О ПРЕДЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ СЫПУЧЕГО КЛИНА И РАЗРЫВНОМ РЕШЕНИИ СТАТИКИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

Г. С. Шапиро (Москва)

1. Как известно, дифференциальные уравнения равновесия статики сыпучей среды принадлежат к гиперболическому типу; наряду с решениями, допускающими вдоль характеристик разрывы в первых производных от напряжений, следует ввести в рассмотрение сильные разрывы. В общем случае среды, обладающей сцеплением и внутренним трением, скачок в значениях нормальных напряжений σ_t, действующих на элемент, перпендикулярный к поверхности разрыва S, как показано в [1], будет

$$\sigma_{t2} - \sigma_{t1} = \pm \frac{2}{1-\sin^2\rho}\{[\sigma_s(1+\sin^2\rho) + 2k\operatorname{ctg}\rho\sin^2\rho]^2 -$$

$$-(1-\sin^2\rho)[\sigma_s^2(1-\sin^2\rho) + 4\tau^2 - 4\sin^2\rho(k^2\operatorname{ctg}^2\rho + k\sigma_s\operatorname{ctg}\rho)]\}^{1/2} \qquad (1.1)$$

Здесь σ_s и τ — соответственно нормальное и касательное напряжения, действующие на элемент поверхности разрыва S, ρ — коэффициент внутреннего трения, k — коэффициент сцепления. Условия на линии разрыва в теории пластичности были даны В. Прагером [2]; в статике сыпучей среды это отвечает случаю среды, обладающей идеальным сцеплением ($\rho = 0$).

Условие предельного равновесия сыпучей среды, обладающей трением и сцеплением, имеет вид:

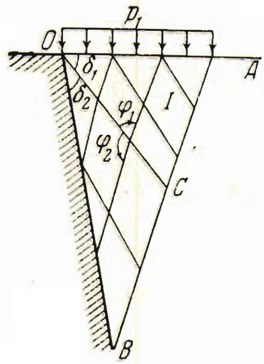
$$(\sigma_s - \sigma_t)^2 + 4\tau^2 = \sin^2\rho\,(\sigma_s + \sigma_t + 2k\operatorname{ctg}\rho)^2 \qquad (1.2)$$

Это условие выполняется, если положить [3]

$$\sigma_s = \sigma[1 - \sin\rho\sin(2\varphi + \rho)] - k\operatorname{ctg}\rho \qquad (1.3)$$

$$\sigma_t = \sigma[1 + \sin\rho\sin(2\varphi + \rho)] - k\operatorname{ctg}\rho \qquad (1.4)$$

$$\tau = -\sigma\sin\rho\cos(2\varphi + \rho) \qquad (1.5)$$



Фиг. 1

Здесь φ — угол наклона линии скольжения первого семейства к касательной, проведенной в рассматриваемой точке к следу поверхности разрыва S на плоскости, проходящей через направления главных нормальных напряжений σ_1 и σ_3, и обозначено

$$\sigma = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\sin\rho}$$

Из условия непрерывности σ_s и τ согласно (1.3) и (1.5) имеем

$$\sigma_1[1 - \sin\rho\sin(2\varphi_1 + \rho)] = \sigma_2[1 - \sin\rho\sin(2\varphi_2 + \rho)] \qquad (1.6)$$

$$\sigma_1\cos(2\varphi_1 + \rho) = \sigma_2\cos(2\varphi_2 + \rho) \qquad (1.7)$$

Здесь и в дальнейшем индексы 1 и 2 относятся к двум сторонам поверхности разрыва. Обозначим для краткости $\alpha_1 = 2\varphi_1 + \rho$, $\alpha_2 = 2\varphi_2 + \rho$ и введем в рассмотрение отношение $n = \sigma_1/\sigma_2$. Тогда из зависимости (1.7) имеем

$$\sin\alpha_2 = \pm(1 - n^2 + n^2\sin^2\alpha_1)^{1/2} \qquad (1.8)$$

Сопоставляя (1.8) и (1.6), находим

$$\sin\alpha_1 = \frac{1}{2n\sin\rho}[n - 1 + (n+1)\sin^2\rho] \qquad (1.9)$$

2. Рассмотрим предельное равновесие остроугольного клина под действием равномерно распределенной нагрузки p по грани OA (фиг. 1). По грани OB приложено реактивное давление q от подпорной стенки. Влияния веса грунта учитывать не будем. Решение задачи для тупоугольного клина приведено в монографии [3].

Область OAB, занятая сыпучей средой, разделится линией разрыва OC на два сектора. В секторе I линии скольжения пересекаются под углом $^1/_2\,\pi - \rho$ и наклонены под углом $^1/_4\,\pi + {^1/_2}\,\rho$ к поверхности OA. Для этого сектора имеем [3]

$$\sigma_1 = \frac{p + k\operatorname{ctg}\rho}{1 + \sin\rho} \tag{2.1}$$

В секторе II линии скольжения пересекаются под углом $^1/_2\,\pi + \rho$ и наклонены под углом $^1/_4\,\pi - {^1/_2}\,\rho$ к OB. Для этого сектора

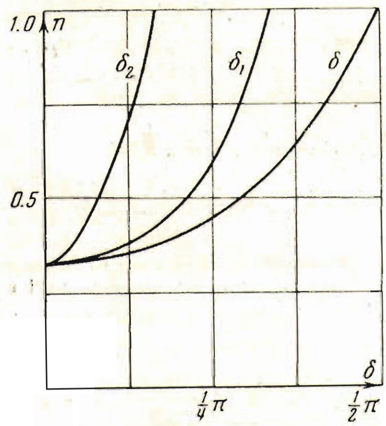
$$\sigma_2 = \frac{q + k\operatorname{ctg}\rho}{1 - \sin\rho} \tag{2.2}$$

Задаваясь величиной n по формуле (1.9), находим значение угла α_1. Угол наклона δ_1 линии разрыва OC к грани OA будет:

$$\delta_1 = \frac{3}{4}\pi - |\varphi_1| - \frac{1}{2}\rho \tag{2.3}$$

Точно так же угол наклона δ_2 линии разрыва к грани OB равен:

$$\delta_2 = \frac{3}{4}\pi - |\varphi_2| + \frac{1}{2}\rho \tag{2.4}$$



Фиг. 2

Предельное значение угла раствора клина $\delta = \delta_1 + \delta_2$ определяется величиной отношения n. Графики $\delta_1(n)$, $\delta_2(n)$, $\delta(n)$ для $\rho = 30^\circ$ построены на фиг. 2; вычисления (на 10-см линейке) приведены в таблице. Значению $n = 1$ отвечает случай прямоугольного клина. При этом приходим к известному непрерывному решению

n	$\sin\alpha_1$	α_1°	φ_1°	δ_1°	$\sin\alpha_2$	α_2°	φ_2°	δ_2°	δ°
1	0.5	150	60	60	—0.5	—210	—120.0	30	90.0
0.9	0.418	155.3	62.7	57.3	—0.575	—215	—122.5	27.5	84.8
0.8	0.313	161.8	65.9	54.1	—0.65	—221	—125.5	24.5	78.6
0.7	0.179	169.7	69.8	50.2	—0.725	—226.5	—128.3	22.3	72.5
0.6	0	180.0	75.0	45.0	—0.80	—234.0	—132.0	18.0	63.0
0.5	—0.25	195.0	82.5	37.5	—0.87	—240.0	—135.0	15.0	52.5
0.4	—0.625	219.0	94.5	25.5	—0.95	—252.0	—141.0	9.0	34.5
1/3	—1.0	270.0	120.0	0	—1.0	—300.0	—150.0	0	0

$$q = p\,\frac{1 - \sin\rho}{1 + \sin\rho} \tag{2.5}$$

В случае

$$p = q, \qquad n = \frac{1 - \sin\rho}{1 + \sin\rho} \tag{2.6}$$

клин вырождается в прямую.

Поступила 7 I 1952 Институт механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапиро Г. С. Упруго-пластическое равновесие клина и разрывные решения в теории пластичности. ПММ. 1952. Т. XVI. Вып. 1.
2. Prager W. Discontinuos solutions in the theory of plasticity. Courant Anniversary Volume. 1948.
3. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. АН СССР. 1942.