Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

О ДВИЖЕНИИ ПОДОШВЕННОЙ ВОДЫ В СЛАБО НАКЛОНЕННЫХ ПЛАСТАХ

А. М. Пирвердян

(Баку)

1. Постановка задачи. В большинстве случаев задача о продвижении границы между нефтью и водой в пластах решается приближенно, при этом вследствие вводимых упрощений обычно не отражаются некоторые важные особенности процесса, имеющего место в реальных пластах.

Остановимся на одном примере, показывающем, к каким значительным ошибкам приводит такого рода рассмотрение. Пусть изучается движение водонефтяного зеркала в прямолинейном наклонном пласте на достаточном расстоянии от галлереи (цепочки скважин). Пренебрежем различием в вязкостях и плотностях обеих жидкостей. При таком предположении поверхность раздела AG между водой и нефтью (фиг. 1) будет все время оставаться параллельной своему первоначальному положению. Более подробное рассмотрение вопроса, учитывающее различие в вязкостях обеих жидкостей, показывает, что перемещающаяся поверхность раздела искривляется так, как это показано на фигуре пунктирной линией. Ниже будет показано, что для прямолинейного пласта при слабом его наклоне к горизонту скорости точек G и A линии раздела относятся между собой как квадраты величин вязкостей нефти $\mu_н$ и воды $\mu_в$. Так, при $\mu_н / \mu_в = 2$ скорость линии раздела у кровли пласта будет в четыре раза меньше, чем у подошвы. Указанное весьма резкое различие в скоростях и обуславливает довольно значительное удлинение водонефтяной зоны AG. Когда головная часть этой зоны достигнет скважин, расположенных на правом согласно фиг. 1 конце пласта, начнется процесс постепенного их обводнения. Естественно, что чем больше вязкость нефти (вернее, чем больше $\mu_н / \mu_в$), тем постепеннее будет происходить обводнение скважин. Эта весьма важная особенность процесса не учитывается теорией движения подошвенной воды, игнорирующей различие в вязкостях нефти и воды.

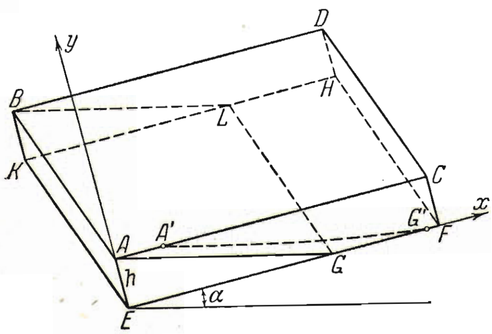
Предлагаемое ниже решение задачи из этой области учитывает различие в вязкостях нефти и воды. Ввиду значительных математических трудностей, возникающих в результате учета этого фактора, здесь исследуется простейшая гидродинамическая задача, а именно поток принимается линейным, пласт однородным и, кроме того, принимаются и другие допущения.

Тем не менее такое рассмотрение является полезным, так как приводит к некоторым новым заключениям о выгодной расстановке скважин и целесообразных пределах их эксплуатации, о темпах отбора из обводненных скважин и т. п.

2. Полосовая нефтяная залежь, слабо наклоненная к горизонту. Будем предполагать, что залежь имеет большую протяженность в длину AB и, кроме того, мощность ее h мала (фиг. 1). На верхнем конце залежи вдоль прямой CD находится батарея скважин, причем скважины расположены настолько близко друг от друга, что можно заменить эту батарею сплошной прямолинейной галлереей [1].

В таком случае мы можем считать, что все частицы жидкости двигаются параллельно стенке $ACFE$, т. е. считать задачу двумерной. Ввиду того что угол наклона пласта α мал, водонефтяное зеркало пересечет плоскость подошвы пласта также под малым углом.

Пусть в некоторый момент времени водонефтяное зеркало заняло положение $A'G'$ (фиг. 1). Предполагая, что скорости частиц нефти $u_{н}$ и воды $u_{в}$ дают (в силу незначительности угла наклона) небольшие составляющие в поперечном направлении y (расположение осей показано на чертеже), получим, что и распределяемые давления в сечении пласта подчиняются в достаточной степени близко гидростатическому закону. Тогда, обозначая через $(u_{н})_x$ и $(u_{н})_y$ составляющие скорости частиц нефти, легко получить



Фиг. 1

$$\frac{\partial (u_{н})_x}{\partial y} = 0$$

т. е. что скорости частиц нефти в любом поперечном сечении равны между собой.

То же самое имеет место для скоростей частиц воды. Рассмотрим некоторую точку M границы раздела. Спроектируем скорости частиц нефти $u_{н}$ и воды $u_{в}$, находящихся в этот момент в точке M, на касательное τ и нормальное n направления поверхности раздела.

В силу неразрывности течения нормальные проекции этих скоростей равны, т. е. $(u_{н})_n = (u_{в})_n$; касательные же проекции скоростей $(u_{н})_\tau$ и $(u_{в})_\tau$ определятся из следующего соотношения [2]:

$$\frac{(u_{в})_\tau}{(u_{н})_\tau} = \frac{\mu_{н}}{\mu_{в}} = \mu_0$$

Условие незначительности величины составляющих скорости частиц нефти в поперечном направлении будет выполняться при не слишком больших значениях коэффициента относительной вязкости μ_0. Поэтому предлагаемое ниже решение относится к случаю, когда вязкость нефти $\mu_{н}$ не на много превышает вязкость воды $\mu_{в}$. Выделим двумя бесконечно близкими сечениями в зоне контакта некоторый отсек dx. Пусть y — высота столба воды в этом отсеке; тогда $h - y$ будет высотой столба нефти. Обозначая через $u_{в}$ и $u_{н}$ соответственно скорости воды и нефти в данном сечении (одинаковые для данного сечения), получим

$$u_{в} = -\frac{k}{\mu_{в}}\left[\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \sin\alpha\right], \qquad u_{н} = -\frac{k}{\mu_{н}}\left[\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \sin\alpha\right] \tag{2.1}$$

Здесь k — коэффициент проницаемости, $\mu_{в}$, $\mu_{н}$ — соответственно вязкости воды и нефти, α — угол наклона пласта к горизонту. Удельные веса обеих жидкостей γ приняты одинаковыми.

Расходы $q_{в}$ и $q_{н}$ воды и нефти согласно принятым предположениям будут

$$q_{в} = u_{в} y = -\frac{k}{\mu_{в}} y \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \sin\alpha\right] \tag{2.2}$$

$$q_{н} = u_{н}(h - y) = -\frac{k}{\mu_{н}}(h - y)\left[\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \sin\alpha\right] \tag{2.3}$$

причем ширина площадки в направлении, перпендикулярном к плоскости xy, принята равной единице.

Уравнения неразрывности для двух фаз будут

$$\frac{\partial q_{в}}{\partial x} = -m\frac{\partial y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial q_{н}}{\partial x} = -m\frac{\partial}{\partial t}(h - y) \tag{2.4}$$

где m — пористость грунта.

Из (2.4) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}(q_{в} + q_{н}) = 0 \tag{2.5}$$

т. е. сумма расходов воды и нефти не зависит от координаты x (а в общем случае может зависеть от времени t).

Из уравнений (2.2) — (2.4) следует

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left[y\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma\sin\alpha\right)\right] = \frac{m\mu_{в}}{k}\frac{\partial y}{\partial t}\\ \frac{\partial}{\partial x}\left[(h-y)\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma\sin\alpha\right)\right] = -\frac{m\mu_{н}}{k}\frac{\partial y}{\partial t}\end{gathered} \tag{2.6}$$

Система (2.6) представляет собой нелинейные уравнения в частных производных второго порядка.

Пусть дебит q галлереи является некоторой функцией времени t. Согласно (2.5) имеем

$$q_{в} + q_{н} = q(t) \tag{2.7}$$

Тогда согласно (2.2) и (2.3)

$$q = -k\left(\frac{y}{\mu_{в}} + \frac{h-y}{\mu_{н}}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma\sin\alpha\right), \qquad q_{н} = \frac{(h-y)}{h+(\mu_0-1)\,y}\,q(t) \tag{2.8}$$

где $\mu_0 = \mu_{н}/\mu_{в}$. Подставляя $q_{н}$ во второе уравнение (2.4), получим

$$f(y)\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{q(t)}\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \qquad \left(\frac{\mu_0 h}{m\,[h+(\mu_0-1)\,y]^2} = f(y)\right) \tag{2.9}$$

Для интегрирования (2.9) введем новые переменные ξ и η, связанные со старыми следующим образом:

$$\xi = x + f(y)\int q(t)\,dt, \qquad \eta = x - f(y)\int q(t)\,dt \tag{2.10}$$

Имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial\xi}{\partial x} = 1 + f'(y)\frac{\partial y}{\partial x}\int q(t)\,dt, \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = q(t)\,f(y) + f'(y)\frac{\partial y}{\partial t}\int q(t)\,dt\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} = 1 - f'(y)\frac{\partial y}{\partial x}\int q(t)\,dt, \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} = -q(t)\,f(y) - f'(y)\frac{\partial y}{\partial t}\int q(t)\,dt\end{gathered} \tag{2.11}$$

Из (2.11) находим выражения для $\partial y/\partial x$ и $\partial y/\partial t$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\chi}\left(\frac{\partial y}{\partial\xi} + \frac{\partial y}{\partial\eta}\right), \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{q(t)\,f(y)}{\chi}\left(\frac{\partial y}{\partial\xi} - \frac{\partial y}{\partial\eta}\right) \tag{2.12}$$

где

$$\chi = 1 - f'(y)\left(\frac{\partial y}{\partial\xi} - \frac{\partial y}{\partial\eta}\right)\int q(t)\,dt \tag{2.13}$$

Подставляя $\partial y/\partial x$ и $\partial y/\partial t$ из (2.12) в уравнение (2.9), будем иметь $\partial y/d\xi = 0$, т. е. y является функцией только η; таким образом,

$$y = \Phi\left[x - f(y)\int q(t)\,dt\right] \tag{2.14}$$

В явной форме относительно x (2.14) будет выглядеть так:

$$x = \varphi(y) + f(y) \int q(t)\, dt \tag{2.15}$$

Вид функции $\varphi(y)$ определится из начального условия. В начальный момент времени водонефтяное зеркало занимает положение $ABLG$. Уравнение его имеет вид:

$$x = \frac{h - y}{\operatorname{tg} \alpha} = \varphi(y) \tag{2.16}$$

Подставляя в (2.15) $\varphi(y)$ и $f(y)$ согласно (2.16) и (2.9), получим уравнение движения водонефтяного контакта

$$x = \frac{h - y}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{h\mu_0}{m[h + (\mu_0 - 1)\, y]^2} \int_0^t q(\tau)\, d\tau \tag{2.17}$$

Скорости границы раздела в кровле и подошве пласта $v_к$ и $v_п$ определятся согласно (2.17) из следующих формул:

$$v_к = \frac{1}{m\mu_0 h} q(t), \qquad v_п = \frac{\mu_0}{mh} q(t), \qquad \frac{v_п}{v_к} = \mu_0{}^2$$

Можно показать, что $v_п$ есть действительная скорость частиц воды у подошвы на границе раздела фаз; $v_к$ есть скорость частиц нефти у кровли на той же границе.

Выше предполагалось, что при вытеснении нефти водой коэффициент проницаемости не меняется. Легко показать, что ход решения и структура конечных формул сохраняются, если принять $k_в \neq k_н$.

Приведенное решение можно рекомендовать для сравнительно небольших значений μ_0 (порядка $2 \div 3$) и малых углов наклона α (до 10°).

Поступила 13 XI 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкачев, В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. М.-Л. Гостоптехиздат. 1949.
2. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. М.—Л. Гостехиздат. 1948.