Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, Том XVI, 1952

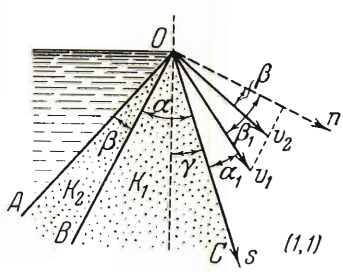
ФИЛЬТРАЦИЯ ЧЕРЕЗ ДВУСЛОЙНЫЙ КЛИН [1]

Н. К. Калинин

(Саратов)

Пусть плотина клиновидного сечения состоит из двух грунтов различной проницаемости k_1 и k_2 с прямолинейной линией раздела слоев, проходящей через вершину клина (фиг. 1). На практике грунт с коэффициентом фильтрации k_2 играет обычно роль малопроницаемого защитного экрана, закладываемого со стороны верхнего бьефа. Найдем течение через тело такой плотины для случая, когда в верхнем бьефе высота воды достигает наивысшего уровня. Будем предполагать, кроме того, что плотина простирается неограниченно вниз.

Отдельного рассмотрения, ввиду простоты, заслуживает случай, когда в нижнем бьефе воды нет (фиг. 1). Найдем величину и направление скоростей v_1 и v_2 этих потоков.



Фиг. 1

В каждой точке линии раздела слоев OB должен выполняться закон преломления линий тока (см., например, [1])

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{k_1}=\frac{\operatorname{tg}\beta}{k_2} \qquad (1)$$

где n — нормаль к линии OB раздела слоев, а углы β, β_1 показаны на фиг. 1.

Из (1) находим угол β_1, определяющий направление скорости v_1 (вектор скорости v_1 перпендикулярен к OA). На промежутке выкачивания воды в атмосферу OC, где давление постоянно, имеем $\varphi_1=-k_1y+\mathrm{const}$. Касательная, составляющая скорости v_1 вдоль OC должна поэтому удовлетворять условию

$$v_1\cos\alpha_1=\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}=-k_1\frac{\partial y}{\partial s}=k_1\cos\gamma=\mathrm{const} \qquad (2)$$

Соотношение (2) определяет величину скорости:

$$v_1=k_1\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha_1}=k_1\cos\gamma\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}=k_1\cos\gamma\sqrt{1+\left(\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta_1}\right)^2}$$

---

[1] Эта статья представляет извлечение из кандидатской диссертации Н. К. Калинина (1943), молодого преподавателя Саратовского университета, докторанта Института механики АН СССР, преждевременно скончавшегося (1948). Изложение несколько переработано в редакции журнала ПММ.

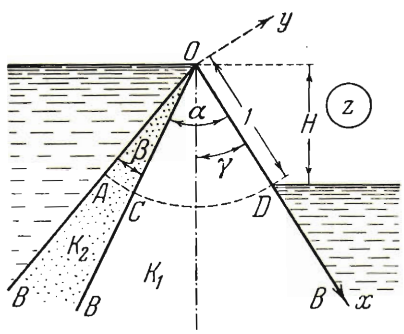
Здесь использовано соотношение $\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi - \alpha - \beta_1$. Принимая во внимание (1), выражение для v_1 можно преобразовать к следующему виду:

$$v_1 = \frac{k_1 \cos\gamma}{\cos\alpha} \frac{\sqrt{k_2^2 + k_1^2 \operatorname{tg}^2\beta}}{k_2 \operatorname{tg}\alpha + k_1 \operatorname{tg}\beta} = \frac{k_1 \cos\gamma}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta_1} \tag{3}$$

Чтобы определить величину скорости v_2 (направление этой скорости известно и совпадает с направлением перпендикуляра к линии OA), используем условие несжимаемости, которое должно выполняться в каждой точке линии OB раздела слоев, а именно $v_2 \cos\beta = v_1 \cos\beta_1$; отсюда

$$v_2 = v_1 \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta} = \frac{k_1 \cos\gamma}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_1} \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{k_1 k_2 \cos\gamma}{k_2 \sin\alpha\cos\beta + k_1 \sin\beta\cos\alpha} \tag{4}$$

Чтобы рассматриваемое здесь течение было возможно, необходимо выполнение неравенства $\alpha_1 \geqslant 0$ или $\beta_1 \leqslant \frac{1}{2}\pi - \alpha$. Из (1) следует тогда, что углы α и β должны быть связаны неравенством



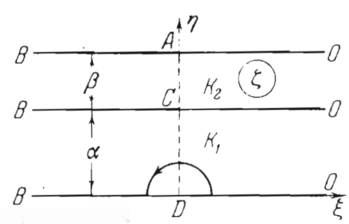
Фиг. 2

$$\operatorname{tg}\beta_1 \leqslant \operatorname{ctg}\alpha, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\beta \leqslant \frac{k_2}{k_1}\operatorname{ctg}\alpha \tag{5}$$

Если, например, $\beta = 0$, то (5) показывает, что $\alpha \leqslant \frac{1}{2}\pi$. Последнее же есть известное условие возможности течения через однослойный клин без образования свободной поверхности. Если условие (5) не соблюдено, то в точке O произойдет отрыв потока от стенки OC и образование свободной поверхности.

Пусть теперь в нижнем бьефе имеется вода. Направим оси декартовых координат x, y, как показано на фиг. 2, и отобразим конформно область течения $z = x + iy$ на полосу в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ (фиг. 3) при помощи соотношения

$$z = e^{-\zeta} \tag{6}$$



Фиг. 3

Введем в рассмотрение функции

$$N_1(\zeta) = k_1 \frac{d}{d\zeta}\left(w_1 + \frac{dw_1}{d\zeta}\right) = -k_1 e^{-\zeta} \frac{d}{d\zeta}\frac{dw_1}{dz} \tag{7}$$

$$N_2(\zeta) = k_2 \frac{d}{d\zeta}\left(w_2 + \frac{dw_2}{d\zeta}\right) = -k_2 e^{-\zeta} \frac{d}{d\zeta}\frac{dw_2}{zd}$$

Легко установить, что они будут удовлетворять следующим граничным условиям:

$$h_1 = \text{const}, \qquad \operatorname{Im} N_2 = 0 \qquad \text{на } OAB \tag{8}$$

$$k_1 q_1 = k_2 q_2 + \text{const}, \qquad \operatorname{Re} N_1 = \operatorname{Re} N_2 \qquad \text{на } OCB \tag{9}$$

$$h_1 = h_2 = \text{const}, \qquad \frac{1}{k_1}\operatorname{Im} N_1 = \frac{1}{k_2}\operatorname{Im} N_2$$

$$\operatorname{Im} N_1 = 0 \qquad \text{на } ODB \tag{10}$$

так как

$$h_1 = \text{const} \quad \text{на } DB, \qquad \operatorname{Im}\left(k_1 \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) = v_{1x} = k_1 \cos\gamma = k_1 H = \text{const} \quad \text{на } OD \tag{11}$$

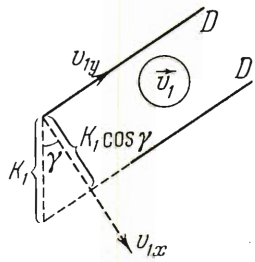
В точке $D\,(\zeta = 0)$ функция $N_1(\zeta)$ имеет полюс первого порядка, как ясно из рассмотрения годографа скоростей (фиг. 4), т. е. вблизи этой точки имеет место разложение вида

$$N_1(\zeta) = -k_1 e^{-\zeta} \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{dw_1}{dz}\right) = \frac{A}{\zeta} + a_0 + a_1\zeta + \cdots \tag{12}$$

Условие (10) показывает, что A — вещественная постоянная. Производя интегрирование выражения (12) по полуокружности бесконечно малого радиуса (фиг. 3) с центром в точке D и принимая во внимание (11), найдем $ik_1 H = \pi i A$ или $A = k_1 H / \pi$.

Исследуем поведение функций (7) в бесконечно удаленных точках полосы $BAODB$. Так как в точке $O\,(\zeta = +\infty)$ производные $k_1\, dw_1/dz$ и $k_2\, dw_2/dz$ имеют конечное значение, то должно быть

$$\lim_{\zeta \to +\infty} N_1 = 0, \qquad \lim_{\zeta \to +\infty} N_2 = 0 \tag{13}$$



Фиг. 4

Действительно, если бы, например, допустить $\lim N_1\,(\zeta) = C$ при $\zeta \leftarrow +\infty$, где $C \neq 0$, то при достаточно больших ζ было бы в силу (7) и (6)

$$-k_1 \frac{dw_1}{dz} \sim Ce^{\zeta} = C\frac{1}{z} \tag{14}$$

и величина $k_1 dw_1/dz$ при $\zeta \to +\infty$, что соответствует $z \to 0$, имела бы бесконечно большое значение, чего быть не может. Поэтому мы должны положить $C = 0$. Аналогичные же рассуждения можно провести и в отношении $N_2\,(\zeta)$.

Что касается точки $B\,(\zeta = -\infty)$, то при помощи тех же рассуждений, учитывая, что величины $k_1\; dw_1/dz$ и $k_2\; dw_2/dz$ в этой точке имеют нулевое значение, и принимая во внимание (14), можно показать справедливость равенства

$$\lim_{\zeta \to -\infty} N_1 = C_1 \quad (C_1 \neq \infty), \qquad \lim_{\zeta \to -\infty} N_2 = C_2 \quad (C_2 \neq 0) \tag{15}$$

Рассматриваемая задача состоит, таким образом, в нахождении функции $N_1(\zeta)$, регулярной в полосе $BCODB$, и функции $N_2(\zeta)$, регулярной в полосе $BCOAB$. Кроме того, эти функции должны удовлетворять условиям (8), (9), (10), (13) и (15).

Как известно [2] (ч. I, стр. 124), интеграл Фурье

$$\int_0^\infty [\varphi(t)\, e^{i\zeta t} + \psi(t)\, e^{-i\zeta t}]\, dt = \int_0^\infty [f(t)\cos\zeta t + g(t)\sin\zeta t]\, dt \tag{16}$$

при некоторых ограничениях, наложенных на функции $f(t)$, $g(t)$, может представлять функцию от ζ, регулярную в некоторой полосе $a < \operatorname{Im}(\zeta) < b$ (a, b — вещественные константы).

Учитывая это, мы можем попытаться найти $N_1(\zeta)$, $N_2(\zeta)$, принимая во внимание (8), (10), (12), в виде

$$N_1(\zeta) = \frac{k_1 H}{\pi}\left[\frac{1}{\zeta} + \int_0^\infty \{a_1(t)\sin\zeta t + b_1(t)\cos\zeta t\}\, dt\right] + B_1$$
$$N_2(\zeta) = \frac{k_2 H}{\pi}\int_0^\infty \{a_2(t)\sin\zeta_2 t + b_2(t)\cos\zeta_2 t\}\, dt + B_2 \tag{17}$$

где $a_1(t)$, $b_1(t)$, $a_2(t)$, $b_2(t)$ — неизвестные пока вещественные функции t, B_1, B_2 — произвольные вещественные постоянные, $\zeta_2 = \zeta - i(\alpha + \beta)$.

Выражение (17) удовлетворяет условиям (8) и (10). Чтобы удовлетворить условиям (9) на линии раздела грунтов, представим первое равенство в ином виде, заметив, что при $\eta > 0$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\zeta} = -i\int_0^\infty e^{i\zeta t}\, dt$$

Тогда

$$N_1(\zeta) = -\frac{k_1 H}{\pi} i\int_0^\infty e^{i\zeta t}\, dt + \frac{k_1 H}{\pi}\int_0^\infty [a_1(t)\sin\zeta t + b_1(t)\cos\zeta t]\, dt + B_1 \tag{18}$$

Положим здесь и во втором равенстве (17) $\zeta = \xi + i\alpha$, $\zeta_2 = \xi - i\beta$. Отделяя вещественные и мнимые части, получим

$$\operatorname{Re}(N_1) = \frac{k_1 H}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin\xi t\, dt + \frac{k_1 H}{\pi}\int_0^\infty (a_1 \operatorname{ch}\alpha t \sin\xi t + b_1 \operatorname{ch}\alpha t\cos\xi t)\, dt + B_1$$

$$\operatorname{Re}(N_2) = \frac{k_2 H}{\pi}\int_0^\infty (a_2 \operatorname{ch}\beta t\sin\xi t + b_2\operatorname{ch}\beta t\cos\xi t)\, dt + B_2$$

$$\operatorname{Im}(N_1) = -\frac{k_1 H}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos\xi t\, dt + \frac{k_1 H}{\pi}\int_0^\infty (a_1 \operatorname{sh}\alpha t\cos\xi t - b_1\operatorname{sh}\alpha t\sin\xi t)\, dt$$

$$\operatorname{Im}(N_2) = \frac{k_2 H}{\pi}\int_0^\infty (-a_2\operatorname{sh}\beta t\cos\xi t + b_2\operatorname{sh}\beta t\sin\xi t)\, dt$$

Условия (9) будут удовлетворены, если

$$B_1 = B_2 = B, \qquad \begin{aligned} k_1 e^{-\alpha t} + k_1 a_1 \operatorname{ch}\alpha t &= k_2 a_2 \operatorname{ch}\beta t, & k_1 b_1 \operatorname{ch}\alpha t &= k_2 b_2 \operatorname{ch}\beta t \\ -e^{-\alpha t} + a_1\operatorname{sh}\alpha t &= -a_2\operatorname{sh}\beta t, & -b_1\operatorname{sh}\alpha t &= b_2\operatorname{sh}\beta t \end{aligned}$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{e^{-\alpha t}\,(k_2\operatorname{ch}\beta t - k_1\operatorname{sh}\beta t)}{k_2\operatorname{sh}\alpha t\operatorname{ch}\beta t + k_1\operatorname{ch}\alpha t\operatorname{sh}\beta t}, \qquad a_2 = \frac{k_1}{k_2\operatorname{sh}\alpha t\operatorname{ch}\beta t + k_1\operatorname{ch}\alpha t\operatorname{sh}\beta t}, \quad b_1 = b_2 = 0$$

Таким образом, будем иметь

$$N_1(\zeta) = -k_1 e^{-\zeta}\frac{d}{d\zeta}\frac{dw_1}{dz} = \frac{k_1 H}{\pi}\left[\frac{1}{\zeta} + A_1(\zeta)\right] + B \tag{19}$$

$$N_2(\zeta) = -k_2 e^{-\zeta}\frac{d}{d\zeta}\frac{dw_2}{dz} = \frac{k_1 k_2 H}{\pi} A_2(\zeta) + B \tag{20}$$

где

$$A_1(\zeta) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{k_2 \operatorname{ch} \beta t - k_1 \operatorname{sh} \beta t}{k_2 \operatorname{sh} \alpha t \operatorname{ch} \beta t + k_1 \operatorname{ch} \alpha t \operatorname{sh} \beta t} \sin \zeta t \, dt \tag{21}$$

$$A_2(\zeta) = \int_0^\infty \frac{1}{k_2 \operatorname{sh} \alpha t \operatorname{ch} \beta t + k_1 \operatorname{ch} \alpha t \operatorname{sh} \beta t} \sin \zeta_2 t \, dt \tag{22}$$

Легко проверить, что выражение (19) представляет функцию, регулярную в полосе $BCODB$, а (20) — функцию, регулярную в полосе $BCOAB$.

Потребуем теперь выполнения условий (13) на бесконечности. Для этого воспользуемся известной формулой [3], (стр. 61)

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^\infty f(x) \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(+0) \tag{23}$$

справедливой при условии, что $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле в некотором промежутке $(0, l)$ и что существует интеграл с теми же пределами от $|f(x)|$. Так как подинтегральная функция в (21) удовлетворяет этим условиям, то будем иметь

$$\lim_{\zeta \to +\infty} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{k_2 \operatorname{ch} \beta t - k_1 \operatorname{sh} \beta t}{k_2 \operatorname{sh} \alpha t \operatorname{ch} \beta t + k_1 \operatorname{ch} \alpha t \operatorname{sh} \beta t} \sin \zeta t \, dt = \frac{\pi}{2} \frac{k_2}{k_2 \alpha + k_1 \beta}$$

Для постоянной B в силу (13) получим значение

$$B = -\frac{H}{2} \frac{k_1 k_2}{k_2 \alpha + k_1 \beta} \tag{24}$$

Интегрируя (19) и (20) по ζ (нижний предел при интегрировании берем, исходя из условия, что $(k_1 dw_1/dz)_{\zeta = -\infty} = 0$), найдем поле скоростей:

$$k_1 \frac{dw_1}{dz} = v_{1y} + iv_{1x} = -\frac{k_1 H}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\zeta} \frac{e^\zeta}{\zeta} d\zeta + \int_{-\infty}^{\zeta} A_1(\zeta) e^\zeta d\zeta \right] + \frac{k_1 k_2 H}{2(k_2 \alpha + k_1 \beta)} e^\zeta \tag{25}$$

$$k_2 \frac{dw_2}{dz} = v_{2y} + iv_{2x} = -\frac{k_1 k_2 H}{\pi} \int_{-\infty}^{\zeta} A_2(\zeta) e^\zeta d\zeta + \frac{k_1 k_2 H}{2(k_2 \alpha + k_1 \beta)} e^\zeta \tag{26}$$

Для того чтобы вычислить интегралы (21) и (22), докажем вспомогательное предложение.

Теорема. Если величины α, β, k_1, k_2 — положительные константы, то целая трансцендентная функция

$$f(t) = k_2 \operatorname{sh} \alpha t \operatorname{ch} \beta t + k_1 \operatorname{ch} \alpha t \operatorname{sh} \beta t \tag{27}$$

имеет только чисто мнимые нули.

Доказательство. Сделаем замену $t = i\tau$ и будем рассматривать функцию

$$\varphi(\tau) = k_2 \sin \alpha\tau \cos \beta\tau + k_1 \cos \alpha\tau \sin \beta\tau$$

которая должна иметь только вещественные нули. Перепишем уравнение $\varphi(\tau) = 0$ в виде

$$k_2 \operatorname{ctg} \beta\tau + k_1 \operatorname{ctg} \alpha\tau = 0, \quad \text{или} \quad \Theta(z) = \operatorname{ctg} z + k \operatorname{ctg} az = 0$$

где

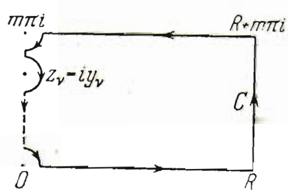
$$\beta\tau = z, \quad \frac{\alpha}{\beta} = a, \quad \frac{k_1}{k_2} = k \qquad (a > 0,\ k > 0)$$

Будем рассматривать $\Theta(z)$ как предел рациональных функций:

$$\Theta_n(z) = \theta_n(z) + \vartheta_n(z), \quad \theta_n(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{1}{z - \nu\pi}, \quad \vartheta_n(z) = k \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{1}{az - \nu\pi}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Из леммы Гурвица следует, что $\Theta(z)$ будет иметь только вещественные нули, если вещественны все корни $\Theta_n(z)$, начиная с некоторого n.

Будем предполагать, что $a > 1$, что не нарушает общности, ибо в противном случае достаточно произвести замену $az = z_1$, $z = z_1 / a = bz_1$, где $b > 1$. Пусть, кроме того, a — иррациональная величина. В этом случае функции $\theta_n(z)$ и $\vartheta_n(z)$ не будут иметь общих полюсов. Функция $\Theta_n(z)$ после приведения ее к общему знаменателю будет содержать в числителе полином степени $4n$ с вещественными коэффициентами. Чтобы ее корни были все вещественны, необходимо и достаточно, чтобы она имела $4n$ вещественных корней.



Фиг. 5

Будем рассматривать отрезок $0 < z \leqslant n\pi$ вещественной оси z. Внутри него функция $\Theta_n(z)$ имеет не менее $2n$ полюсов, а следовательно, не менее $2n$ раз меняет знак, переходя последовательно от $+\infty$ к $-\infty$, Значит, она имеет на этом отрезке не менее $2n$ нулей. То же рассуждение показывает, что не менее $2n$ нулей эта функция имеет на отрезке $-nz \leqslant z < 0$.

Следовательно, функция $\Theta_n(z)$ имеет не менее $4n$ вещественных нулей, откуда следует на основании сказанного, что все ее нули вещественны. Из леммы Гурвица вытекает тогда, что $\Theta(z)$ имеет только вещественные нули.

Функция $f(t)$ будет поэтому иметь только чисто мнимые нули, что и требовалось доказать.

Мы предполагали, что отношение α / β есть число иррациональное. Очевидно, теорема остается справедливой и для случая, когда α / β рационально.

Перейдем теперь к вычислению интеграла (21). Покажем, что если отношение $\alpha / \beta = n / m = r$ — рациональная дробь (m, n — целые числа), то этот интеграл выражается через элементарные функции. Действительно, произведем в (21) замену величин по формулам

$$\beta t = x, \qquad \alpha = \beta r, \qquad \alpha t = r\beta t = rx, \qquad q = \frac{\zeta}{\beta} \qquad \left(\frac{n}{m} = r\right) \tag{28}$$

Получим

$$A_1 = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty e^{-rx} \frac{k_2 \operatorname{ch} x - k_1 \operatorname{sh} x}{k_2 \operatorname{sh} rx \operatorname{ch} x + k_1 \operatorname{ch} rx \operatorname{sh} x} \sin qx \, dx \tag{29}$$

Рассмотрим интеграл

$$\oint F(z)\,dz, \qquad F(z) = e^{-rz}\frac{k_2\operatorname{ch} z - k_1 \operatorname{sh} z}{k_2 \operatorname{sh} rz \operatorname{ch} z + k_1 \operatorname{ch} rz \operatorname{sh} z}\, e^{iqz}$$

взятый по контуру C прямоугольника, вершины которого имеют аффиксы $O, R, R + m\pi i, m\pi i$ (фиг. 5) с вырезами около полюсов функции $F(z)$, лежащих согласно доказанной теореме на мнимой оси z. Так как $F(z)$ регулярна внутри C, то согласно теореме Коши интеграл (30) равен нулю. Переходя к пределу при $R \to \infty$ и принимая во внимание, что

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_R^{R+m\pi i} e - rz\, \frac{k_2\operatorname{ch} z - k_1\operatorname{sh} z}{k_2\operatorname{sh} rz \operatorname{ch} z + k_1 \operatorname{ch} rz \operatorname{sh} z}\, e^{iqz}\,dz = 0 \qquad \left(\frac{n}{m} = r\right)$$

найдем

$$\int\limits_0^\infty e^{-rx}\frac{k_2\operatorname{ch} x - k_1\operatorname{sh} x}{k_2\operatorname{sh} rx\operatorname{ch} x + k_1\operatorname{ch} rx\operatorname{sh} x}\, e^{iqx}\,dx -$$

$$-\int\limits_0^\infty e^{-rx}\frac{k_2\operatorname{ch} x - k_1\operatorname{sh} x}{k_2\operatorname{sh} rx\operatorname{ch} x + k_1\operatorname{ch} rx\operatorname{sh} x}\, e^{-mq\pi + iqx}\,dx +$$

$$+\text{v. p.}\int\limits_{m\pi}^0 e^{-riy}\frac{(k_2\cos y - ik_1\sin y)\,e^{-qy}}{k_2\sin ry\cos y + k_1\cos ry\sin y}\,dy = \pi i\sum_\nu R_\nu + \frac{\pi i}{2}\left\{\frac{k_2}{k_2 r + k_1}(1 + e^{-mq\pi})\right\}$$

где $\sum R_\nu$ — сумма вычетов выражения $F(z)$ относительно полюсов, расположенных на отрезке $0 < y < m\pi$ мнимой оси z, v. p. — главное значение в смысле Коши. Беря мнимую часть от последнего равенства, получим

$$(1 - e^{-mq\pi})\,\beta A_1 = \frac{\pi}{2}\,\frac{k_2}{k_2 r + k_1}(1 + e^{-mq\pi}) + \pi\operatorname{Im}\left(i\sum_\nu R_\nu\right) - \frac{1}{q}(1 - e^{-mq\pi}) \qquad (30)$$

так как

$$\operatorname{Im}\left\{\text{v. p.}\int\limits_{m\pi}^0 e^{-riy}\frac{k_2\cos y - ik_1\sin y}{k_2\sin ry\cos y + k_1\cos ry\sin y}\, e^{-qy}dy\right\} =$$

$$= \int\limits_{m\pi}^0 \frac{-k_2\cos y\sin ry - k_1\sin y\cos ry}{k_2\sin ry\cos y + k_1\cos ry\sin y}\, e^{-qy}dy = -\int\limits_{m\pi}^0 e^{-qy}dx = \frac{1}{q}(1 - e^{-mq\pi})$$

Пользуясь выражением (30) для $F(x)$, легко найдем

$$R_\nu = e^{-riy_\nu}\frac{k_2\cos y_\nu - ik_1\sin y_\nu}{k_2(r\cos ry_\nu\cos y_\nu - \sin ry_\nu\sin y_\nu) + k_1(\cos ry_\nu\cos y_\nu - r\sin ry_\nu\sin y_\nu)}\, e^{-qy_\nu}$$

где $z_\nu = iy_0$ означает аффикс ν-го полюса $F(z)$, лежащего на отрезке $0 < y < m\pi$ мнимой оси z $(0 < y_\nu < m\pi)$. Отсюда

$$\operatorname{Im}(iR_\nu) = \operatorname{Re}(R_\nu) = D_\nu e^{-qy_\nu} \qquad (31)$$

где

$$D_\nu = \frac{k_2\cos y_\nu\cos ry_\nu - k_1\sin y_\nu\sin ry_\nu}{(k_2 r + k_1)\cos ry_\nu\cos y_\nu - (k_2 + rk_1)\sin ry_\nu\sin y_\nu} \qquad (32)$$

Из (30) теперь для A_1 после подстановки (31) имеем

$$A_1 = \frac{\pi k_2}{2(k_2\alpha + k_1\beta)} + \frac{\pi k_2}{k_2\alpha + k_1\beta}\frac{e^{-mq\pi}}{1-e^{-mq\pi}} + \frac{\pi}{\beta}\frac{1}{1-e^{-mq\pi}}\sum_{\nu} D_\nu e^{-qy_\nu} - \frac{1}{\zeta} \tag{33}$$

Перейдем теперь к вычислению расхода Q через промежуток высачивания OD (фиг. 2). Из (25), замечая, что $dz / d\zeta = -e^{-\zeta}$, имеем

$$k_1 \frac{dw_1}{d\zeta} = \frac{k_1 H}{\pi} e^{-\zeta} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{\zeta}\left(\frac{1}{\zeta} + A_1\right) d\zeta - \frac{k_1 k_2 H}{2(k_2\alpha + k_1\beta)}$$

Подставляя сюда найденное значение для A_1 и вспоминая, что $q = \zeta / \beta$, определяем расход:

$$Q = \int_{\infty}^{0} k_1 \frac{dw_1}{d\zeta} d\zeta = \frac{k_1 k_2 H}{k_2\alpha + k_1\beta} J_0 + \frac{k_1 H}{\beta}\sum_{\nu} D_\nu J_\nu \tag{34}$$

где

$$J_0 = \int_{\infty}^{0} e^{-\zeta}\left[\int_{-\infty}^{\zeta} e^t \frac{e^{-m\pi t/\beta}}{1-e^{-m\pi t/\beta}} dt\right] d\zeta, \quad J_\nu = \int_{-\infty}^{0} e^{-\zeta}\left[\int_{\infty}^{r} e^t \frac{e^{-y_\nu t/\beta}}{1-e^{-m\pi t/\beta}} dt\right] d\zeta \tag{35}$$

Интегрируя J_ν по частям, найдем

$$J_\nu = -\int_0^{\infty} e^{-t}\frac{e^{y_\nu t/\beta}}{1-e^{-m\pi t/\beta}} dt - \int_0^{\infty}\frac{e^{-y_\nu t/\beta}}{1-e^{-m\pi t/\beta}} dt = \int_0^{\infty} e^{-t-m\pi t/\beta}\frac{e^{y_\nu t/\beta}}{1-e^{-m\pi t/\beta}} dt -$$

$$- \int_0^{\infty}\frac{e^{-y_\nu t/\beta}}{1-e^{-m\pi t/\beta}} dt = -\int_0^{\infty} e^{-y_\nu t/\beta}\frac{1-e^{-t-m\pi t/\beta+2y_\nu t/\beta}}{1-e^{-m\pi t/\beta}} dt$$

Произведем замену переменного:

$$e^{-m\pi t/\beta} = x, \qquad dt = -\frac{\beta}{m\pi}\frac{dx}{x}$$

тогда

$$J_\nu = -\frac{\beta}{m\pi}\int_0^1 x^{a-1}\frac{1-x^b}{1-x} dx \qquad \left(a = \frac{y_\nu}{m\pi},\ b = \frac{\beta}{m\pi} + 1 - \frac{2y_\nu}{m\pi}\right)$$

Но, как известно ([2] стр. 39), имеет место формула

$$\int_0^1 x^{a-1}\frac{1-x^b}{1-x} dx = \psi(a+b) - \psi(a) \tag{36}$$

где $\psi(a) = \Gamma'(a)/\Gamma(a)$ — логарифмическая производная гамма-функция. Поэтому

$$J_\nu = -\frac{\beta}{m\pi}\left[\psi\left(\frac{\beta}{m\pi} + 1 - \frac{y_\nu}{m\pi}\right) - \psi\left(\frac{y_\nu}{m\pi}\right)\right], \qquad J_0 = -\frac{\beta}{m\pi}\left[\psi\left(\frac{\beta}{m\pi}\right) - \psi(1)\right]$$

Интеграл J_0 получается из J_ν при $J_\nu = m\pi$. Формула (34) для расхода примет вид: (37)

$$Q = \frac{k_1 k_2 H}{k_2\alpha + k_1\beta}\frac{\beta}{m\pi}\left[\psi(1) - \psi\left(\frac{\beta}{m\pi}\right)\right] - \frac{k_1 H}{m\pi}\sum_{\nu} D_\nu\left[\psi\left(1 + \frac{\beta}{m\pi} - \frac{y_\nu}{m\pi}\right) - \psi\left(\frac{y_\nu}{m\pi}\right)\right]$$

Все дело сводится теперь к определению величин $z_\nu = iy_\nu$ нулей трансцендентного уравнения

$$k_2 \operatorname{sh}\frac{nz}{m}\operatorname{ch} z + k_1 \operatorname{ch}\frac{nz}{m}\operatorname{sh} z = 0 \tag{38}$$

на отрезке $0 < \operatorname{Im}(z) < m\pi$ или нулей уравнения

$$k_2 \sin\frac{ny}{m}\cos y + k_1 \cos\frac{ny}{m}\sin y = 0 \tag{39}$$

на отрезке $0 < y < m\pi$. Не останавливаясь на получении общего решения уравнения (38) или (39), разберем некоторые частные случаи.

Положим прежде всего $m = 1$. В этом случае соотношения (37) и (39) примут вид: (40)

$$Q = \frac{k_1 k_2 H}{k_2\alpha + k_1\beta}\,\frac{\beta}{\pi}\left[\psi(1) - \psi\left(\frac{\beta}{\pi}\right)\right] - \frac{k_1 H}{\pi}\sum_\nu D_\nu\left[\psi\left(1 + \frac{\beta}{\pi} - \frac{y_\nu}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{y_\nu}{\pi}\right)\right]$$

$$k_3 \sin ny\,\cos y + k_1\, ny \sin y = 0 \qquad (0 < y < \pi) \tag{41}$$

Пусть теперь:

1) $\alpha = 0$, $n = 0$ (однослойный клин с углом β при вершине). Уравнение (41) не имеет в этом случае нулей на отрезке $0 < y < \pi$, поэтому в (40) надо положить $D_\nu = 0$. Полагая $k_2 = k$, найдем следующую простую формулу, впервые полученную Б. К. Ризенкампфом:

$$Q = \frac{kH}{\pi}\left[\psi(1) - \psi\left(\frac{\beta}{\pi}\right)\right] \tag{42}$$

2) $\alpha = \beta$, $n = 1$. Уравнение (41) сведется к

$$\sin 2y = 0$$

На отрезке $0 < y < \pi$ оно имеет один корень $y_1 = \frac{1}{2}\pi$. Из (32) найдем

$$D_1 = \frac{k_1}{k_2 + k_1}$$

Выражение (40) для расхода примет вид:

$$Q = \frac{k_1 k_2 H}{(k_2 + k_1)\pi}\left[\psi(1) - \psi\left(\frac{\beta}{\pi}\right)\right] - \frac{k_1^2 H}{(k_2 + k_1)\pi}\left[\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{\pi}\right) - \psi\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] \tag{43}$$

Эту формулу можно несколько преобразовать. А именно, воспользовавшись равенством [2] (стр. 37)

$$\psi(z) - \psi(1) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-zx}}{1 - e^{-x}}\,dx$$

легко получить соотношение

$$2\psi(2z) - \psi(z) - \psi(1) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-2zx}}{e^{1/2 x} - e^{-1/2 x}}\,dx = j$$

Но с другой стороны, на основании (36)

$$j = \int_0^\infty e^{1/2 x}\,\frac{1 - e^{-2x}}{1 - e^{-x}}\,dx = \int_0^1 t^{1/2 - 1}\,\frac{1 - t^2}{1 - t}\,dt = \psi\left(\tfrac{1}{2} + z\right) - \psi\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

Следовательно, имеет место такое тождество:

$$2\psi(2z) - \psi(z) - \psi(1) = \psi\left(\tfrac{1}{2} + z\right) - \psi\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

Имея его в виду, формулу (43) запишем в форме

$$Q = \frac{k_1 H}{\pi}\left[\psi(1) + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\psi\left(\frac{\beta}{\pi}\right) - \frac{2k_1}{k_1 + k_2}\psi\left(\frac{2\beta}{\pi}\right)\right] \tag{44}$$

При $k_1 = k_2 = k$ (однослойный клин с углом 2β при вершине) найдем

$$Q = \frac{kH}{\pi}\left[\psi(1) - \psi\left(\frac{2\beta}{\pi}\right)\right] \tag{45}$$

что совпадает по виду с (35), как и должно быть. При $k_2 = \infty$, $k_1 = k$ (однослойный клин с углом β при вершине) приходим к (42).

3) $\alpha = 2\beta$, $n = 2$. Уравнение (41) преобразуется к следующему

$$k_2 \sin 2y \cos y + k_1 \cos 2y \sin y = \sin y\,(2k_2 \cos^2 y + k_1 \cos 2y) =$$
$$= \sin y\,[k_2(1 + \cos 2y) + k_1 \cos 2y] = (k_1 + k_1)\sin y\left[\cos 2y + \frac{k_2}{k_2 + k_1}\right] = 0$$

или, положив

$$\frac{k_2}{k_1 + k_2} = \cos 2p \qquad \left(2\cos^2 p = \frac{2k_2 + k_1}{k_2 + k_1}\right)$$

к уравнению

$$\cos 2y + \cos 2p = 0$$

На отрезке $0 < y < \pi$ оно имеет два корня: $y_1 = \frac{1}{2}\pi - p$, $y_2 = \frac{1}{2}\pi + p$. Из (32) находим

$$D_1 = D_2 = \frac{-k_2 \cos 2p \sin p - k_1 \cos p \sin 2p}{-(2k_2 + k_1)\cos 2p \sin p - (k_2 + 2k_1)\sin 2p \cos p} =$$
$$= \frac{k_2 \cos 2p + 2k_1 \cos^2 p}{(2k_2 + k_1)\cos 2p + 2(k_2 + 2k_1)\cos^2 p} = \frac{k_2^2 + k_1(2k_2 + k_1)}{k_2(2k_2 + k_1) + (k_2 + 2k_1)(2k_2 + k_1)} = \frac{k_2 + k_1}{2(2k_2 + k_1)}$$

Формула (40) для расхода будет иметь вид (полагаем $\alpha = 2\beta$):

$$Q = \frac{k_1 k_2 H}{(2k_2 + k_1)\pi}\left[\psi(1) - \psi\left(\frac{\beta}{\pi}\right)\right] - \frac{k_1(k_2 + k_1)H}{2\pi(2k_2 + k_1)}\left[\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{\pi} + \frac{p}{\pi}\right) - \right.$$
$$\left. - \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{\pi}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{\pi} - \frac{p}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{p}{\pi}\right)\right]$$

При $k_2 = \infty$, $k_1 = k$ (однослойный клин с углом 2β при вершине) $p = 0$ и мы приходим к (43), где надо положить $k_2 = k_1 = k$.

Рассуждения для других значений $x = \alpha / \beta$ ($n = 3, 4, \ldots$) совершенно сходны с предыдущими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ризенкампф Б. Гидравлика грунтовых вод. Ученые записки Саратовского госуниверситета. Ч. 1, 2. Т. I (XIV). Вып. 1, 2. 1938; ч. 3. Т. XV. Вып. 5. 1940.
2. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. Гостехиздат. Ч. I. 1933. Ч. II. 1934.
3. Привалов И. И. Ряды Фурье. ОНТИ. 1934.
4. Hurwitz A. Math. Annalen. 33. 1889.