigma'(t) + a\sigma(t) + b\sigma^2(t) = E_0[\varepsilon'(t) + \gamma\varepsilon(t)] \tag{2.17}$$

где

$$a = \gamma\,[1 + E_0 C_0], \qquad b = \beta\gamma E_0 C_0$$

Уравнение (2.17) представляет собой обобщенное уравнение Риккати и может быть представлено в виде

$$\frac{d^2u}{dt^2} + au = bE_0\,[\varepsilon'(t) + \gamma\varepsilon(t)] \qquad \left(\sigma(t) = \frac{u'(t)}{ub}\right) \tag{2.18}$$

---

[1] Можно показать, что решение уравнения (2.17) представляет асимптотическое решение уравнения (2.16) при достаточно больших t.

§ 3. Интегрирование уравнения теории нелинейной ползучести. Запишем основное уравнение (2.16) теории нелинейной ползучести в виде

$$\sigma''(t)+\sigma'(t)\gamma[1+E_0\varphi(t)]+2\beta\gamma E_0\varphi(t)\sigma'(t)\sigma(t)=E_0\frac{d}{dt}[\varepsilon'(t)+\gamma\varepsilon(t)] \tag{3.1}$$

где

$$\beta<1,\qquad \varphi(t)=\frac{A_1}{t}+C_0$$

Это уравнение и будет предметом рассмотрения в настоящем параграфе.

Ввиду того что оно содержит малый параметр β, естественно искать решение $\sigma(t)$ в виде ряда по степеням β.

Пусть требуется найти решение уравнения (3.1) с точностью до величины порядка β^{n+1}. Тогда, полагая

$$\begin{aligned}\sigma(t)&=a_0(t)+\beta a_1(t)+\beta^2a_2(t)+\cdots+\beta^n a_n(t)\\ \sigma'(t)&=a_0'(t)+\beta a_1'(t)+\beta^2a_2'(t)+\cdots+\beta^n a_n'(t)\\ \sigma''(t)&=a_0''(t)+\beta a_1''(t)+\beta^2a_2''(t)+\cdots+\beta^n a_n''(t)\end{aligned} \tag{3.2}$$

подставляя эти выражения в левую часть уравнения (3.1), и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях параметра β, получим следующую систему уравнений:

$$a_0''(t)+a_0'(t)\gamma[1+E_0\varphi(t)]=E_0\frac{d}{dt}[\varepsilon'(t)+\gamma\varepsilon(t)] \tag{3.3}$$

$$a_1''(t)+a_1'(t)\gamma[1+E_0\varphi(t)]=-2\gamma E_0\varphi(t)a_0(t)a_0'(t)$$

$$a_2''(t)+a_2'(t)\gamma[1+E_0\varphi(t)]=-2\gamma E_0\varphi(t)[a_0(t)a_1'(t)+a_1(t)a_0'(t)]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n''(t)+a_n'(t)\gamma[1+E_0\varphi(t)]=-2\gamma E_0\varphi(t)[a_0(t)a_{n-1}'(t)+$$
$$+a_1(t)a_{n-2}'(t)+\cdots+a_{n-1}(t)a_0'(t)]$$

Начальные условия при $t=\tau_1$ согласно (2.7) и (3.2) могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned}&a_0(\tau_1)=E_0\varepsilon(\tau_1), && a_i(\tau_1)=0 \quad (i=1,\ldots,n)\\ &a_0'(\tau_1)=E_0\varepsilon'(\tau_1)-\gamma E_0\varphi(\tau_1)f[E_0\varepsilon(\tau_1)], && a_i'(\tau_1)=0 \quad (i=1,\ldots,n)\end{aligned} \tag{3.4}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}g(t)&=E_0[\varepsilon'(t)+\gamma\varepsilon(t)]\\ v(t)&=\gamma[1+E_0\varphi(t)]\end{aligned} \tag{3.5}$$

Тогда первое из уравнений (3.4) примет вид:

$$a_0''(t)+v(t)a_0'(t)=g'(t) \tag{3.6}$$

решение которого есть

$$a_0'(t) = E_0\varepsilon'(t) + E_0\varepsilon(t)[\gamma - \eta'(t)] - e^{-\eta(t)}\Big\{E_0\varepsilon(\tau_1)[\gamma - \eta'(\tau_1)] +$$

$$+ \gamma E_0\varphi(\tau_1) f[E_0\varepsilon(\tau_1)] + E_0\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon(x)[\gamma\eta'(x) - \eta''(x)]e^{\eta(x)}dx -$$

$$- E_0\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon(x)[\eta'(x)]^2 e^{\eta(x)}dx\Big\} \tag{3.7}$$

Здесь

$$\eta(t) = \gamma\int_{\tau_1}^{t}[1 + \varphi(\tau)E_0]d\tau, \qquad \eta'(t) = \gamma[1 + E_0\varphi(t)], \qquad \eta(\tau_1) = 0 \tag{3.8}$$

Интегрируя выражение (3.7) еще раз и пользуясь начальными условиями (3.4), получим

$$a_0(t) = E_0\varepsilon(t) + E_0\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon(x)[\gamma - \eta'(x)]dx -$$

$$-\{E_0\varepsilon(\tau_1)[\gamma - \eta'(\tau_1)] + \gamma E_0\varphi(\tau_1)f[E_0\varepsilon(\tau_1)]\}\int_{\tau_1}^{t}e^{-\eta(x)}dx -$$

$$- E_0\int_{\tau_1}^{t}e^{-\eta(z)}dz\int_{\tau_1}^{z}\varepsilon(x)[\gamma\eta'(x) - \eta''(x)]e^{\eta(x)}dx +$$

$$+ E_0\int_{\tau_1}^{t}e^{-\eta(z)}dz\int_{\tau_1}^{z}\varepsilon(x)[\eta'(x)]^2e^{\eta(x)}dx \tag{3.9}$$

Если принять для $\varphi(\tau)$ выражение

$$\varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0$$

то согласно (3.8) будем иметь

$$\eta(t) = r(t - \tau_1) + p\ln\frac{t}{\tau_1}, \qquad \eta'(t) = r + \frac{p}{t}, \qquad \eta''(t) = -\frac{p}{t^2} \tag{3.10}$$

где

$$r = \gamma[1 + E_0C_0], \qquad p = \gamma E_0A_1$$

Пользуясь соотношениями (3.10), выражение (3.9) после некоторых преобразований приведем к виду

$$a_0(t) = E_0\varepsilon(t) - E_0\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon(z)\Big(\gamma E_0C_0 + \frac{p}{z}\Big)dz - E_0\Big\{\gamma\Big(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0\Big)f[E_0\varepsilon(\tau_1)] -$$

$$- \varepsilon(\tau_1)\Big(\gamma E_0C_0 + \frac{p}{\tau_1}\Big)\Big\}e^{r\tau_1}\tau_1^p\int_{\tau_1}^{t}\frac{e^{-rz}}{z^p}dz + E_0\int_{\tau_1}^{t}\frac{e^{-rz}}{z^p}dz\int_{\tau_1}^{z}\varepsilon(x)\Big(r + \frac{p}{x}\Big)^2x^pe^{rx}dx -$$

$$- E_0\int_{\tau_1}^{t}\frac{e^{-rz}}{z^p}dz\int_{\tau_1}^{z}\varepsilon(x)\Big[\gamma\Big(r + \frac{p}{x}\Big) + \frac{p}{x^2}\Big]x^pe^{rx}dx \tag{3.11}$$

Меняя порядок интегрирования в соотношении (3.11) и пользуясь ранее введенными обозначениями функции влияния [1] $\Phi(rt,\ p)$, получим

$$a_0(t) = E_0\varepsilon(t) - E_0\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon(z)\left(\gamma E_0 C_0 + \frac{p}{z}\right)dz - E_0\left\{\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0\right)f\left[E_0\varepsilon(\tau_1)\right] - \right.$$

$$\left. - \varepsilon(\tau_1)\left(\gamma E_0 C_0 + \frac{p}{\tau_1}\right)\right\}\frac{e^{r\tau_1}\tau_1^{\ p}}{r^{1-p}}\left[\Phi(rt,\ p) - \Phi(r\tau_1,\ p)\right] +$$

$$+ \frac{E_0\Phi(rt,\ p)}{r^{1-p}}\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon(x)\left(r + \frac{p}{x}\right)^2 x^p e^{rx}\,dx - \frac{E_0}{r^{1-p}}\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon(x)\left(r + \frac{p}{x}\right)^2 x^p e^{rx}\Phi(rx,\ p)\,dx -$$

$$- \frac{E_0\Phi(rt,\ p)}{r^{1-p}}\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon(x)\left[\gamma\left(r + \frac{p}{x}\right) + \frac{p}{x^2}\right]x^p e^{rx}\,dx +$$

$$+ \frac{E_0}{r^{1-p}}\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon(x)\left[\gamma\left(r + \frac{p}{x}\right) + \frac{p}{x^2}\right]x^p e^{rx}\Phi(rx,\ p)\,dx \tag{3.12}$$

где

$$\Phi(x,\ p) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^p}\,dt$$

Для $a_0'(t)$ согласно (3.7) находим

$$a_0'(t) = E_0\varepsilon'(t) - E_0\varepsilon(t)\left(\gamma E_0 C_0 + \frac{p}{t}\right) - \tag{3.13}$$

$$- E_0\left\{\gamma\left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0\right)f\left[E_0\varepsilon(\tau_1)\right] - \varepsilon(\tau_1)\left(\gamma E_0 C_0 + \frac{p}{\tau_1}\right)\right\}e^{-r(t-\tau_1)}\frac{\tau_1^{\ p}}{\tau^p} +$$

$$+ E_0\frac{e^{-rt}}{t^p}\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon(x)\left(r + \frac{p}{x}\right)^2 x^p e^{rx}\,dx - E_0\frac{e^{-rt}}{t^p}\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon(x)\left[\gamma\left(r + \frac{p}{x}\right) + \frac{p}{x^2}\right]x^p e^{rx}\,dx$$

Перейдем к нахождению последующих приближений $a_1(t), \ldots, a_n(t)$, причем в дальнейшем будем ограничиваться первым приближением, т. е. будем искать решение в форме (3.2) для $\sigma(t)$ с ошибкой порядка малости β^2. Приближения более высокого порядка приводят к быстро усложняющимся формулам, затрудняющим их практическое использование. С другой стороны, первое приближение во многих случаях дает ту же качественную картину процесса ползучести в рассматриваемом теле, что и приближения сколь угодно высокого порядка.

Согласно (3.3) для определения n-го приближения имеем

$$a_n''(t) + a_n'(t)\,v(t) = g_n(t) \tag{3.14}$$

где

$$g_n(t) = -2\gamma E_0\varphi(t)\left[a_{n-1}'(t)\,a_0(t) + a_1(t)\,a_{n-2}'(t) + \cdots + a_{n-1}(t)\,a_0'(t)\right] \tag{3.15}$$

Начальные условия имеют вид:

$$a_n(\tau_1) = a_n'(\tau_1) = 0 \tag{3.16}$$

Интегрируя (3.14) при начальных условиях (3.16), находим

$$a_n'(t) = -2\gamma E_0 \frac{e^{-rt}}{t^p}\int_{\tau_1}^{t} e^{rz}z^p\left(\frac{A_1}{z}+C_0\right)[a_0(z)\,a_{n-1}'(z)+a_1(z)\,a_{n-2}'(z)+ \\ +\cdots+a_{n-1}(z)\,a_0'(z)]\,dz$$

$$a_n(t) = -2\gamma E_0\int_{\tau_1}^{t}\frac{e^{-rz}}{z^p}\,dz\int_{\tau_1}^{z} e^{rx}x^p\left(\frac{A_1}{x}+C_0\right)[a_0(x)\,a_{n-1}'(x)+ \\ +a_1(x)\,a_{n-2}'(x)+\cdots+a_{n-1}(x)\,a_0'(x)]\,dx \tag{3.17}$$

Отсюда, пользуясь функцией влияния и меняя порядок интегрирования, получим

$$a_n(t) = -\frac{2\gamma E_0}{r^{1-p}}\left\{\Phi(rt,\ p)\int_{\tau_1}^{t} e^{rx}x^p\left(\frac{A_1}{x}+C_0\right)[a_0(x)\,a_{n-1}'(x)+\cdots+ \right. \\ +a_{n-1}(x)\,a_0'(x)]\,dx-\int_{\tau_1}^{t} e^{rx}x^p\left(\frac{A_1}{x}+C_0\right)\Phi(rx,\ p)\,[a_0(x)\,a_{n-1}'(x)+ \\ \left.+\cdots+a_{n-1}(x)\,a_0'(x)]\,dx\right\} \tag{3.18}$$

Для первого приближения из (3.17) и (3.18) имеем следующие формулы:

$$a_1'(t) = -\frac{2\gamma E_0 e^{-rt}}{r^p}\int_{\tau_1}^{t} e^{rz}z^p\left(\frac{A_1}{z}+C_0\right)a_0(z)\,a_0'(z)\,dz \tag{3.19}$$

$$a_1(t) = -\frac{2\gamma E_0}{r^{1-p}}\left\{\Phi(rt,\ p)\int_{\tau_1}^{t} e^{rx}x^p\left(\frac{A_1}{x}+C_0\right)a_0(x)\,a_0'(x)\,dx-\right. \\ \left.-\int_{\tau_1}^{t} e^{rx}x^p\left(\frac{A_1}{x}+C_0\right)\Phi(rx,\ p)\,a_0(x)\,a_0'(x)\,dx\right\} \tag{3.20}$$

Интегралы, посредством которых определены первые приближения $a_1(t)$ и $a_1'(t)$, имеют такой же вид, как и интегралы, которые рассмотрены в работе [2]; поэтому к этим интегралам могут быть применены указанные в ней оценки.

Следует отметить, что формулы (3.12) и (3.19) для $a_0(t)$, $a_1(t)$, ..., $a_n(t)$ содержат такие члены, которые в некоторых случаях могут бесконечно расти при $t \to \infty$. В силу наличия таких членов ошибка, происходящая от подстановки в дифференциальное уравнение (3.1) этих приближений, хотя при фиксированном t и убывают вместе с β как β^n, но неравномерно по отношению к t.

Поэтому область применения формул, полученных при помощи метода разложения по малому параметру β, необходимо ограничить не очень большим интервалом времени.

Для больших значений времени t удобнее пользоваться решением уравнения (2.17).

§ 4. Примеры. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим некоторые простейшие задачи теории ползучести бетона. При этом будем пользоваться уравнениями установившейся ползучести (2.13) или уравнением (2.17), решение которого при больших значениях t будет представлять асимптотическое решение основного уравнения ползучести (3.1).

А. *Чистый изгиб.* Для простоты предполагаем, что поперечное сечение бетонного бруса симметрично относительно плоскостей yx, zx (ось x направлена по оси стержня, а y и z — по главным осям инерции сечения). Пусть изгибающий момент M действует в плоскости yx. Обозначим через $b(y)$ ширину профиля поперечного сечения, через h — его максимальную высоту, y — координату, отсчитываемую от нейтральной оси и меняющуюся в промежутке от $-{}^1/_2\,h$ до $+{}^1/_2\,h$. Принимая гипотезу плоских сечений, имеем

$$\varepsilon_x = ky, \qquad \frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{dk}{dt}y \tag{4.1}$$

Здесь k — кривизна оси бруса. Будем исходить из зависимости

$$\varepsilon_x'(t) + \gamma\varepsilon_x(t) = C_0\gamma f(\sigma_x) \tag{4.2}$$

В силу (4.1) имеем

$$\dot{k}y + \gamma ky = \gamma C_0 f(\sigma_x) \qquad \left(\dot{k} = \frac{dk}{dt}\right) \tag{4.3}$$

Здесь $\dot{k}$ — установившаяся скорость изменения кривизны. Разрешая это уравнение относительно σ_x, находим

$$\sigma_x = f^*\left(\frac{\dot{k}y + \gamma ky}{\gamma C_0}\right) \tag{4.4}$$

Здесь $f^*(\xi)$ — обратная функция $f(\xi)$. Положим, что $f^*(\xi)$ является степенной функцией (или полиномом; в этом случае его можно рассматривать как сумму степенных функций). Тогда будет иметь место следующее очевидное равенство:

$$\sigma_x = f^*\left(\frac{\dot{k} + \gamma k}{\gamma C_0}\right) f^*(y) \tag{4.5}$$

Согласно уравнению равновесия имеем

$$2\int_0^{{}^1/_2 h} \sigma_x y b(y)\,dy = M \tag{4.6}$$

Внося сюда σ_x, получим

$$f^*\left(\frac{\dot{k} + \gamma k}{\gamma C_0}\right) 2\int_0^{{}^1/_2 h} f^*(y)\,b(y)\,y\,dy = M \tag{4.7}$$

Введем обозначение

$$I^* = 2\int_0^{{}^1/_2 h} f^*(y)\,b(y)\,y\,dy \tag{4.8}$$

которое условимся называть моментом инерции. Он зависит от формы поперечного сечения бруса и вида функции $f^*(y)$ [или $f(y)$]. Если $f^*(y)$ представляет собой линейную функцию, то получаем обычный момент инерции I.

Из соотношений (4.7) и (4.8) окончательно находим следующую формулу для определения напряжения:

$$\sigma_x = \frac{Mf^*(y)}{I^*} \tag{4.9}$$

Таким образом, распределение напряжений в этом случае оказывается не зависящим от времени t, хотя деформации бруса непостоянны во времени, как это видно из соотношения (4.2).

Б. *Задача о релаксации напряжения.* Пусть в момент $t = \tau_1$ бетонный брус получил начальное удлинение $\varepsilon_x(\tau_1)$, которому будет соответствовать согласно (1.1) напряжение

$$\sigma_x(\tau_1) = E_0 \varepsilon_x(\tau_1) \tag{4.10}$$

В дальнейшем при $t > \tau_1$ длина бруса остается неизменной, т. е. $\varepsilon_x(t) = \varepsilon_x(\tau_1) = \text{const}$, а следовательно,

$$\varepsilon_x'(t) = \frac{d\varepsilon_x(t)}{dt} = 0$$

Согласно (2.17) имеем

$$\sigma_x'(t) + a\sigma_x(t) + b\sigma^2(t) = E_0\gamma\varepsilon_x(\tau_1) = \gamma\sigma_x(\tau_1) \tag{4.11}$$

при начальном условии $t = \tau_1$,

$$\sigma_x(\tau_1) = \mathrm{E}_0\varepsilon_x(\tau_1) \qquad (a = \gamma[1 + E_0C_0],\ b = \beta \mathrm{E}_0\gamma C_0) \tag{4.12}$$

Разделяя переменные и интегрируя (4.11) при условии (4.12), находим)

$$t = \tau_1 - \frac{1}{\gamma}\int\limits_{\sigma_x(\tau_1)}^{\sigma_x(t)} \frac{d\xi}{E_0C_0\beta\xi^2 + (1 + E_0C_0)\xi - \sigma_x(\tau_1)} \tag{4.13}$$

После простых вычислений получим

$$t = \tau_1 - \frac{1}{\gamma E_0 C_0 \beta}\,\frac{1}{\xi_1 - \xi_2}\ln\frac{[\sigma_x(\tau_1) - \xi_1]\,[\sigma_x(t) - \xi_2]}{[\sigma_x(t) - \sigma_1]\,[\sigma_x(\tau_1) - \sigma_2]} \tag{4.14}$$

Здесь ξ_1, ξ_2 — корни квадратного уравнения

$$b\xi^2 + a\xi - \gamma\sigma_x(\tau_1) = 0 \tag{4.15}$$

причем для определенности примем $\xi_1 > \xi_2$.

Разрешая уравнение (4.14) относительно $\sigma_x(t)$, получим

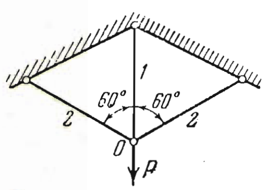
$$\sigma_x(t) = \xi_1 \frac{1 - \alpha_1 e^{-b(\xi_1 - \xi_2)(t - \tau_1)}}{1 - \alpha_2 e^{-b(\xi_1 - \xi_2)(t - \tau_1)}} \tag{4.16}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\xi_2}{\xi_1}\alpha_2, \qquad \alpha_2 = \frac{\sigma_x(\tau_1) - \xi_1}{\sigma_x(\tau_1) - \xi_2} \tag{4.17}$$

Так как $b(\xi_1 - \xi_2) > 0$, то с течением времени напряжение $\sigma_x(t)$ в брусе монотонно убывает, стремясь со временем к ξ_1.

В. *Ползучесть стержневой решетки.* Для иллюстрации процесса ползучести рассмотрим задачу о том, как будут изменяться напряжения в стержнях решетки [1], изображенной на фиг. 1, с учетом ползучести материала, если она состоит из трех одинаковых стержней длины l и площади поперечного сечения F.



Фиг. 1

Пусть на узел O действует постоянная сила P. Напряжение в стержне *1* обозначим через $\sigma_1(t)$, а в стержне *2* — через $\sigma_2(t)$ Относительное удлинение стержней *1* и *2* также будем обозначать соответственно через $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$. Условие равновесия будет

$$P = F[\sigma_1(t) + \sigma_2(t)] \tag{4.18}$$

Условие неразрывности деформации имеет вид:

$$\varepsilon_1(t) = 2\varepsilon_2(t), \qquad \varepsilon_1'(t) = 2\varepsilon_2'(t) \tag{4.19}$$

[1] Этот пример рассмотрен Л. М. Качановым [7].

Согласно уравнению ползучести (2.17) имеем

$$\sigma_i'(t) + a\sigma_i(t) + b\sigma_i^2(t) = E_0[\varepsilon_i'(t) + \gamma\varepsilon_i(t)] \qquad (i = 1, 2) \tag{4.20}$$

Пользуясь условием неразрывности деформации (4.19) и исключая $\sigma_2(t)$ из (4.20) при помощи (4.18), для определения $\sigma_1(t)$ получим уравнение:

$$\sigma_1'(t) + \left(+ a\frac{4bP}{3F}\right)\sigma_1(t) - \frac{b}{3}\sigma_1^2(t) = \frac{2}{3}\frac{P}{F}\left[a + b\frac{P}{F}\right] \tag{4.21}$$

В момент $t = \tau_1$ решетка находится в упругом состоянии и соответствующие напряжения в стержнях, как легко видеть, будут

$$\sigma_1(\tau_1) = \frac{2}{3}\frac{P}{F}, \qquad \sigma_2(\tau_1) = \frac{1}{3}\frac{P}{F} \tag{4.22}$$

Значение $\sigma_1(\tau_1) = 2p/3F$ является начальным условием для уравнения (4.21). Разделяя переменные и интегрируя (4.21) при условии (4.22), получим

$$t = \tau_1 + 3\int\limits_{\sigma_1(\tau_1)}^{\sigma_1(t)} \frac{d\xi}{b\xi^2 - 3[a + 2b\sigma_1(\tau_1)] + 3\sigma_1(\tau_1)[a + {}^3/_2 b\sigma_1(\tau_1)]} \tag{4.23}$$

После интегрирования и некоторых преобразований находим

$$t = \tau_1 + \frac{3}{b(\xi_1 - \xi_2)}\ln\frac{[\sigma_1(\tau_1) - \xi_2]\;[\sigma_1(t) - \xi_1]}{[\sigma_1(\tau_1) - \xi_1]\;[\sigma_1(t) - \xi_2]} \tag{4.24}$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 — корни уравнения

$$b\xi^2 - 3[a + 2b\sigma_1(\tau_1)]\xi + 3\sigma_1(\tau_1)\left[a + \frac{3b}{2}\sigma_1(\tau_1)\right] = 0 \tag{4.25}$$

причем принимаем $\xi_1 > \xi_2$. Легко видеть, что как ξ_1, так и ξ_2 отрицательны.

Разрешая уравнение (4.24) относительно $\sigma_1(t)$, получим

$$\sigma_1(t) = \xi_2\frac{1 - \beta_1 e^{\varkappa}}{1 - \beta_2 e^{\varkappa}} \tag{4.26}$$

где

$$\varkappa = -\frac{b(\xi_1 - \xi_2)}{3}(t - \tau_1), \qquad \beta_1 = \frac{\sigma_1(\tau_1) - \xi_2}{\sigma_1(\tau_1) - \xi_1}\beta_2, \qquad \beta_2 = \frac{\xi_1}{\xi_2} \tag{4.27}$$

Так как в $b(\xi_1 - \xi_2) > 0$ и $\beta_2 < 1$ (что очевидно в силу неравенства $\xi_1 > \xi_2$ и отрицательности ξ_1 и ξ_2), то напряжение $\sigma_1(t)$ с течением времени монотонно убывает (по модулю), стремясь к ξ_2.

Поступила 2 II 1952 Академия наук Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Теория упругого напряженного состояния бетона с учетом ползучести. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 6.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории расчета железобетонных конструкций с учетом ползучести бетона. Труды Ереванского политехнического института. 1950. № 4.
3. Столяров Я. В. Введение в теорию железобетона. Стройиздат. 1941.
4. Васильев П. И. Пластические свойства бетона при сжатии и их влияние на работу некоторых элементов бетонных и железобетонных конструкций (Автореферат). Ленинградский политехнический институт. 1951.
5. Улицкий И. И. Ползучесть бетона. Гостехиздат Украины. 1948.
6. Фрайфельд С. Е. Собственные напряжения в железобетоне. Стройиздат. 1941.
7. Качанов Л. М. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат. 1950.
8. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник Моск. гос. университета. 1948. № 10.