Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ МАРКОВА-ЭРМИТА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. С. Мухин

(Москва)

Формулы для численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений экстраполяционно-интерполяционным методом обычно получаются путем интегрирования интерполяционных полиномов Лагранжа, Ньютона и др. Более широкий класс формул может быть получен при интегрировании интерполяционных полиномов Маркова-Эрмита.

Эти формулы, связывающие значения искомой функции и ее производных, являются обобщением формул, полученных применением обычных интерполяционных полиномов.

Следует, однако, отметить, что использование приводимых в настоящей работе формул является целесообразным в том случае, когда первая производная от правой части уравнения $y' = f(x, y)$ вычисляется без особого труда.

§ 1. Интерполирование с кратными узлами. Обычные интерполяционные формулы Ньютона, Лагранжа, Гаусса, Стирлинга, Бесселя, Эверетта дают возможность построить полином, значения которого в узлах интерполяции совпадают с значениями приближаемой функции. Марковым [1] и Эрмитом [2] была решена более общая интерполяционная задача: построены интерполяционные полиномы, имеющие в узлах интерполяции касание порядка t ($t = 0, 1, 2, \ldots$) с приближаемой функцией. Марков впервые применил такие интерполяционные полиномы для решения практических задач. Формула для интерполяционного полинома, учитывающая совпадение значений функции и ее производных с значениями интерполяционного полинома и его производных в узлах интерполяции, приводится здесь в виде, данном Гончаровым [3], с незначительными изменениями в обозначениях

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \Phi_i \sum_{k=0}^{\alpha_i - 1} \left[f_i^{(k)} \frac{(x - x_i)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\alpha_i - k - 1} \left(\frac{1}{\Phi_i} \right)_{(x_i)}^{(j)} \frac{(x - x_i)^j}{j!} \right] \right\} + R(x) \qquad (1.1)$$

Здесь $P(x)$ — полином степени m, который в n различных точках x_k ($k = 1, \ldots, n$) принимает вместе со своими производными порядка t ($t = 0, 1, \ldots, \alpha_k - 1$) данные значения $f_k^{(t)}$; предполагается, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = m + 1$ и

$$\Phi_i = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_{i-1})^{\alpha_{i-1}} (x - x_{i+1})^{\alpha_{i+1}} \ldots (x - x_n)^{\alpha_n}$$

Остаточный член имеет вид:

$$R_{(x)} = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^{\alpha_i} \qquad (1.2)$$

где ξ — некоторая внутренняя точка отрезка $[x_1; x_n]$, при этом предполагается, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

§ 2. Вывод формул для численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Одним из распространенных методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений является экстраполяционно-интерполяционный метод.

В применении к уравнению $y' = f(x, y)$ этот метод заключается в следующем: правая часть уравнения заменяется интерполяционным полиномом $P(x)$ с остаточным членом $R(x)$

$$y' = P(x) + R(x) \tag{2.1}$$

В качестве полинома P используются интерполяционные полиномы Лагранжа, Ньютона, Бесселя и др.

Полином P строится по заданным значениям $f(x_1, y_1), \ldots, f(x_n, y_n)$:

$$P(x_i) = f(x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Интегрируя уравнение (2.1) в пределах от x_n до x_{n+1}, а также от x_{n-1} до x_n, получим соответственно экстраполяционную и интерполяционную формулы

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P\,dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} R\,dx, \quad y_n = y_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} P\,dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} R\,dx \tag{2.2}$$

Первая из формул (2.2) дает выражение y_{n+1} через $y_n, y_1', \ldots, y_n'$, вторая y_n через $y_{n-1}, y_1', y_2', \ldots, y_n'$; при помощи итераций последнюю формулу можно использовать для уточнения значений y, получаемых по первой формуле (2.2).

Желая повысить точность формул для численного интегрирования уравнений, естественно попытаться заменить правую часть уравнения $y' = f(x, y)$ интерполяционным полиномом $P(x)$ с кратными узлами. При этом запись формул (2.2) сохраняется.

Выведем некоторые формулы для решения уравнений вида $y' = f(x, y)$, используя для замены правой части этого уравнения частные виды интерполяционных полиномов Маркова-Эрмита.

Во всех дальнейших рассуждениях предполагается, что узлы интерполяции находятся на равном расстоянии один от другого, т. е. $x_{i+1} - x_i = h$.

Построим полином $P(x)$ второй степени, который удовлетворяет условиям

$$P(x_{n-1}) = f(x_{n-1}, y_{n-1}), \qquad P'(x_{n-1}) = f'(x_{n-1}, y_{n-1}), \qquad P(x_n) = f(x_n, y_n)$$

Геометрический смысл этих условий состоит в том, что P и f имеют в точке x_{n-1} общую касательную. Принимая во внимание, что для данного случая

$$\alpha_{n-1} = 2, \qquad \alpha_n = 1, \qquad m + 1 = \alpha_n + \alpha_{n-1} = 3,$$
$$\Phi_{n-1} = x - x_n, \qquad \Phi_n = (x - x_{n-1})^2$$

подставим в уравнение (2.1) выражение для интерполяционного полинома P и его остаточного члена R, используя формулы (1.1) и (1.2). Получим

$$y' = \Phi_{n-1} \sum_{k=0}^{\alpha_{n-1}-1} \left[f_{n-1}^{(k)} \frac{(x - x_{n-1})^k}{k!} \sum_{j=0}^{\alpha_{n-1}-k-1} \left(\frac{1}{\Phi_{n-1}} \right)_{(x_{n-1})}^{(j)} \frac{(x - x_{n-1})^j}{j!} \right] +$$
$$+ \Phi_n \sum_{k=0}^{\alpha_n - 1} \left[f_n^{(k)} \frac{(x - x_n)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\alpha_n - k - 1} \left(\frac{1}{\Phi_n} \right)_{(x_n)}^{(j)} \frac{(x - x_n)^j}{j!} \right] + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \prod_{i=n-1}^{n} (x - x_i)^{\alpha_i}$$

или

$$y' = (x - x_n)\Big[f_{n-1} \sum_{j=0}^{1} \left(\frac{1}{\Phi_{n-1}}\right)^{(j)}_{(x_{n-1})} \frac{(x - x_{n-1})^j}{j!} + f'_{n-1}\left(\frac{1}{\Phi_{n-1}}\right)_{(x_{n-1})}\Big] +$$

$$+ f_n \frac{(x - x_{n-1})^2}{\Phi_n(x_n)} + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_{n-1})^2 (x - x_n)$$

Так как

$$\sum_{j=0}^{1} \left(\frac{1}{\Phi_{n-1}}\right)^{(j)}_{(x_{n-1})} \frac{(x - x_{n-1})^j}{j} = \frac{1}{\Phi_{n-1}(x_{n-1})} - \frac{x - x_{n-1}}{\Phi_{n-1}{}^2(x_{n-1})}$$

$$\Phi_{n-1}(x_{n-1}) = x_{n-1} - x_n = -h, \qquad \Phi_n(x_n) = x_n - x_{n-1} = h$$

то

$$y' = -\left[\frac{(x - x_n)}{h} + \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})}{h}\right] f_{n-1} - \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})}{h} f'_{n-1} +$$

$$+ \frac{(x - x_{n-1})^2}{h^2} f_n + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_{n-1})^2 (x - x_n) \tag{2.3}$$

Проинтегрируем уравнение (2.3) в пределах от x_{n-1} до x_{n+1}. При вычислениях интегралов удобно произвести замену $x - x_n = t$, причем пределы изменятся соответственно на $+h$ и $-h$.

В результате для y_{n+1} получим формулу экстраполяционного типа:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \tfrac{2}{3} h (4f_n - hf'_{n-1} - f_{n-1}) + \tfrac{2}{9} h^4 f'''(\xi_1) \tag{2.4}$$

Для получения интерполяционной формулы интегрируем то же уравнение (2.3) в пределах от x_{n-1} до x_n. Выполнив вычисления, получим формулу Дюффинга[4]:

$$y_n = y_{n-1} + \tfrac{1}{6} h (4f_{n-1} + hf'_{n-1} + 2f_n) - \tfrac{1}{72} h^4 f'''(\xi_2) \tag{2.5}$$

Рассмотрим случай, когда правая часть уравнения $y' = f(x, y)$ заменяется интерполяционными полиномами Маркова-Эрмита третьей степени.

Возьмем интерполяционный полином, удовлетворяющий следующим условиям:

$$P(x_{n-1}) = f(x_{n-1}, y_{n-1}), \qquad P'(x_{n-1}) = f'(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$P(x_n) = f(x_n, y_n), \qquad P'(x_n) = f'(x_n, y_n) \tag{2.6}$$

Геометрический смысл этих условий состоит в том, что P и f имеют общие касательные в точках x_{n-1} и x_n.

Составим выражение для $P(x)$, удовлетворяющее условиям (2.6), и выражение для его остаточного члена; подставив их в уравнение (2.1), получим

$$y' = \left[\frac{1}{h^2}(x - x_n)^2 + \frac{2}{h^3}(x - x_n)^2 (x - x_{n-1})\right] f_{n-1} +$$

$$+ \frac{f'_{n-1}}{h^2}(x - x_n)^2 (x - x_{n-1}) + \left[\frac{(x - x_{n-1})^2}{h^2} - \frac{2(x - x_{n-1})^2 (x - x_n)}{h^3}\right] f_n +$$

$$+ \frac{f'_n}{h^2}(x - x_{n-1})^2 (x - x_n) + \frac{f^{\mathrm{IV}}(\xi)}{4!}(x - x_{n-1})^2 (x - x_n)^2 \tag{2.7}$$

Проинтегрировав это уравнение в пределах от x_{n-1} до x_{n+1}, найдем экстраполяционную формулу:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf_{n-1} + \tfrac{2}{3} h^2 (f'_{n-1} + 2f'_n) + \tfrac{2}{45} h^5 f^{\mathrm{IV}}(\xi_1) \tag{2.8}$$

Интегрируя то же уравнение (2.7) в пределах от x_{n-1} до x_n, получим интерполяционную формулу Эйлера-Маклорена:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2} h (f_n + f_{n-1}) - \frac{1}{12} h^2 (f_n{}' - f'_{n-1}) + \frac{1}{720} h^5 f^{\mathrm{IV}} (\xi_2) \qquad (2.9)$$

Чтобы получить интерполяционную формулу, не содержащую члена с f_n', проинтегрируем уравнение (2.7) в пределах от x_n до x_{n-2}; найдем

$$y_{n-2} = y_n - 2hf_n + \frac{4}{3} h^2 f'_{n-1} + \frac{2}{3} h^2 f_n{}' - \frac{2}{45} h^5 f^{\mathrm{IV}} (\xi_3)$$

К полученной формуле прибавим формулу (2.9), умноженную на восемь. В результате получим формулу вида

$$7y_n = 8y_{n-1} - y_{n-2} + 2h (2f_{n-1} + hf'_{n-1} + f_n) - \frac{1}{30} h^5 f^{\mathrm{IV}} (\xi_4) \qquad (2.10)$$

Рассмотрим интерполяционный полином, удовлетворяющий условиям

$$P(x_{n-2}) = f(x_{n-2}, y_{n-2}), \qquad P(x_{n-1}) = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$
$$P'(x_{n-1}) = f'(x_{n-1}, y_{n-1}), \qquad P(x_n) = f(x_n, y_n)$$

Составив выражения полинома и его остаточного члена и подставив их в уравнение (2.1), получим

$$y' = -\frac{(x - x_{n-1})^2 (x - x_n)}{2h^3} f_{n-2} - \frac{(x - x_{n-2})(x - x_n)}{h^2} f_{n-1} -$$
$$- \frac{(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})(x - x_n)}{h^2} f'_{n-1} + \frac{(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})^2}{2h^3} f_n +$$
$$+ \frac{f^{\mathrm{IV}}(\xi)}{4!} (x - x_{n-2})(x - x_{n-1})^2 (x - x_n) \qquad (2.11)$$

Интегрируя уравнение (2.11) в пределах от x_{n-1} до x_{n+1}, от x_{n-1} до x_{n-2}, от x_{n-1} до x_n и от x_{n-3} до x_{n-1}, получим соответственно

$$y_{n+1} = y_{n-1} - \frac{2}{3} hf_{n-2} - \frac{2}{3} hf_{n-1} - 2h^2 f'_{n-2} + \frac{10}{3} hf_n + \frac{7}{45} h^5 f^{\mathrm{IV}} (\xi_1) \qquad (2.12)$$

$$y_{n-2} = y_{n-1} - \frac{7}{24} hf_{n-2} - \frac{2}{3} hf_{n-1} + \frac{1}{4} h^2 f'_{n-1} - \frac{1}{24} hf_n + \frac{1}{180} h^5 f^{\mathrm{IV}} (\xi_2) \qquad (2.13)$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{24} hf_{n-2} + \frac{2}{3} hf_{n-1} + \frac{1}{4} h^2 f'_{n-1} + \frac{7}{24} hf_n - \frac{1}{180} h^5 f^{\mathrm{IV}} (\xi_3) \qquad (2.14)$$

$$y_{n-3} = y_{n-1} - \frac{10}{3} hf_{n-2} + \frac{2}{3} hf_{n-1} - 2h^2 f'_{n-1} + \frac{2}{3} hf_n - \frac{7}{45} h^5 f^{\mathrm{IV}} (\xi_4) \qquad (2.15)$$

Для получения экстраполяционной формулы, не содержащей члена с f'_{n-1}, сложим формулу (2.12) с формулой (2.13), умноженной на восемь. Это дает

$$y_{n+1} = 9y_{n-1} - 8y_{n-2} - 3h (f_{n-2} + 2f_{n-1} - f_n) + \frac{1}{45} h^5 [7f^{\mathrm{IV}} (\xi_1) + 2f^{\mathrm{IV}} (\xi_2)]$$

Рассмотрим остаточный член этой формулы, представив его в виде

$$\frac{1}{5} h^5 [\frac{1}{9} (7f^{\mathrm{IV}} (\xi_1) + 2f^{\mathrm{IV}} (\xi_2)]$$

Так как значение выражения в квадратных скобках заключено между наибольшим и наименьшим значениями $f^{\mathrm{IV}}(x, y)$ на отрезке $[x_{n-2}, x_{n+1}]$, то и оно представляет одно из значений функции $f^{\mathrm{IV}}(x, y)$ на этом же отрезке. Поэтому окончательно имеем

$$y_{n+1} = 9y_{n-1} - 8y_{n-2} - 3h(f_{n-2} + 2f_{n-1} - f_n) + \frac{1}{5}h^5 f^{\mathrm{IV}}(\eta_1) \tag{2.16}$$

Еще одну экстраполяционную формулу [5] без члена с f'_{n-1} можно получить, взяв разность сумм формул (2.12), (2.14) и (2.13), (2.15):

$$y_{n+1} = y_{n-3} + y_{n-2} - y_n + 3h(f_{n-2} + f_n) + \frac{3}{10}h^5 f^{\mathrm{IV}}(\eta_2) \tag{2.17}$$

Если из формулы (2.12) вычесть формулу (2.15), то получим формулу Милна [6]:

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4}{3}h(2f_{n-2} - f_{n-1} + 2f_n) + \frac{14}{45}h^5 f^{\mathrm{IV}}(\eta_3)$$

которая является в настоящее время одной из распространенных формул для численного решения дифференциальных уравнений. Сравнивая формулы (2.16), (2.17) и формулу Милна, видим, что для случаев, когда h не кратно трем, формулы (2.16) и (2.17) более удобны для вычислений, чем формула Милна, не уступая ей в то же время в точности.

Вычитая из формулы (2.14) формулу (2.13), получаем интерполяционную формулу, не содержащую члена с f'_{n-1}. Эта формула Симпсона, используемая для уточнения значений y в методе Милна:

$$y_n = y_{n-2} + \frac{1}{3}h(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) - \frac{1}{90}h^5 f^{\mathrm{IV}}(\eta_4) \tag{2.18}$$

Перейдем к рассмотрению случаев, когда правая часть уравнения $y' = f(x, y)$ заменяется интерполяционными полиномами Маркова-Эрмита четвертой степени.

Пусть $P(x)$ — интерполяционный полином, удовлетворяющий условиям

$$P(x_{n-2}) = f(x_{n-2}, y_{n-2}), \quad P(x_{n-1}) = f(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad P'(x_{n-1}) = f'(x_{n-1}, y_{n-1})$$
$$P''(x_{n-1}) = f''(x_{n-1}, y_{n-1}), \qquad P(x_n) = f(x_n, y_n)$$

Подставим этот полином вместе с остаточным членом в уравнение (2.1) и проинтегрируем получившееся уравнение в пределах от x_{n-1} до x_{n+1}, от x_{n-1} до x_{n-3}, от x_{n-1} до x_n и от x_{n-1} до x_{n-2}. Получившиеся формулы будут таковы:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{6}{5}hf_{n-2} - \frac{22}{5}hf_{n-1} - 2h^2 f'_{n-1} - \frac{56}{15}h^3 f''_{n-1} + \frac{26}{5}hf_n + \frac{1}{18}h^6 f^{\mathrm{V}}(\xi_1) \tag{2.19}$$

$$y_{n-3} = y_{n-1} - \frac{26}{5}hf_{n-2} + \frac{22}{5}hf_{n-1} - 2h^2 f'_{n-1} + \frac{56}{15}h^3 f''_{n-1} - \frac{6}{5}hf_n + \frac{1}{18}h^6 f^{\mathrm{V}}(\xi_2) \tag{2.20}$$

$$y_n = y_{n-1} - \frac{1}{40}hf_{n-2} + \frac{4}{5}hf_{n-1} + \frac{1}{4}h^2 f'_{n-1} + \frac{2}{15}h^3 f''_{n-1} + \frac{9}{40}hf_n - \frac{1}{1440}h^6 f^{\mathrm{V}}(\xi_3) \tag{2.21}$$

$$y_{n-2} = y_{n-1} - \frac{9}{40}hf_{n-2} - \frac{4}{5}hf_{n-1} + \frac{1}{4}h^2 f'_{n-1} - \frac{2}{15}h^3 f''_{n-1} + \frac{1}{40}hf_n - \frac{1}{1440}h^6 f^{\mathrm{V}}(\xi_4) \tag{2.22}$$

Экстраполяционные и интерполяционные формулы, не содержащие членов с f''_{n-1}, можно получить, сложив попарно формулы (2.19), (2.20) и (2.21), (2.22).

В результате находим

$$y_{n+1} = 2y_{n-1} - y_{n-3} + 4h\,(f_n - hf'_{n-1} - f_{n-2}) + \tfrac{1}{9}\,h^6 f^{\mathrm{V}}(\eta_1) \qquad (2.23)$$

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + \tfrac{1}{4}\,h\,(f_n + 2hf'_{n-1} - f_{n-2}) - \tfrac{1}{720}\,h^6 f^{\mathrm{V}}(\eta_2) \qquad (2.24)$$

Построим еще интерполяционный полином по условиям

$$P(x_{n-2}) = f(x_{n-2}, y_{n-2}),\ P'(x_{n-2}) = f'(x_{n-2}, y_{n-2}),\ P(x_{n-1}) = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$P(x_n) = f(x_n, y_n), \qquad P'(x_n) = f'(x_n, y_n) \qquad (2.25)$$

Уравнение (2.1) в которое подставлено значение полинома, удовлетворяющего условиям (2.25), имеет вид:

$$(2.26)$$

$$y' = -\left[\frac{(x-x_{n-1})(x-x_n)^2}{4h^3} + \frac{(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n)^2}{2h^4}\right] f_{n-2} -$$
$$- \frac{(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n)^2}{4h^3} f'_{n-2} + \frac{(x-x_{n-2})^2(x-x_n)^2}{h^4} f_{n-1} +$$
$$+ \left[\frac{(x-x_{n-2})^2(x-x_{n-1})}{4h^3} - \frac{(x-x_{n-2})^2(x-x_{n-1})(x-x_n)}{2h^4}\right] f_n +$$
$$+ \frac{(x-x_{n-2})^2(x-x_{n-1})(x-x_n)}{4h^3} f_n' + \frac{f^{\mathrm{V}}(\xi)}{5!}(x-x_{n-2})^2(x-x_{n-1})(x-x_n)^2$$

Интегрируя это уравнение, получим:

в пределах от x_{n-1} до x_{n+1}

$$y_{n+1} = y_{n-1} - \tfrac{31}{30}\,hf_{n-2} - \tfrac{13}{30}\,h^2 f'_{n-2} + \tfrac{46}{15}\,hf_{n-1} - \tfrac{1}{30}\,hf_n +$$
$$+ \tfrac{43}{30}\,h^2 f_n' + \tfrac{7}{180}\,h^6 f^{\mathrm{V}}(\xi_1) \qquad (2.27)$$

в пределах от x_{n-1} до x_{n-3}

$$y_{n-3} = y_{n-1} + \tfrac{1}{30}\,hf_{n-2} + \tfrac{43}{30}\,h^2 f'_{n-2} - \tfrac{46}{15}\,hf_{n-1} + \tfrac{31}{30}\,hf_n -$$
$$- \tfrac{13}{30}\,h^2 f_n' + \tfrac{7}{180}\,h^6 f^{\mathrm{V}}(\xi_2) \qquad (2.28)$$

в пределах от x_{n-1} до x_n

$$y_n = y_{n-1} - \tfrac{19}{240}\,hf_{n-2} - \tfrac{7}{240}\,h^2 f'_{n-2} + \tfrac{8}{15}\,hf_{n-1} + \tfrac{131}{240}\,hf_n -$$
$$- \tfrac{23}{240}\,h^2 f_n' + \tfrac{1}{720}\,h^6 f^{\mathrm{V}}(\xi_3) \qquad (2.29)$$

в пределах от x_{n-1} до x_{n-2}

$$y_{n-2} = y_{n-1} - \tfrac{131}{240}\,hf_{n-2} - \tfrac{23}{240}\,h^2 f'_{n-2} - \tfrac{8}{15}\,hf_{n-1} + \tfrac{19}{240}\,hf_n -$$
$$- \tfrac{7}{240}\,h^2 f_n' + \tfrac{1}{720}\,h^6 f^{\mathrm{V}}(\xi_4) \qquad (2.30)$$

Сложив попарно формулы (2.27), (2.28) и (2.29), (2.30), найдем экстраполяционную и интерполяционную формулы, имеющие простые коэффициенты:

$$y_{n+1} = 2y_{n-1} - y_{n-3} + h(f_n - f_{n-2}) + h^2(f_n' + f_{n-2}') + \tfrac{7}{90}h^6 f^{\mathrm{V}}(\eta_1) \quad (2.31)$$

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + \tfrac{5}{8}h(f_n - f_{n-2}) - \tfrac{1}{8}h^2(f_n' + f_{n-2}') + \tfrac{1}{360}h^6 f^{\mathrm{V}}(\eta_2) \quad (2.32)$$

Приведем, опуская вычисления формулы, соответствующие полиному пятой степени, удовлетворяющему условиям

$$P(x_{n-2}) = f(x_{n-2}, y_{n-2}), \qquad P'(x_{n-1}) = f'(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$P'(x_{n-2}) = f'(x_{n-2}, y_{n-2}), \qquad P(x_n) = f(x_n, y_n)$$

$$P(x_{n-1}) = f(x_{n-1}, y_{n-1}), \qquad P'(x_n) = f'(x_n, y_n)$$

Экстраполяционная формула:

$$y_{n+1} = 2y_{n-1} - y_{n-3} - 6h(f_n - f_{n-2}) + \tfrac{2}{3}h^2(5f'_{n-2} + 14f'_{n-1} + 5f'_n) +$$

$$+ \tfrac{107}{9450}h^7[f^{\mathrm{VI}}(\xi_1) - f^{\mathrm{VI}}(\xi_2)] \quad (2.33)$$

Интерполяционная формула [7]:

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + \tfrac{3}{8}h(f_n - f_{n-2}) - \tfrac{1}{24}h^2(f'_{n-2} - 8f'_{n-1} + f'_n) +$$

$$+ \tfrac{1}{9450}h^7[f^{\mathrm{VI}}(\xi_3) - f^{\mathrm{VI}}(\xi_4)] \quad (2.34)$$

Эти формулы далеко превосходят по точности большинство обычно применяемых формул.

Чтобы получить представление о точности приведенных формул, в табл. 1 даны результаты численного решения уравнения $y' = y$ с начальными условиями $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

В этой таблице указаны значения $e = y(1)$ с тем числом верных знаков, которое удалось получить по формулам данного вида. По каждой паре формул вычисления проводились, начиная с $x = 0$ до $x = 1$, с шагом $h = 0.1$.

Таблица 1

Формулы	$y(1)$
(2.4), (2.5)	2.7183
(2.17), (2.18)	2.71828
(2.23), (2.24)	2.718282
(2.33), (2.34)	2.7182818285

§ 3. Вывод формул для численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Численное решение экстраполяционно-интерполяционным методом уравнения $y'' = \varphi(x, y)$ состоит в замене правой части этого уравнения интерполяционным полиномом $P(x)$ с остаточным членом $R(x)$

$$y'' = P(x) + R(x) \quad (3.1)$$

с последующим двукратным интегрированием уравнения (3.1), как и в случае уравнения первого порядка в различных пределах.

Для решения дифференциальных уравнений второго порядка можно получить разнообразные формулы, используя в качестве полинома P в уравнении (3.1) интерполяционные полиномы Маркова-Эрмита различного вида.

Подставив, например, в уравнение (3.1) полином (2.11) и интегрируя это уравнение дважды, получим:

в пределах от x_{n-1} до x и от x_{n-1} до x_{n-3}

$$y_{n-3} = y_{n-1} - 2hy'_{n-1} + \frac{22}{15}h^2\varphi_{n-2} + \frac{2}{3}h^2\varphi_{n-1} + \frac{4}{15}h^3\varphi'_{n-1} - \\ - \frac{2}{15}h^2\varphi_n + \frac{1}{30}h^6\varphi^{\mathrm{IV}}(\xi_1) \tag{3.2}$$

в пределах от x_{n-1} до x и от x_{n-1} до x_{n+1}

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hy'_{n-1} - \frac{2}{15}h^2\varphi_{n-2} + \frac{2}{3}h^2\varphi_{n-1} - \frac{4}{15}h^3\varphi_{n-1} + \\ + \frac{22}{15}h^2\varphi_n + \frac{1}{30}h^6\varphi^{\mathrm{IV}}(\xi_2) \tag{3.3}$$

в пределах от x_{n-1} до x и от x_{n-1} до x_n

$$y_n = y_{n-1} + hy'_{n-1} + \frac{1}{60}h^2\varphi_{n-2} + \frac{5}{12}h^2\varphi_{n-1} + \frac{7}{60}h^3\varphi'_{n-1} + \\ + \frac{1}{15}h^2\varphi_n - \frac{1}{480}h^6\varphi^{\mathrm{IV}}(\xi_3) \tag{3.4}$$

в пределах от x_{n-1} до x и от x_{n-1} до x_{n-2}

$$y_{n-2} = y_{n-1} - hy'_{n-1} + \frac{1}{15}h^2\varphi_{n-2} + \frac{5}{12}h^2\varphi_{n-1} - \frac{7}{60}h^3\varphi'_{n-1} + \\ + \frac{1}{60}h^2\varphi_n - \frac{1}{480}h^6\varphi^{\mathrm{IV}}(\xi_4) \tag{3.5}$$

Сложив формулы (3.2) и (3.3), найдем экстраполяционную формулу[5]:

$$y_{n+1} = 2y_{n-1} - y_{n-3} + \frac{4}{3}h^2(\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1} + \varphi_n) + \frac{1}{15}h^6\varphi^{\mathrm{IV}}(\eta_1) \tag{3.6}$$

Вычитая из формулы (3.6) формулы (3.4) и (3.5), получим экстраполяционную формулу Милна:

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-2} - y_{n-3} + \frac{1}{4}h^2(5\varphi_n + 2\varphi_{n-1} + 5\varphi_{n-2}) + \frac{17}{240}h^6\varphi^{\mathrm{IV}}(\eta_2) \tag{3.7}$$

Сравнивая формулу (3.6) и экстраполяционную формулу Милна, видим, что формула (3.6) более удобна для вычислений, особенно для счетно-аналитических машин, и несколько превосходит формулу Милна в точности.

Складывая формулы (3.4) и (3.5), получим интерполяционную формулу Милна:

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + \frac{1}{12}h^2(\varphi_{n-2} + 10\varphi_{n-1} + \varphi_n) - \frac{1}{240}h^6\varphi^{\mathrm{IV}}(\eta) \tag{3.8}$$

Поступила 27 XI 1951

Институт точной механики и вычислительной техники АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Марков А. А. Исчисление конечных разностей. СПб. 1889.
2. Hermite Ch. Journal für die reine u. angewandte Mathematik. 1878. S. 84.
3. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. ГТТИ, 1934. Стр. 73.
4. Düffing G. Zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. u. 2. Ordnung. Forschungsarb. Geb. Ing.-Wesen. 1920. 244. S. 29—50.
5. Микеладзе Ш. Е. Обобщение метода численного интегрирования... Труды Тбилисского матем. ин-та. 1940. Т. VII.
6. Milne W. E. Numerical Integration of ordinary Differential Equations. The American Mathematical Monthly. 1926. Vol. 33. P. 445—460.
7. Милн В. Численный анализ. Изд. иностр. литературы. 1951. Стр. 89.