Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

О ПРИБЛИЖЕННОМ ПРИЕМЕ В СТАТИКЕ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

В. В. Соколовский

(Москва)

Общая теория предельного равновесия сыпучей среды была разработана ранее в нашей монографии [1]. Остановимся теперь на одном приближенном приеме, который бывает иногда полезен при решении задач о предельном равновесии.

Плоское предельное равновесие сыпучей среды с объемным весом γ, углом внутреннего трения ρ и коэффициентом сцепления k описывается дифференциальными уравнениями равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \gamma, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

и условием предельного состояния

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}\sin\rho\,(\sigma_x + \sigma_y) + k\cos\rho \tag{2}$$

Здесь применяется прямоугольная система координат xy, ось x которой направлена вертикально вниз, ось y — горизонтально вправо.

Как будет показано ниже, решение задач о предельном равновесии сыпучей среды можно приближенно заменить суммой: решения той же задачи для сыпучей среды с внутренним трением и сцеплением, но без собственного веса и решения задачи для сыпучей среды с внутренним трением и собственным весом, но без сцепления. Каждая из этих задач в ряде случаев не требует применения общей теории предельного равновесия и решается в простой форме.

Условимся компонентами σ_{x0}, σ_{y0} и τ_{xy0} определять предельное напряженное состояние, соответствующее сыпучей среде с внутренним трением и сцеплением, но без собственного веса, т. е. при $\gamma = 0$. Тогда указанные компоненты удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy0}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy0}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y0}}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

и условию предельного состояния

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x0} - \sigma_{y0})^2 + \tau_{xy0}^2} = \frac{1}{2}\sin\rho\,(\sigma_{x0} + \sigma_{y0}) + k\cos\rho \tag{4}$$

Будем далее компонентами σ_{x1}, σ_{y1} и τ_{xy1} определять предельное напряженное состояние, отвечающее весомой сыпучей среде с внутренним трением, но без сцепления, т. е. при $k = 0$. Тогда эти компоненты удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy1}}{\partial y} = \gamma, \qquad \frac{\partial \tau_{xy1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y1}}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

и условию предельного состояния

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x1}-\sigma_{y1})^2+\tau_{xy1}{}^2}=\frac{1}{2}\sin\rho\,(\sigma_{x1}+\sigma_{y1}) \tag{6}$$

Представим себе напряженное состояние, полученное путем сложения указанных двух напряженных состояний. Оно описывается компонентами

$$\sigma_x=\sigma_{x0}+\sigma_{x1},\qquad \sigma_y=\sigma_{y0}+\sigma_{y1},\qquad \tau_{xy}=\tau_{xy0}+\tau_{xy1} \tag{7}$$

удовлетворяющими дифференциальным уравнениям равновесия с учетом собственного веса (1) и некоторому условию предельного состояния.

Это условие может быть получено путем сложения левых и правых частей условий (4) и (6), а именно

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x0}-\sigma_{y0})^2+\tau_{xy0}{}^2}+\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x1}-\sigma_{y1})^2+\tau_{xy1}{}^2}=\frac{1}{2}\sin\rho\,(\sigma_x+\sigma_y)+k\cos\rho$$

Имея в виду очевидное неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x0}-\sigma_{y0})^2+\tau_{xy0}{}^2}+\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x1}-\sigma_{y1})^2+\tau_{xy1}{}^2}\geqslant\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x-\sigma_y)^2+\tau_{xy}^2}$$

проверка которого не представляет труда, можно переписать предыдущее условие предельного состояния в виде

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x-\sigma_y)^2+\tau_{xy}^2}=\nu\left[\frac{1}{2}\sin\rho\,(\sigma_x+\sigma_y)+k\cos\rho\right]$$

причем оно содержит некоторый коэффициент $\nu\leqslant 1$.

Полученное условие предельного состояния, если ввести обозначения

$$\nu\sin\rho=\sin R,\qquad \nu k\cos\rho=K\cos R$$

может быть представлено следующим образом:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x-\sigma_y)^2+\tau_{xy}^2}=\frac{1}{2}\sin R\,(\sigma_x+\sigma_y)+K\cos R \tag{8}$$

Легко видеть, что величины R, K связаны с величинами ρ, k равенствами

$$\operatorname{tg}R=\frac{\operatorname{tg}\rho}{\lambda},\qquad K=\frac{k}{\lambda}$$

причем коэффициент λ выражается так:

$$\lambda=\frac{\sqrt{1-\nu^2\sin^2\rho}}{\nu\cos\rho}=\frac{\sqrt{\nu^2\cos^2\rho+1-\nu^2}}{\nu\cos\rho}\geqslant 1$$

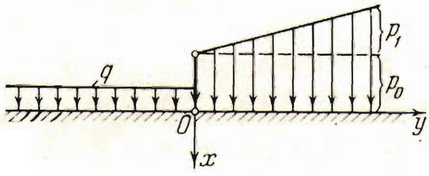
Следовательно, компоненты σ_x, σ_y, τ_{xy}, полученные на основании (7), удовлетворяют вместо условия (2) условию (8), которое описывает предельное состояние сыпучей среды с новыми уменьшенными коэффициентами внутреннего трения $\operatorname{tg}R$ и сцепления K.

Величину $\lambda\geqslant 1$, уменьшающую заданные коэффициенты внутреннего трения $\operatorname{tg}\rho$ и сцепления k в одинаковое число раз, можно рассматривать как некоторый, хотя и неизвестный, коэффициент запаса.

Этот вывод бывает часто полезен при практических расчетах.

Рассмотрим в качестве примера устойчивость сыпучей среды, занимающей нижнюю полуплоскость с прямолинейной границей — осью y.

Предполагая, что вдоль отрицательной полуоси y задано нормальное давление $\sigma_x = q$, определим максимальное нормальное давление $\sigma_x = p$ вдоль положительной полуоси y, при которых сыпучая среда сохраняет состояние предельного равновесия, т. е. не имеет места выпирание (фиг. 1).



Фиг. 1

Следуя приведенным выше рассуждениям, представим искомое давление p в виде суммы давления p_0 для невесомой сыпучей среды ($\gamma = 0$) и давления p_1 для весомой чисто сыпучей среды без пригрузки ($k = q = 0$).

Величина p_0 постоянна и дается известной формулой Л. Прандтля в виде

$$p_0 + k \operatorname{ctg} \rho = (q + k \operatorname{ctg} \rho) \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \exp (\pi \operatorname{tg} \rho) \tag{9}$$

а величина p_1, как это показано в нашей работе [2], пропорциональна координате y и выражается следующим образом:

$$p_1 = \gamma y P \tag{10}$$

причем коэффициенты P для различных углов внутреннего трения ρ таковы:

$\rho =$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
$P =$	0.46	1.26	2.94	6.70	16.2	36.7	76.4

На основании изложенного выше, приближенное выражение p равно сумме p_0 и p_1, а именно

$$p = p_0 + p_1 = p_0 + \gamma y P$$

Это давление p для $y = 0$ имеет точное значение, а для $y > 0$ имеет значение, несколько меньшее точного.

В заключение сделаем одно простое замечание по общей теории предельного равновесия сыпучей среды. Введение безразмерных величин

$$X = \frac{\gamma}{k} x, \qquad Y = \frac{\gamma}{k} y, \qquad s_x = \frac{\sigma_x}{k}, \qquad s_y = \frac{\sigma_y}{k}, \qquad t_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{k}$$

дает возможность переписать дифференциальные уравнения равновесия (1) в виде

$$\frac{\partial s_x}{\partial X} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial Y} = 1, \qquad \frac{\partial t_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial s_y}{\partial Y} = 0. \tag{11}$$

и условие предельного состояния (2) следующим образом:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(s_x - s_y)^2 + t_{xy}{}^2} = \frac{1}{2} \sin \rho \, (s_x + s_y) + \cos \rho \tag{12}$$

Полученные безразмерные уравнения не содержат объемного веса γ и коэффициента сцепления k, а зависят только от угла внутреннего трения ρ. Поэтому конкретные вычисления следует проводить именно по этим безразмерным уравнениям.

Поступила 22 XII 1951

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. АН СССР. 1942.
2. Соколовский В. В. О предельном равновесии сыпучей среды. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 6.