Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

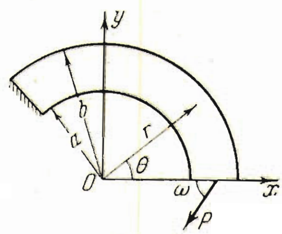
ИЗГИБ ПЛОСКОГО КРИВОЛИНЕЙНОГО АНИЗОТРОПНОГО БРУСА СИЛОЙ, ПРИЛОЖЕННОЙ НА КОНЦЕ

А. С. Космодамианский
(Саратов)

В 1882 г. Х. С. Головин впервые получил точное решение задачи об изгибе плоского кривого изотропного бруса [1]. Для некоторых случаев нагрузки решение аналогичной задачи об изгибе кривого криволинейно-ортотропного бруса дано С. Г. Лехницким [2]. Здесь задача об изгибе криволинейно-анизотропного бруса рассматривается в более общей постановке,— брус не предполагается ортотропным.

Дан кривой брус постоянного прямоугольного сечения, заделанный одним концом и деформируемый силой P, приложенной к другому концу. Действие объемных сил не учитываем. Будем считать, что брус обладает цилиндрической анизотропией и что полюс анизотропии находится в общем центре окружностей, ограничивающих план бруса. Деформации считаем малыми. Никаких элементов упругой симметрии, кроме плоскостей, параллельных срединной плоскости, не предполагаем. Будем пользоваться полярными координатами (фиг. 1).

Пусть a и b — внутренний и наружный радиусы контуров, h — толщина бруса, ω — угол наклона силы к плоскости сечения, где она приложена (в центре сечения). Величина угла между концевыми сечениями не имеет значения; будем считать ее меньше 2π. Величина $a/b = c$.



Фиг. 1

Рассматривая данную задачу как плоскую, будем считать, что уравнения, выражающие обобщенный закон Гука, имеют вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{16}\tau_{r\theta}\\
\varepsilon_\theta &= a_{12}\sigma_r + a_{22}\sigma_\theta + a_{26}\tau_{r\theta}\\
\gamma_{r\theta} &= a_{16}\sigma_r + a_{26}\sigma_\theta + a_{66}\tau_{r\theta}
\end{aligned} \tag{1}$$

где σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ — средние по толщине напряжения, ε_r, ε_θ, $\gamma_{r\theta}$ — средние по толщине деформации.

Как известно, составляющие напряжений выражаются через функцию напряжений

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \qquad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \qquad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\frac{F}{r} \tag{2}$$

Последняя удовлетворяет уравнению [2]

$$\begin{gathered}
a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} - 2a_{16}\frac{1}{r}\frac{\partial^4 F}{\partial r^3\partial\theta} + (2a_{12}+a_{66})\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 F}{\partial r^2\partial\theta^2} - 2a_{16}\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 F}{\partial r\partial\theta^3} + a_{11}\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 F}{\partial\theta^4} + \\
+ 2a_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - (2a_{12}+a_{66})\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 F}{\partial r\partial\theta^2} + 2a_{16}\frac{1}{r^4}\frac{\partial^3 F}{\partial\theta^3} - a_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \\
- 2(a_{16}+a_{26})\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} + (2a_{11}+2a_{12}+a_{66})\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + a_{11}\frac{1}{r^3}\frac{\partial F}{\partial r} + \\
+ 2(a_{16}+a_{26})\frac{1}{r^4}\frac{\partial F}{\partial\theta} = 0
\end{gathered}$$

Здесь a_{11}, a_{22}, a_{16}, a_{26}, a_{12}, a_{66} — упругие постоянные материала.

Решение поставленной задачи получается при помощи функции напряжений вида

$$F = f(r)\,e^{\theta i} + \overline{f(r)}\,e^{-\theta i} = (f + \overline{f})\cos\theta + i\,(f - \overline{f})\sin\theta \tag{4}$$

Функция $f(r)$ определяется из дифференциального уравнения

$$\begin{gathered} a_{22}f_1^{\mathrm{IV}} + \frac{2}{r}(a_{22} - ia_{26})\,f_1^{\mathrm{III}} - \frac{1}{r^2}(2a_{12} + a_{66} + a_{11})\,f_1^{\mathrm{II}} + \\ + \frac{1}{r^3}\left[(2a_{12} + a_{66} + a_{11}) - 4ia_{26}\right] f_1' + \frac{1}{r^4}\left[2ia_{26} - (a_{11} + 2a_{12} + a_{66})\right] f_1 = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$f_1(r) = Ar^{1+\alpha i+\beta} + Br^{1+\alpha i-\beta} + Cr\log r + Dr \tag{6}$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные интегрирования,

$$\alpha = \frac{a_{26}}{a_{22}}, \qquad \beta = \sqrt{1 + \frac{a_{11} + 2a_{12} + a_{66}}{a_{22}} - \frac{a_{26}^2}{a_{22}^2}}$$

Для сопряженной функции $\overline{f_1(r)}$ получим выражение

$$\overline{f_1(r)} = \overline{A}r^{1-\alpha i+\beta} + \overline{B}r^{1-\alpha i-\beta} + \overline{C}r\log r + \overline{D}r \tag{7}$$

Произвольные постоянные, содержащиеся в выражениях функций $f(r)$ и $\overline{f}(r)$, определим из граничных условий, которые будут: на кривых сторонах нормальные и касательные напряжения равны нулю, а на свободном конце приводятся к силе P.

В результате получаются следующие формулы для составляющих напряжений:

$$\begin{gathered} \sigma_\theta = \frac{P}{bh}\left[R_2(r)\sin(\omega - \theta) - R_1(r)\cos(\omega - \theta)\right] \\ \sigma_r = -\frac{P}{bh}\left[M_1(r)\sin(\omega - \theta) + M_2(r)\cos(\omega - \theta)\right] \\ \tau_{r\theta} = \frac{P}{bh}\left[M_2(r)\sin(\omega - \theta) - M_1(r)\cos(\omega - \theta)\right] \end{gathered} \tag{8}$$

где (9)

$$\begin{aligned} R_1(r) = \frac{b}{rg_1}\Big\{&\alpha\cos\left(\alpha\log\frac{r}{a}\right)\left[\left(\frac{r}{b}\right)^\beta - \left(\frac{b}{r}\right)^\beta\right] + \sin\left(\alpha\log\frac{r}{a}\right)\left[(1+\beta)\left(\frac{r}{b}\right)^\beta + \right. \\ &\left. + (\beta - 1)\left(\frac{b}{r}\right)^\beta\right] + \alpha\cos\left(\alpha\log\frac{r}{b}\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^\beta - \left(\frac{r}{a}\right)^\beta\right] - \\ &- \sin\left(\alpha\log\frac{r}{b}\right)\left[(\beta - 1)\left(\frac{a}{r}\right)^\beta + (\beta + 1)\left(\frac{r}{a}\right)^\beta\right]\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2(r) = \frac{b}{rg_1}\Big\{&\alpha\sin\left(\alpha\log\frac{r}{a}\right)\left[\left(\frac{b}{r}\right)^\beta - \left(\frac{r}{b}\right)^\beta\right] + \cos\left(\alpha\log\frac{r}{a}\right)\left[(\beta - 1)\left(\frac{b}{r}\right)^\beta + \right. \\ &\left. + (1+\beta)\left(\frac{r}{b}\right)^\beta\right] + \alpha\sin\left((\alpha\log\frac{r}{b}\right)\left[\left(\frac{r}{a}\right)^\beta - \left(\frac{a}{r}\right)^\beta\right] - \\ &- \cos\left(\alpha\log\frac{r}{b}\right)\left[\left(\frac{r}{a}\right)^\beta(1+\beta) + \left(\frac{a}{r}\right)^\beta(\beta - 1)\right] + (c^{-\beta} - c^\beta)\Big\} \end{aligned}$$

$$M_2(r) = \frac{b}{rg_1}\left\{\sin\left(\alpha\log\frac{r}{a}\right)\left[\left(\frac{r}{b}\right)^\beta - \left(\frac{b}{r}\right)^\beta\right] + \sin\left(\alpha\log\frac{r}{b}\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^\beta - \left(\frac{r}{a}\right)^\beta\right]\right.$$

$$\begin{aligned} M_1(r) = \frac{b}{rg_1}\Big\{&\cos\left(\alpha\log\frac{r}{b}\right)\left[\left(\frac{r}{a}\right)^\beta - \left(\frac{a}{r}\right)^\beta\right] + \cos\left(\alpha\log\frac{r}{a}\right)\left[\left(\frac{b}{r}\right)^\beta - \right. \\ &\left. - \left(\frac{r}{b}\right)^\beta\right] - (c^{-\beta} - c^\beta)\Big\} \end{aligned}$$

Таблица 1

Выражение δ_θ^*

$\frac{r}{b/a}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
3	15.6	10.1	6.40	3.74	1.72	0.0569	—1.31	—2.47	—3.49	—4.38	— 5.19
2	25.4	18.3	12.5	7.67	3.58	0.0350	—3.10	—5.86	—8.36	—10.6	—12.7
1.3	116	89.9	65.7	42.5	20.6	0.0238	—20.5	—38.2	—56.0	—73.4	—89.2

при этом

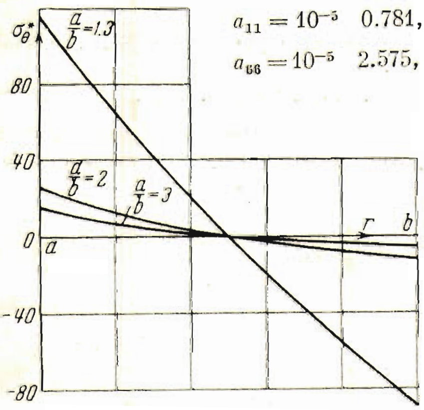
$$g_1 = \frac{4\beta c^\beta \cos(\alpha \log c) - 2\beta(1 + c^{2\beta}) + (\alpha^2 + \beta^2)(c^{2\beta} - 1)\log c}{c^\beta(\alpha^2 + \beta^2)}$$

Положив в формулах (8) и (9) $\alpha = 0$, $\beta = n = \sqrt{1 + (a_{11} + 2a_{12} + a_{66})/a_{22}}$, найдем выражения для напряжений в кривом криволинейно-ортотропном брусе, полученные С. Г. Лехницким [3].

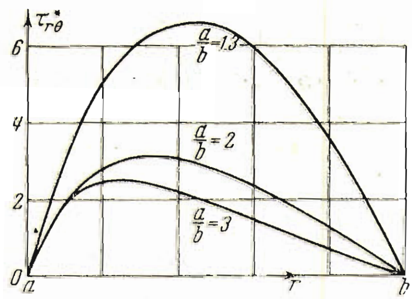
Составляющие напряжений в изотропном брусе получаются при $n = 2$.

Приведем результаты вычислений для бруса, у которого упругие постоянные имеют следущие численные значения [2]:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 10^{-5}\ 0.781, & a_{22} &= 10^{-5}\ 1.531, & a_{12} &= -10^{-5}\ 0.006 \\ a_{66} &= 10^{-5}\ 2.575, & a_{16} &= -10^{-5}\ 0.541 & a_{26} &= -10^{-5}\ 0.758 \end{aligned} \qquad (10)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Нормальные напряжения в сечениях, перпендикулярных приложенным силам и касательные напряжения в сечениях, параллельных силам, запишем так:

$$\sigma_\theta = \frac{P}{bh}\sigma_\theta^*, \qquad \tau_{r\theta} = \frac{P}{bh}\tau_{r\theta}^* \qquad (11)$$

В табл. 1 и 2 приведены значения безразмерных коэффициентов σ_θ^* и $\tau_{r\theta}^*$, где числа $0, 0.1, \ldots, 0.9, 1$ указывают значения радиусов r, соответственно равные a, $a + 0.1(b - a) \ldots b$.

На фиг. 2 и 3 приведены графики изменения σ_θ^* и $\sigma_{r\theta}^*$ для трех отношений радиусов.

Анализ напряженного состояния анизотропных брусьев с разными отношениями радиусов позволяет сделать ряд выводов.

1. Максимальное значение σ_θ значительно больше максимальных значений σ_r и $\tau_{r\theta}$ и получается в точке на внутреннем крае. Эта точка находится не в сечении, перпендикулярном силе (что имеет место для изотропного и криволинейно-ортотропного брусьев), а в другом сечении под углом к силе, зависящем от отношения радиусов и от упругих постоянных.

Таблица 2

Выражение $\tau_{r\theta}$ *

r / b/a	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
3	0	1.90	2.48	2.48	2.22	1.89	1.51	1.11	0.728	0.355	0
2	0	1.91	2.80	3.12	3.07	2.79	2.35	1.83	1.25	0.631	0
1.3	0	2.98	5.12	6.16	6.53	6.62	6.00	4.98	3.61	1.95	0

2. В радиальном сечении, где σ_θ принимает максимальное значение, $\tau_{r\theta}$ не равно нулю (в противоположность изотропному и криволинейно-ортотропному брусьям).

3. Для малых отношений внешнего радиуса бруса к внутреннему распределение нормальных напряжений по радиальным сечениям приближается к линейному, а распределение касательных напряжений — к параболическому, что имеет место для прямых брусьев.

4. При данной нагрузке постоянная a_{16} не влияет на распределение напряжений.

Поступила 2 IV 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Головин Х. С. Одна из задач статики упругого тела. Известия Петербургского технологического института. Петербург 1882.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат. 1947.
3. Лехницкий С. Г. Плоская задача теории упругости для тела с цилиндрической анизотропией. Ученые записки Саратовского гос. университета. 1938. Т. I (XIV), сер. физ.-мат. Вып. 2.