ЗАДАЧА О ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУЕ

Ю. Б. Румер (Новосибирск)

Задача о ламинарной затопленной струе, бьющей из конца тонкой трубки в неограниченное пространство, заполненное той же жидкостью, была рассмотрена Ландау [1]. Им же отмечено, что если вычислить по полученным им формулам полный расход жидкости через замкнутую поверхность, охватывающую конец трубки, то он окажется равным нулю. В настоящем сообщении мы показываем, что найденное Ландау точное решение задачи (в реальном случае отличного от нуля расхода) является лишь первым приближением, пригодным для описания движения на больших расстояниях от конца трубки, и находим второе приближение, которое следует учитывать при конечном расходе.

Можно показать [2], что решение Ландау получается, если искать точное решение уравнений Навье-Стокса, регулярное при всех углах θ, в котором поле скоростей обратно пропорционально расстоянию от конца трубки.

Для учета конечного расхода будем искать приближенное решение уравнений движения, в котором поле скоростей и давление даются (в сферических координатах) выражениями

$$v_r = \frac{F_1(\theta)}{r} + \frac{F_2(\theta)}{r^2}, \quad v_\theta = \frac{f_1(\theta)}{r} + \frac{f_2(\theta)}{r^2}, \quad v_\varphi = 0, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{g_1(\theta)}{r^2} + \frac{g_2(\theta)}{r^3} \tag{1}$$

соответствующими первым двум членам разложения по обратным степеням r.

Подставляя эти выражения в уравнения Навье-Стокса и уравнение непрерывности и приравнивая нулю коэффициенты при степенях $1/r$ (отбрасывая при этом члены более высокого порядка малости), получим системы уравнений:

$$\begin{gathered} f_1F_1' - F_1^2 - f_1^2 = 2g_1 + \nu(F_1'' + F_1' \operatorname{ctg}\theta) \\ f_1f_1' = -g_1' + \nu F_1', \qquad -F_1 = f_1' + f_1 \operatorname{ctg}\theta \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} f_1F_2' + f_2F_1' - 3F_1F_2 - 2f_1f_2 = 3g_2 + \nu(F_2'' + F_2' \operatorname{ctg}\theta) \\ f_1f_2' + f_2f_1' - F_1f_2 = -g_2' + \nu(2f_2 + 2F_2'), \qquad f_2' + f_2 \operatorname{ctg}\theta = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

Полное исследование системы (2) выполнено недавно В. И. Яцеевым [2]; он нашел для нее общее решение и показал, что частное решение, найденное Ландау:

$$F_1 = 2\nu\left[\frac{A^2-1}{(\cos\theta - A)^2} - 1\right], \quad f_1 = \frac{2\nu\sin\theta}{\cos\theta - A}, \quad g_1 = 4\nu^2\frac{1 - A\cos\theta}{(\cos\theta - A)^2} \tag{4}$$

является единственным, регулярным при всех углах θ. Полный расход жидкости через сферическую поверхность радиуса R с центром в начале координат равен

$$Q = \rho\int v_r R^2 d\Omega = 2\pi\rho\int_0^\pi F_2(\theta)\sin\theta d\theta \tag{5}$$

Составляющая же P полного потока импульса струи в направлении оси через эту же поверхность определяется первыми членами разложения (1), причем P связано с постоянной A в функциях (4) указанным Ландау соотношением

$$P = 16\pi\rho\nu^2 A\left\{1 + \frac{4}{3(A^2-1)} - \frac{A}{2}\ln\frac{A+1}{A-1}\right\} \tag{6}$$

Переходим к интегрированию уравнений (3). Последнее из этих уравнений дает $f_2 = C/\sin\theta$; откуда из требования регулярности при всех θ вытекает $f_2 = 0$ и система (3) принимает вид:

$$f_1F_2' - 3F_1F_2 = 3g_2 + \nu(F_2'' + F_2' \operatorname{ctg}\theta), \qquad g_2' - 2\nu F_2' = 0 \tag{7}$$

Интегрируя второе из уравнений (7), получаем $g_2 = 2\nu(F_2 - {}^1/_6 C)$. Подставляя g_2, а также f_1 и F_1 согласно (4) в первое уравнение (7), находим для F_2 уравнение

$$F_2'' + \left(\operatorname{ctg}\theta + \frac{2\sin\theta}{A-\cos\theta}\right)F_2' + \frac{6(A^2-1)}{(A-\cos\theta)^2}F_2 = C \tag{8}$$

Постоянную интегрирования C можно связать с расходом Q. Умножая (8) на $\sin\theta(A-\cos\theta)^2$ и интегрируя от 0 до π, легко получить (принимая во внимание регулярность функции F_2') соотношение

$$C = \frac{9(A^2-1)}{2\pi\rho(3A^2+1)}Q \tag{9}$$

Для решения уравнения (8) сделаем замену $z=\cos\theta$, $F_2(\theta) = CH(z)$; получим

$$H'' - 2\left(\frac{z}{1-z^2} + \frac{1}{A-z}\right)H' + \frac{6(A^2-1)}{(A-z)^2(1-z^2)}H = \frac{1}{1-z^2} \tag{10}$$

Частное решение $h(z)$ соответствующего однородного уравнения есть

$$h(z) = 1 - \frac{3(A^2-1)}{(A-z)^2} + \frac{2(A^2-1)^2}{A(A-z)^3} \tag{11}$$

Второе независимое решение однородного уравнения, как легко убедиться, имеет особенность при $z=1$ и потому должно быть отброшено. Общее регулярное решение уравнения (10) имеет, следовательно, вид:

$$H(z) = H^*(z) + C^*h(z) \tag{12}$$

где C^* — постоянная, $H^*(z)$ — частное решение неоднородного уравнения

$$H^*(z) = h(z)\int_{-1}^{z}\frac{d\xi}{(1-\xi^2)(A-\xi)^2h^2(\xi)}\int_{1}^{\xi}(A-\eta)^2h(\eta)\,d\eta \tag{13}$$

где нижние пределы интегрирования обеспечивают регулярность $H^*(z)$ при всех θ.

Появление произвольной постоянной C^* в решении (12) связано с тем, что в рассматриваемом приближении можно еще произвольно перемещать начало координат на расстояния порядка r_0 вдоль трубки (r_0 — радиус трубки). Поэтому, не ограничивая общности, можно положить $C^*=0$, и окончательно имеем

$$F_2 = \frac{9(A^2-1)Q}{2\pi\rho(3A^2+1)}H^*(\cos\theta),\quad f_2 = 0,\quad g_2 = \frac{9\nu(A^2-1)Q}{\pi\rho(3A^2+1)}\left[H^*(\cos\theta) - \frac{1}{6}\right] \tag{14}$$

Найденное решение задачи во втором приближении учитывает конечный расход жидкости. Для линий тока имеем дифференциальное уравнение $v_0 dr = v_r r\,d\theta$, интегрирование которого в рассматриваемом приближении дает

$$r = \mathrm{const}\,\frac{A-\cos\theta}{2\nu\sin^2\theta} + \frac{A-\cos\theta}{2\nu\sin^2\theta}\int_0^\theta F_2\sin\theta\,d\theta \tag{15}$$

Если отбросить второй член в этом выражении, то получим линии тока решения Ландау. Таким образом, в случае конечного расхода на расстояниях, больших по сравнению с длиной $L(\theta) = F_2(\theta)/F_1(\theta)$, решение Ландау, являясь первым приближением, дает удовлетворительное описание движения жидкости.

На более близких расстояниях приходится учитывать второе и более высокие приближения. При этом следует помнить, что все решение сохраняет смысл, пока трубку можно считать тонкой, т. е. для $r \gg r_0$, где r_0 — радиус трубки.

Поступила 15 X 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. и Лифшиц Е. Механика сплошных сред. § 19. ГТТИ. 1944.
2. Яцеев В. И. Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости. ЖЭТФ. 1950. Т. 20. Вып. 11.