Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Г. Малкин

(Свердловск)

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

и допустим сначала, что коэффициенты p_{sj} являются постоянными и что характеристическое уравнение этой системы имеет корни только с отрицательными вещественными частями. Пусть $W(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная определенно положительная форма какого-нибудь порядка m. Согласно известной теореме Ляпунова [1] существует одна и только одна форма $V(x_1, \ldots, x_n)$ того же порядка, производная которой, составленная в силу уравнений (1), равна форме $-W$, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n) = -W(x_1, \ldots, x_n) \tag{2}$$

и притом форма V получится также определенно положительной.

Эта классическая теорема играла большую роль в исследовании Ляпунова. При этом Ляпунову не приходилось пользоваться явным видом формы V, так как для тех задач, которые он рассматривал, достаточно было самого факта существования этой формы. В последние годы теорема Ляпунова о форме V нашла применение при решении ряда технических задач; при этом важное значение имеет и ее явное выражение через коэффициенты формы W. Это выражение может быть получено методом неопределенных коэффициентов, причем придется решать систему N линейных алгебраических уравнений, где

$$N = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!}$$

представляет собой число членов формы m-го порядка от n переменных.

Можно, однако, дать простое выражение для формы V непосредственно через форму W и фундаментальную систему решений уравнений (1).

Пусть $x_{sj}(t)$ — фундаментальная система решений уравнений (1), определяемая начальными условиями

$$x_{sj}(0) = \delta_{sj} \qquad (\delta_{sj} \text{ — символ Кронекера}).$$

Тогда, полагая

$$y_s = x_{s1}(\tau)\,x_1 + x_{s2}(\tau)\,x_2 + \cdots + x_{sn}(\tau)\,x_n \tag{3}$$

можно записать

$$V = \int_0^\infty W(y_1, \ldots, y_n)\,d\tau \tag{4}$$

Построенная таким образом форма V будет, очевидно, определенно положительной. Можно непосредственно показать, что она удовлетворяет уравнению (2).

Поставим задачу шире. Допустим, что коэффициенты p_{sj} являются непрерывными и ограниченными функциями t на $[0, \infty)$. Обозначим через $x_{sj}^{\circ}(t, t_0)$ фундаментальную систему решений уравнений (1), определяемую начальными условиями

$$x_{sj}^{\circ}(t_0, t_0) = \delta_{sj}$$

Легко показать, что функции $x_{s1}^{\circ}(\tau, t), \ldots, x_{sn}^{\circ}(\tau, t)$, в которых τ рассматривается как постоянная, удовлетворяют системе уравнений, сопряженной с (1), так что можно написать

$$\frac{dx_{sj}^{\circ}(\tau, t)}{dt} + \sum_{\alpha=1}^{n} p_{\alpha j} x_{s\alpha}^{\circ}(\tau, t) = 0 \qquad (j, s = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

Допустим, что для уравнений (1) выполняются условия

$$|x_{sj}^{\circ}(t, t_0)| < Me^{-\alpha(t-t_0)} \qquad \text{при } t \geqslant t_0, \ t_0 \geqslant 0 \tag{6}$$

где M и α — некоторые не зависящие от t_0 положительные постоянные.

При выполнении этого условия все характеристические числа системы (1), очевидно, положительны. Однако обратное предложение, вообще говоря, несправедливо. Может случиться, что система (1) обладает положительными характеристическими числами, но для нее условия (6) не выполняются.

К. П. Персидский [2] показал, что если для уравнений (1) существует определенно положительная функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ (функция Ляпунова), допускающая бесконечно малый высший предел, производная которой по t, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно отрицательная, то условия (6) будут выполняться.

Мы показали [3], что справедливо также и обратное предложение: при выполнении условий (6) для системы (1) существует функция V, обладающая только что перечисленными свойствами.

Покажем, что имеет место более точная теорема, являющаяся непосредственным обобщением теоремы Ляпунова. А именно, покажем, что если выполняются условия (6), то какова бы ни была наперед заданная определенно положительная форма $W(t, x_1, \ldots, x_n)$ какого-нибудь порядка m, коэффициенты которой являются ограниченными функциями времени, существует определенно положительная форма $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ того же порядка, коэффициенты которой являются также ограниченными функциями времени, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n) = -W \tag{7}$$

При этом форма V определяется формулой

$$V = \int_t^{\infty} W(\tau, y_1, \ldots, y_n)\, d\tau \tag{8}$$

где

$$y_s = x_{s1}^{\circ}(\tau, t)\, x_1 + \cdots + x_{sn}^{\circ}(\tau, t)\, x_n \tag{9}$$

Напомним, что согласно Ляпунову зависящая от t форма $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ считается определенно положительной, если она при любых значениях $t, x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяет неравенству

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant V^*(x_1, \ldots, x_n)$$

где V^* — не зависящая от t определенно положительная форма.

Переходим к доказательству этого предложения. Коэффициенты формы V представляют собой суммы членов вида

$$P(t) = \int_t^\infty f(\tau)\, x_{s_1 j_1}^{\circ\, m_1}(\tau, t) \ldots x_{s_n j_n}^{\circ\, m_n}(\tau, t)\, d\tau \tag{10}$$

где $f(\tau)$ — некоторые непрерывные и ограниченные функции, представляющие собой линейные комбинации с целочисленными коэффициентами коэффициентов формы W, а $m_1, \ldots, m_n$ — целые неотрицательные числа, для которых $m_1 + \ldots + m_n = m$.

Из условий (6) сразу вытекает, что все интегралы (10) сходятся и, следовательно, форма V действительно существует. Более того, из этих неравенств сразу вытекает, что все функции (10) ограничены при $t \geqslant 0$. Действительно, имеем

$$|P(t)| < M^m \int_t^\infty |f(\tau)|\, e^{-m\alpha(\tau - t)}\, d\tau < M^m A \int_t^\infty e^{-m\alpha(\tau - t)}\, d\tau = \frac{M^m A}{m\alpha}$$

где A — верхний предел функции $|f(\tau)|$. Таким образом, форма V обладает ограниченными коэффициентами и, следовательно, допускает бесконечно малый высший предел.

Форма V, как это непосредственно следует из (8), будет во всяком случае положительной. Покажем, что она является определенно положительной.

Обозначим с этой целью через $\Delta(\tau, t)$ определитель $|x_{sj}^\circ(\tau, t)|$, а через $\Delta_{sj}(\tau, t)$ его минор, соответствующий элементу $x_{sj}^\circ(\tau, t)$, и рассмотрим форму m-го порядка переменных y_s

$$W(\tau, y_1, \ldots, y_n) - \lambda^2 \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{\beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau, t)\, y_\beta \right\}^m \tag{11}$$

где λ — вещественное число. Из (6) следует, что для величин $\Delta_{\beta\alpha}(\tau, t)$ (при $\tau > t$) могут быть назначены некоторые, не зависящие ни от τ, ни от t постоянные верхние пределы. И так как W есть форма определенно положительная, то отсюда следует, что постоянную λ^2 можно выбрать настолько малой, чтобы форма (11) была также определенно положительной. Мы будем предполагать, что λ^2 действительно выбрано согласно этому условию. Следовательно, если в выражение (11) подставим вместо y_s любые величины, то оно будет принимать положительные значения. В частности, если положим

$$y_s = x_{s1}^\circ(\tau, t)\, x_1 + \ldots + x_{sn}^\circ(\tau, t)\, x_n$$

то будем иметь

$$W(\tau, y_1, \ldots, y_n) - \lambda^2 \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{\gamma, \beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau, t)\, x_{\beta\gamma}^\circ(\tau, t)\, x_\gamma \right\}^m > 0$$

Но

$$\sum_{\gamma, \beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau, t)\, x_{\gamma\beta}^\circ(\tau, t)\, x_\gamma = \Delta(\tau, t)\, x_\alpha$$

Следовательно,

$$W(\tau, y_1, \ldots, y_n) - \lambda^2 \Delta^m(\tau, t)\, (x_1^m + \ldots + x_n^m) > 0$$

Отсюда на основании (8) находим

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) > \lambda^2 Q(t)\, (x_1^m + \ldots + x_n^m) \tag{12}$$

где

$$Q(t) = \int_t^\infty \Delta^m(\tau, t)\, dt = \int_t^\infty \exp\left\{ m \sum_{s=1}^{n} \int_t^\tau p_{ss}(t)\, dt \right\}$$

Далее имеем тождественно

$$\int_t^\infty \sum_{s=1}^n p_{ss}(\tau) \exp\left\{m \sum_{s=1}^n \int_t^\tau p_{ss}(t)\, dt\right\} d\tau = -\frac{1}{m}$$

Применяя теорему о среднем значении, найдем

$$\left(\sum_{s=1}^n p_{ss}\right)^* Q(t) = -\frac{1}{m} \qquad (13)$$

где $\Sigma p_{ss}{}^*$ — среднее значение функции Σp_{ss} в интервале (t, ∞). Но так как функции p_{ss} ограничены, а функция $Q(t)$ положительна, то из (13) следует, что функция $Q(t)$ превосходит при любом $t \geqslant 0$ некоторую положительную постоянную a^2. Следовательно, из (12) находим

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) > \lambda^2 a^2 (x_1{}^m + \ldots + x_n{}^m)$$

что показывает, что форма V определенно положительна.

Покажем, наконец, что форма V удовлетворяет уравнению (7). (Это предложение является частным случаем более общего предложения, доказанного И. Л. Массера [4].) Имеем

$$\frac{dV}{dt} = -W(\tau, y_1 \ldots y_n)_{\tau=t} + \int_t^\infty \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial W}{\partial y_\alpha} \frac{dy_\alpha}{dt}\, d\tau$$

Но, принимая во внимание (9), (1) и (5):

$$\frac{dy_\alpha}{dt} = \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{dx_{\alpha\beta}{}^\circ(\tau, t)}{dt} x_\beta + x_{\alpha\beta}{}^\circ(\tau, t) \frac{dx_\beta}{dt}\right) =$$

$$= \sum_{\beta=1}^n x_\beta \left(\frac{dx_{\alpha\beta}{}^\circ(\tau, t)}{dt} + \sum_{\gamma=1}^n p_{\gamma\beta} x_{\alpha\gamma}{}^\circ(\tau, t)\right) = 0$$

Отсюда находим

$$\frac{dV}{dt} = -W(\tau, y_1, \ldots, y_n)_{\tau=t} = -W(t, x_1, \ldots, x_n)$$

что и доказывает, что функция V удовлетворяет уравнению (7). Таким образом, функция V удовлетворяет всем требуемым условиям.

Если p_{sj} постоянны, то, полагая в (8) $\tau = u + t$, получим формулу (4), так как для случая постоянных p_{sj}

$$x_{sj}{}^\circ(u + t, t) = x_{sj}{}^\circ(u, 0) = x_{sj}(u)$$

Поступила 22 VI 1951

Уральский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат. 1950.
2. Персидский К. П. К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Известия физ.-мат. общества при Казанском гос. университете. 1936—1937. Т. XIII.
3. Малкин И. Г. Об устойчивости по первому приближению. Сб. научных трудов Казанского авиационного института. 1935. № 3.
4. Massera I. L. On Liapounoff's conditions of stability. Annals of Mathematics. 1949. T. 50. No 3.