Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ДОПОЛНЕНИЕ К СЛУЧАЮ В. А. СТЕКЛОВА ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

П. А. Кузьмин

(Казань)

В случае [1], о котором идет речь, предполагается, что точка опоры тела лежит на одной из его главных центральных осей инерции, которую мы здесь примем за ось x. Направим неподвижную ось z_1 вертикально вверх; обозначим косинусы углов с этой осью осей x, y, z тела через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Положим, кроме того, $Q=Px_c$, где P — вес тела, x_c — координата его центра тяжести. Сохраняя в остальном обычные обозначения, имеем уравнения движения

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr, & \frac{d\gamma_1}{dt} &= r\gamma_2 - q\gamma_3 \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp + Q\gamma_3, & \frac{d\gamma_2}{dt} &= p\gamma_3 - q\gamma_1 \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq - Q\gamma_2, & \frac{d\gamma_3}{dt} &= q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Будем искать такое частное решение этих уравнений, которое содержит соотношения

$$Q\gamma_2 = \alpha pq, \qquad Q\gamma_3 = \beta pr \tag{2}$$

где постоянные α и β подлежат определению.

В результате подстановки этих выражений в уравнения движения получим следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \frac{(B-C)\,B}{A}\,q^2 &= (C-A+\beta)\,p^2 + BL \\ \frac{(B-C)\,C}{A}\,r^2 &= (A-B-\alpha)\,p^2 + CM \\ \frac{2\,(B-C)}{A}\,Q\gamma_1 &= (\alpha-\beta)\,p^2 + 2\,\frac{B-C}{A}\,N \end{aligned} \tag{3}$$

в которых постоянные L, M, N, а также α, β определяются следующим образом:

$$\begin{gathered} \alpha = \frac{(A-C)\,(B-A)}{2C-A}, \qquad \beta = \frac{(A-C)\,(B-A)}{2B-A} \\ N^2 = Q^2, \qquad L = -\frac{N}{\alpha}, \qquad M = \frac{N}{\beta} \end{gathered} \tag{4}$$

Используя эти значения постоянных, двум первым из уравнений (3) дадим вид:

$$\frac{B-C}{A}\,q^2 + \frac{A-C}{2B-A}\,p^2 = -\frac{N}{\alpha}, \qquad \frac{B-C}{A}\,r^2 - \frac{A-B}{2C-A}\,p^2 = \frac{N}{\beta} \tag{5}$$

Отсюда легко выводим и такой интеграл:

$$Ap^2 + (2B-A)\,q^2 + (2C-A)\,r^2 = 0$$

из которого следует, что $2B - A$ и $2C - A$ имеют разные знаки. Не нарушая общности, в силу равноправия осей y и z можно положить $B > C$; тогда предыдущее условие дает

$$2B - A > 0, \qquad 2C - A < 0$$

Пусть теперь $N > 0$ (например, $N = + Px_c$ при $x_c > 0$). Первое из уравнений (5) сразу дает $\alpha < 0$; следовательно, $B > A$. Объединяя эти неравенства, имеем

$$2C < A < B \tag{6}$$

Все переменные у нас выражены через p, а для этой последней первое из уравнений (1) приведется к виду

$$\frac{dp}{dt} = -\sqrt{R}\sqrt{(\varkappa^2 - p^2)(p^2 + \nu^2)}$$

где перед радикалом возможен и другой знак; кроме того,

$$R = \frac{(A - B)(A - C)}{(2B - A)(2C - A)}, \qquad \varkappa^2 = \frac{N(2B - A)(2C - A)}{(A - C)^2(A - B)}, \qquad \nu^2 = \frac{N(2B - A)(2C - A)}{(A - B)^2(C - A)}$$

Введя далее обозначение

$$\sqrt{R(\varkappa^2 + \nu^2)}(t + \tau) = u$$

где τ — произвольная постоянная, после простых преобразований получаем для p, q, r, γ_1 решения в якобиевых эллиптических функциях:

$$p = \varepsilon_1 \varkappa \operatorname{cn} u, \quad q = \varepsilon_2 \varkappa \sqrt{\frac{A(A - C)}{(B - C)(2B - A)}} \operatorname{sn} u, \quad r = \varepsilon_3 \varkappa \sqrt{\frac{A}{A - 2C}} \operatorname{dn} u$$

$$\gamma_1 = \frac{N}{Q}\left(1 - \frac{A}{A - C}\operatorname{cn}^2 u\right) \qquad \left(k^2 = \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + \nu^2} = \frac{B - A}{B - C}\right)$$

Здесь $\varepsilon_j = \pm 1$, k — модуль; точный выбор знаков определяется из уравнений движения. Выражения для косинусов γ_2, γ_3 также могут быть немедленно выписаны. Решение содержит одну произвольную постоянную τ.

В. А. Стеклов заканчивает свое исследование [1] словами:

«Но это движение возможно для весьма обширного класса тел, центр тяжести которых лежит на средней главной оси инерции, соответствующей неподвижной точке, ибо четыре величины A, B, C, x_c, характеризующие подобного рода тела, подчинены в сущности единственному ограничению $A > 2C$, если

$$B > A > C \quad ».$$

Небольшое дополнение, которое здесь возможно при принятом по С. А. Чаплыгину [2] способе исследования этого случая, состоит в следующем.

Пусть теперь $N < 0$. Как и выше, установим, что теперь уже будет $\alpha > 0$; следовательно, $A > B$. Таким образом, этот дополнительный случай характеризуется условиями

$$2C < A, \qquad A > B, \qquad y_c = z_c = 0$$

В отличие от случая В. А. Стеклова центр тяжести тела лежит на оси максимального момента инерции.

Дифференциальное уравнение для p будет

$$\frac{dp}{dt} = -\sqrt{-R}\sqrt{(p^2 - \varkappa^2)(p^2 - \sigma^2)}$$

где

$$\sigma^2 = -\nu^2 > 0, \qquad R < 0, \qquad \varkappa^2 > 0, \qquad \frac{\varkappa^2}{\sigma^2} < 1$$

Правая часть этого уравнения вещественна либо при $p^2 \geqslant \sigma^2$, либо при $p^2 \leqslant \varkappa^2$.

Первая из этих возможностей должна быть отброшена, так как влечет за собой отрицательность живой силы T тела. Действительно, T, будучи выраженной через p, имеет вид:

$$T = \frac{A(A-C)(A-B)}{(2B-A)(2C-A)}\, p^2 + \frac{NA^2}{2(B-A)(A-C)}$$

Отсюда следует ограничение для p:

$$p^2 < \frac{A}{2(A-C)}\,\sigma^2 \qquad \text{или} \qquad p^2 < \frac{A}{2(A-B)}\,\varkappa^2$$

Поэтому в соответствии со второй возможностью положим

$$p^2 = \varkappa^2 \sin^2 \vartheta, \qquad v = \sigma\sqrt{-R}\,(t+\tau)$$

Будем иметь

$$p = \varepsilon_1 \varkappa \operatorname{sn} v, \quad q = \varepsilon_2 \varkappa \sqrt{\frac{A(A-C)}{(B-C)(2B-A)}} \operatorname{cn} v, \quad r = \varepsilon_3 \varkappa \sqrt{\frac{A(A-C)}{(A-2C)(B-C)}} \operatorname{dn} v$$

$$\gamma_1 = \frac{N}{Q}\left(1 - \frac{A}{A-C}\operatorname{sn}^2 v\right), \qquad k^2 = \frac{\varkappa^2}{\sigma^2} = \frac{A-B}{A-C}$$

Подстановка полученного решения в уравнения (1) показывает, что эти уравнения удовлетворяются при произвольно выбранных знаках у ε_j, лишь бы выполнялось условие

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1$$

Поступила 18 XII 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Стеклов В. А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Труды Отделения физ. наук Общества любителей естествознания. 1899. Т. X. Вып. 1.
2. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Там же. 1903. Т. XI; собр. соч. Т. I. ОГИЗ. 1948.