Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

# ОБ УДАРЕ ПЛОСКОЙ ГАЗОВОЙ СТРУИ В БЕЗГРАНИЧНУЮ СТЕНКУ

Н. А. Слезкин

(Москва)

В известной работе С. А. Чаплыгина *О газовых струях* [1] дан метод перехода от решения задачи о струйном обтекании прямолинейных стенок несжимаемой жидкостью к решению задачи о струйном обтекании тех же стенок сжимаемым газом при условии, что скорость ни в одной точке не превышает скорости звука.

Пользуясь этим методом С. А. Чаплыгина, построим формальное решение задачи об ударе в плоскую безграничную стенку газовой струи для случая, когда скорость основной струи на бесконечности перпендикулярна к стенке.

Задача об ударе струи несжимаемой жидкости конечной ширины в безграничную стенку рассматривалась в работе Н. Е. Жуковского *Видоизменение метода Киргоффа* [2] как частный случай задачи о соударений струй. В работе В. Шаха[3] эта задача рассматривалась самостоятельно, и решение ее доведено до определения распределения давления по самой стенке.

Воспроизведем вкратце решение этой задачи, следуя обычному методу теории струй. Допустим, что плоская струя несжимаемой жидкости конечной ширины ударяется в плоскую безграничную стенку, наклоненную к скорости частиц в струе на бесконечности под некоторым углом $\alpha$ (фиг. 1). Пусть $d$ обозначает ширину основной струи на бесконечности, а $d_1$ и $d_2$ — ширины ответвленных ее частей, примыкающих к стенкам.

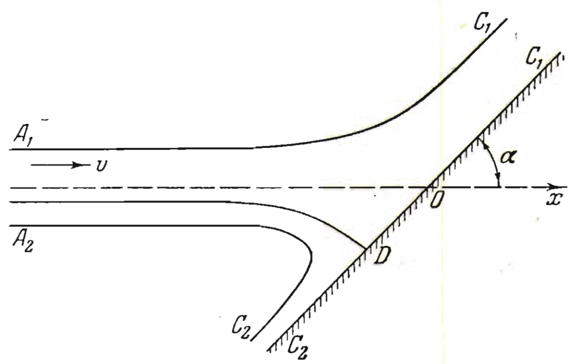
Применяя уравнения расхода, изменения количества движения и изменения момента количества движения относительно точки пересечения средней линии основной струи со стенкой, получим

$$d_1 = d\cos^2\frac{1}{2}\alpha$$

$$d_2 = d\sin^2\frac{1}{2}\alpha$$

$$R = \rho d v^2 \sin\alpha \qquad (1)$$

$$S_R = \frac{1}{2}\, d \operatorname{ctg}\alpha$$




Фиг. 1

Здесь $v$ — скорость частиц в основной струе на бесконечности, $R$ — величина равнодействующей сил давлений на всю стенку, $S_R$ — расстояние точки приложения равнодействующей до точки пересечения средней линии основной струи со стенкой.

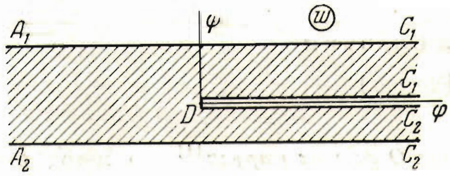
Жидкость предполагаем идеальной и несжимаемой, а ее движение установившимся, плоско-параллельным и безвихревым. Комплексный потенциал скоростей обозначим через $w = \varphi + i\psi$, где $\varphi$ — потенциал скоростей, $\psi$ — функция тока.

Линию тока, встречающую стенку в точке ветвления $D$ и разветвляющуюся по стенкам, зададим уравнением $\psi = 0$. Тогда для внешних линий тока $A_1C_1$ и $A_2C_2$ функция тока будет принимать значения

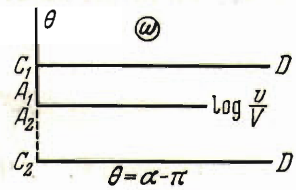
$$\psi_1 = vd_1, \quad \psi_2 = -vd_2$$

В точке $D$ потенциал скоростей положим равным нулю.

Если теперь ввести плоскость комплексного переменного $w$ и по оси абсцисс откладывать значения $\varphi$, а по оси ординат значения $\psi$, то на этой плоскости




Фиг. 2




Фиг. 3

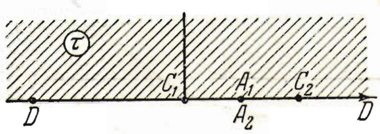
область, соответствующая области всей струи на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, будет представлять собой бесконечную полосу ширины $vd$ с разрезом вдоль положительной части действительной оси (фиг. 2). Эта область отображается на верхнюю полуплоскость вспомогательного переменного $\tau$ при помощи следующей формулы:

$$w = -\frac{dv}{\pi}\left[(1-a)\log\frac{\tau}{\tau - a} + a\log\frac{\tau - 1}{\tau - a}\right] \quad \left(a = \sin^2\frac{1}{2}\alpha\right) \tag{2}$$

Введем функцию Жуковского

$$\omega = \log\left(v\frac{dz}{dw}\right) = \log\frac{v}{V} + i\theta \tag{3}$$

где $V$ — модуль вектора скорости в произвольной точке, а $\theta$ — угол наклона этого вектора к оси абсцисс. На плоскости $\omega$ область, отвечающая области всей струи, представится в виде несимметрично расположенной относительно оси абсцисс полуполосы (фиг. 3), простирающейся вправо от мнимой оси до бесконечности и имеющей ширину, равную $\pi$. При помощи формулы преобразования Шварца для треугольника




Фиг. 4

$$2\tau - 1 = -\cos(\alpha + i\omega) \tag{4}$$

эта полуполоса отображается на верхнюю полуплоскость (фиг. 4) переменного $\tau$.

Разрешая равенство (4) относительно $\omega$ и подставляя $\omega$ из (3), получим

$$\frac{v}{V}e^{i\theta} = e^{i\alpha}\left[1 - 2\tau \pm \sqrt{\tau^2 - \tau}\right] \tag{5}$$

Для точек стенки от $D$ до $C_1$ перед корнем должен быть взят знак плюс, а для точек стенки от $D$ до $C_2$ — знак минус.

Так как имеем

$$dz = \frac{1}{V}e^{i\theta}dw$$

то на основании равенств (2) и (5) получим

$$dz = -\frac{d}{\pi}e^{i\alpha}a(1-a)\frac{1 - 2\tau \pm \sqrt{\tau^2 - \tau}}{\tau(\tau - 1)(\tau - a)}d\tau \tag{6}$$

Пользуясь соотношениями (2), (5) и (6), можно определить все основные характеристики задачи. В частности, для расстояния точки ветвления $D$ от точки пересечения средней линии основной струи со стенкой можно получить формулу

$$\frac{S_D}{d} = -\frac{1}{2\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{2\operatorname{tg} {}^1/_2\,\alpha} + \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)\sin\alpha + $$
$$+ \frac{1}{\pi}\left[\ln 2(1+\cos\alpha) - (1-\cos\alpha)\ln 2\sin\alpha\right] \tag{7}$$

Для давления будем иметь:

в точках стенки $DC_1$

$$\frac{P}{{}^1/_2\,\rho v^2} = 4\left[(1-2\tau)\sqrt{\tau^2-\tau} - 2(\tau^2-\tau)\right] \quad (-\infty < \tau < 0) \tag{8}$$

в точках стенки $DC_2$

$$\frac{P}{{}^1/_2\,\rho v^2} = 4\left[(2\tau-1)\sqrt{\tau^2-\tau} - 2(\tau^2-\tau)\right] \quad (1 < \tau < \infty) \tag{9}$$

Рассмотрим случай, когда вектор скорости частиц на бесконечности в основной струе перпендикулярен к направлению стенки. В этом случае $(\alpha = {}^1/_2\,\pi)$ из формулы (4) будем иметь

$$\tau = \frac{1}{2}(1+\sin i\omega) \tag{10}$$

Подставляя это значение $\tau$ в выражение (2), получим

$$w = \frac{dv}{\pi}\left[\ln(1-e^{-2\omega}) - \ln(1+e^{-2\omega})\right] \tag{11}$$

Полагая

$$\omega = \ln\frac{v}{V} + i\theta = \vartheta + i\theta, \quad w = \varphi_1 + i\psi_1, \quad vd = Q \tag{12}$$

и раскладывая в ряд логарифмы в (11), будем иметь

$$\frac{\pi}{Q}(\varphi_1 + i\psi_1) = -2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{2n+1}e^{-2(2n+1)(\vartheta+i\theta)} \tag{13}$$

Следовательно, функция тока для рассматриваемой задачи удара струи несжимаемой жидкости под прямым углом к стенке будет представляться в виде

$$\frac{\pi}{Q}\psi_1 = 2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2(2n+1)\vartheta}\,\frac{\sin 2(2n+1)\theta}{2n+1}$$

Заменяя

$$e^{-2\vartheta} = \frac{V^2}{v^2} = \frac{\chi}{\chi_0}, \quad \chi = \frac{V^2}{2\alpha}$$

где значение $\alpha$ будет выяснено позднее, это выражение для функции тока можно представить в виде

$$\frac{\pi\psi_1}{Q} = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^{2n+1}\frac{\sin 2(2n+1)\theta}{2n+1} \tag{14}$$

Как указано в работе С. А. Чаплыгина, решение задачи об ударе газовой струи в безграничную стенку будет представляться в виде

$$\frac{\pi\psi}{Q} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^{2n+1}\frac{Y_{2n+1}}{Y_{2n+1,0}}\,\frac{\sin 2(2n+1)\theta}{2n+1} \tag{15}$$

где $Y_{2n+1}$ — некоторая функция, представляемая гипергеометрическим рядом, а $Y_{2n+1,0}$ — ее частное значение при замене $\chi$ через $\chi_0$.

Заметим, что решение (15) можно получить предельным переходом и из того решения, которое было дано Чаплыгиным для задачи о давлении газового потока на пластинку в четвертой главе его работы. В самом деле, на стр. 59 решение задачи о давлении газового потока на пластинку представлено в виде

$$\frac{\pi\psi}{Q} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^n \frac{Y_n}{Y_{n,0}} \sin 2n\theta \, (1 - \cos 2nm) \tag{16}$$

где $m$ — угол наклона скорости на бесконечности в струе после ее разветвления к средней линии основной струи. Следовательно, для перехода от решения (16) к решению (15) надо лишь положить $m = {}^1/_2\,\pi$.

Благодаря этому обстоятельству можно воспользоваться результатами вычислений С. А. Чаплыгина и для рассматриваемой задачи. Например, для вычисления расстояний какой-либо точки стенки до точки ветвления можно воспользоваться формулой (74) работы Чаплыгина [1] с заменой постоянного предела через переменный. Таким образом, получим

$$y = \frac{Q}{\pi \sqrt{2\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^{n-1} \frac{1-(-1)^n}{n\chi_0^n Y_{n,0}} J(\chi) \right]$$

Здесь $J(\chi)$ определяется формулой (76) Чаплыгина

$$J(\chi) = \frac{2n}{4n^2-1} \chi^{n-{}^1/_2} Y_n \left[1 + 2n\left(1 + \frac{1}{n}\chi \frac{Y_n'}{Y_n}\right)\right] (1-\chi)^{-\beta}$$

где $Y_n'$ — производная $Y_n$ по переменному $\chi$.

Таким образом, расстояние какой-либо точки стенки до точки ветвления будет определяться следующей формулой: (17)

$$y = \frac{4Q}{\pi\sqrt{2\alpha}} \frac{(1-\chi)^{-\beta}}{\sqrt{\chi}} \sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^{2k+1} \frac{Y_{2k+1}}{Y_{2k+1,\,0}} \frac{1+2(2k+1)}{4(2k+1)^2-1} \left(1 + \frac{1}{2k+1} \chi \frac{Y'_{2k+1}}{Y_{2k+1}}\right)$$

Для давления в произвольной точке будем иметь

$$p = p_D (1-\chi)^{\beta} \tag{18}$$

где $p_D$ — давление в точке ветвления, а $\beta$ связано с показателем адиабаты $\gamma$ соотношением

$$\beta = \frac{1}{\gamma - 1} \tag{19}$$

Параметр $\alpha$ связан со скоростью звука в точке ветвления соотношением

$$\alpha = \frac{a_D^2}{\gamma - 1} \tag{20}$$

Таким образом, распределение давления при ударе плоской газовой струи в безграничную стенку будет определяться формулами (15)—(20).

Поступила 22 III 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Собрание сочинений. 1933. Т. II.
2. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгоффа. Собрание сочинений. 1936. Т. III. Стр. 250.
3. Schach W. Umlenkung eines freien Flüssigkeitsstrahles an einer ebenen Platte. Ingenieur-Archiv. 1934. Bd. V. H. 4.