Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

# О СХОДИМОСТИ МЕТОДА УПРУГИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПЛАСТИН

**В. М. Панферов**

(Москва)

В работе[1] показана сходимость метода упругих решений А. А. Ильюшина [1] в применении к упруго-пластическому изгибу тонких пластин.

Постановка рассматриваемой краевой задачи (1.10), (1.13) и соответствующее ей интегро-дифференциальное уравнение (1.14) приведены в § 1.

Напомним, что метод упругих решений представляет собой последовательные приближения. В первом приближении выделяются линейный оператор, соответствующий упругой задаче, и нагрузка; нелинейные члены в определяющих краевую задачу дифференциальных уравнениях полагаются равными нулю; таким образом, решается краевая задача теории упругости в той же постановке. Во втором приближении выделяются опять тот же самый линейный оператор и нагрузка, а вместо нелинейных членов добавляется результат подстановки первого приближения в нелинейные члены краевой задачи. Следовательно, за второе приближение берется решение той же самой краевой задачи теории упругости, но «внешняя нагрузка» отличается от действительной нагрузки на результат подстановки первого приближения в нелинейные члены. Соответственно определяется третье приближение и т. д.

В § 2 дается построение мажорантной системы нелинейных интегральных уравнений для интегро-дифференциального уравнения задачи.

В § 3 приводятся локальные теоремы существования В. В. Немыцкого, используемые в § 4 для доказательства некоторых теорем существования решения интегральных уравнений в большом.

В § 5 на основании полученных теорем существования в большом показывается существование решения мажорантной системы нелинейных интегральных уравнений, а следовательно, и рассматриваемой краевой задачи.

Заметим, что условия, при которых проводится доказательство сходимости, соответствуют свойствам экспериментальной функции, характеризующей поведение материала при малых упруго-пластических деформациях.

**§ 1. Краевая задача упруго-пластического изгиба пластинок. Основное дифференциальное уравнение равновесия.** Рассмотрим деформацию тонкой пластины толщины $h$ под действием нормальной к плоскости пластины нагрузки интенсивности $q$. При этом будем считать, что для тонкой пластины гипотезы Кирхгофа-Лява применимы и в случае упруго-пластических деформаций.

Расположим оси координат $x$ и $y$ в срединной плоскости, ось $z$ по нормали к ней. Пользуясь обычными обозначениями, приведем необходимые для дальнейшего соотношения.

---

[1] Она представляет собой часть диссертации автора *Общие методы решения задач пластичности и некоторые приложения* (МГУ, 1949).

*Перемещения и деформации в любой точке пластины*

$$u = z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad e_{xx} = -z\varkappa_1, \quad e_{yy} = -z\varkappa_2, \quad e_{xy} = -2z\tau, \qquad \varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \varkappa_{12} \tag{1.1}$$

где $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau$ — параметры кривизны и кручения срединной поверхности.

*Основное дифференциальное уравнение равновесия изгиба пластины*

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + q = 0 \tag{1.2}$$

где

$$M_1 = \int_{-{}^1/_2 h}^{{}^1/_2 h} X_x z dz, \qquad M_2 = \int_{-{}^1/_2 h}^{{}^1/_2 h} Y_y z dz, \qquad M_{12} = \int_{-{}^1/_2 h}^{{}^1/_2 h} X_y z dz, \tag{1.3}$$

*Законы упруго-пластических деформаций* А. А. Ильюшина [1] *для простого нагружения*

$$\begin{aligned} X_x - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3e_i}(e_{xx} - e), & X_y &= \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{xy} \\ Y_y - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3e_i}(e_{yy} - e), & Y_z &= \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{yz} \\ Z_z - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3e_i}(e_{zz} - e), & X_z &= \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{xz} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь

$$\sigma = 3ke, \qquad e = \frac{1}{3}(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}), \qquad \sigma = \frac{1}{3}(X_x + Y_y + Z_z) \tag{1.5}$$

причем интенсивности напряжений $\sigma_i$ и деформаций $e_i$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(X_x - Y_y)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2 + 6(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2)} \\ e_i &= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + \frac{3}{2}(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Как известно, интенсивность напряжений $\sigma_i$ есть определенная функция $e_i$, не зависящая от напряженного состояния, и для каждого материала определяется экспериментально. Эта функция может быть представлена в виде

$$\sigma_i = \Phi(e_i) = 3Ge_i[1 - \omega(e_i)] \tag{1.7}$$

где

$$\omega \not\equiv 0 \quad \text{при} \quad e_i > e_s, \qquad \omega \equiv 0 \quad \text{при} \quad e_i \leqslant e_s$$

Здесь $e_s$ — предел текучести, $G$ — модуль сдвига.

При этом для экспериментальной кривой $\omega(e_i)$ выполняются условия

$$1 \geqslant \omega + e_i\frac{d\omega}{de_i} > \omega \geqslant 0, \qquad \frac{d\omega}{de_i} > 0 \tag{1.8}$$

**§ 2. Мажорантная система интегральных уравнений для интегрально-дифференциального уравнения (1.14).** 1. Функция Грина $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ для краевой задачи упругого изгиба пластины имеет вид:

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r + \psi(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r + \psi(M, N) \tag{2.1}$$

где $\psi(M, N)$ — регулярная функция[1], $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$.

Подставим выражения производных $\Gamma_{\xi\xi}$ и $\Gamma_{\eta\eta}$ в уравнение (1.14). При этом будем выписывать только часть, содержащую особенность, указывая правильную часть символом $(\ldots)$. В результате получим

$$w = w^* + \frac{1}{8\pi} \iint\limits_S \left[(\varkappa_1 + \varkappa_2)\, 3 \ln r + (\varkappa_1 - \varkappa_2)\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 + 2\varkappa_{12} \frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right] \Omega\, d\xi\, d\eta + (\ldots) \tag{2.2}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{8\pi} \iint (\varkappa_1 - \varkappa_2)\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 \Omega\, d\xi\, d\eta \\ J_2 &= \frac{3}{8\pi} \iint (\varkappa_1 + \varkappa_2) \ln r\, \Omega\, d\xi\, d\eta \\ J_3 &= \frac{1}{4\pi} \iint \varkappa_{12} \frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\, \Omega\, d\xi\, d\eta \end{aligned} \tag{2.3}$$

Тогда выражение (2.2) для прогиба $w$ примет вид:

$$w = w^* + J_1 + J_2 + J_3 + (\ldots) \tag{2.4}$$

Производные от упругого решения $w^*$ и правильной части берутся прямо, а для вычисления производных от $J_1$, $J_2$, $J_3$ необходима осторожность. Будем вычислять производные от $J_1$, $J_2$, $J_3$, выделяя особенность в малую область круга $\Sigma$ с контуром $\lambda$, и пользоваться формулой Остроградского, т. е. применять интегрирование по частям.

Таким образом, получим

$$\frac{\partial J_1}{\partial x} = \iint\limits_{S-\Sigma} A \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 d\xi\, d\eta + \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial A}{\partial \xi}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 d\xi\, d\eta - \int\limits_{\lambda} A \left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 \cos(n, x)\, ds =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \iint\limits_{S-\Sigma} (\varkappa_1 - \varkappa_2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 \Omega\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \iint\limits_{S} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(\varkappa_1 - \varkappa_2)\, \Omega\right]\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 d\xi\, d\eta - \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\lambda} (\varkappa_1 - \varkappa_2)\, \Omega \left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 \cos(n, x)\, ds$$

где $n$ — внешняя нормаль к контуру $\lambda$ области круга $\Sigma$. Далее имеем

$$\frac{\partial^2 J_1}{\partial x^2} = \frac{1}{8\pi} \iint\limits_{S-\Sigma} (\varkappa_1 - \varkappa_2) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 \Omega\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{8\pi} \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(\varkappa_1 - \varkappa_2)\, \Omega\right] \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 d\xi\, d\eta -$$

$$- \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\lambda} \left\{(\varkappa_1 - \varkappa_2)\, \Omega \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 \Omega\right] \cos(n, x)\right\} ds$$

[1] Мы полагаем, что функция Грина $\Gamma(x, y; \xi\eta)$ для краевой задачи упругого изгиба пластины существует и, следовательно, $\psi(M, N)$ дифференцируема необходимое число раз и предельные значения ее производных на границе существуют.

Полагая, что напряжение $Z_z$ мало (обычное условие для пластин), и неизменяемость объема элемента, имеем согласно (1.1) и (1.4)

$$\begin{aligned} X_x &= -4G(1-\omega)\left(\varkappa_1 + \tfrac{1}{2}\varkappa_2\right) z \\ Y_y &= -4G(1-\omega)\left(\varkappa_2 + \tfrac{1}{2}\varkappa_1\right) z \\ X_y &= -2G(1-\omega)\,\tau_z \end{aligned} \tag{1.9}$$

Подстановка (1.3) и (1.9) в уравнение равновесия (1.2) дает основное уравнение упруго-пластического изгиба пластины [1]

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\Omega\left(\varkappa_1 + \tfrac{1}{2}\varkappa_2\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\Omega \varkappa_{12}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\Omega\left(\varkappa_2 + \tfrac{1}{2}\varkappa_1\right)\right] \tag{1.10}$$

Здесь $D = (1+\sigma)\,Gh^3 / 6\,(1-\sigma^2)$ — цилиндрическая жесткость пластины, $\sigma$ — коэффициент Пуассона (в данном случае принимается $\sigma = \frac{1}{2}$),

$$\Omega = \frac{3}{e_i^{\,2}} \int_0^{e_{i1}} \omega e_i^2 de_i, \qquad e_{i1} = \frac{|h|}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varkappa}, \qquad e_i = \frac{2\,|z|}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varkappa} \tag{1.11}$$

где $P_\varkappa$ — квадратичная форма:

$$P_\varkappa = \sqrt{\varkappa_1^{\,2} + \varkappa_2^{\,2} + \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_{12}^{\,2}}$$

Граница между пластической областью и упругой областью определяется согласно (1.7), (1.11) условием

$$e_i = e_s, \qquad z^* = \frac{e_s\sqrt{3}}{2\sqrt{P_\varkappa}}, \qquad |z^*| \leqslant \frac{1}{2}h \tag{1.12}$$

В дальнейшем уравнение (1.10) рассматривается при условиях на границе

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \tag{1.13}$$

где $n$ — нормаль к границе. Заметим, что этот выбор граничных условий не нарушает общности,— можно выбрать любые так называемые естественные условия.

Так как краевая задача изгиба пластинок для упругих деформаций при естественных граничных условиях имеет решение (единственное), то существует функция Грина $\Gamma$ и решение упругой задачи может быть получено в виде

$$w = \frac{1}{D}\iint\limits_S q'(\xi,\ \eta)\,\Gamma(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\,d\xi\,d\eta$$

где $q'$ — внешняя нагрузка, $S$ — область пластинки.

Краевую задачу упруго-пластического изгиба пластинок (1.10), (1.13) А. А. Ильюшин ([1], стр. 205) приводит к следующему интегрально-дифференциальному уравнению:

$$w = w^* + \iint\limits_S \left[\varkappa_1\left(\Gamma_{\xi\xi} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\eta\eta}\right) + \varkappa_2\left(\Gamma_{\eta\eta} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\xi\xi}\right) + \tau\Gamma_{\xi\eta}\right]\Omega'\,d\xi\,d\eta \tag{1.14}$$

где $w^*$ — решение упругой задачи.

Затем определим

$$\int_{\lambda} \frac{1}{8\pi} \left\{ (\varkappa_1 - \varkappa_2)\, \Omega \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 \cos(n, x) \right] \right\} ds = -\tfrac{1}{16} (\varkappa_1 - \varkappa_2)\, \Omega$$

Тогда $\partial^2 I_1 / \partial x^2$ принимает вид:

$$\frac{\partial^2 J_1}{\partial x^2} = \frac{1}{8\pi} \iint_{S-\Sigma} (\varkappa_1 - \varkappa_2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 \right] \Omega \, d\xi \, d\eta + \frac{1}{8\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\varkappa_1 - \varkappa_2)\, \Omega \right] \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \int_{\lambda} [(\varkappa_1 - \varkappa_2)\, \Omega - (\overline{\varkappa}_1 - \overline{\varkappa}_2)\, \overline{\Omega}] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 \cos(n, x) \right] ds + \tfrac{1}{16} (\overline{\varkappa}_1 - \overline{\varkappa}_2)\, \Omega \tag{2.5}$$

Черточки для $(\overline{\varkappa}_1 - \overline{\varkappa}_2)\, \overline{\Omega}$ обозначают, что функция взята в центре $(x, y)$ круга $\Sigma$. Аналогичные вычисления дают

$$\frac{\partial^2 J_2}{\partial x^2} = \frac{3}{8\pi} \iint_{S-\Sigma} (\varkappa_1 + \varkappa_2)\, \Omega \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} d\xi \, d\eta + \frac{3}{8\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial\, [(\varkappa_1 + \varkappa_2)\, \Omega]}{\partial \xi} \frac{\partial \ln r}{\partial x} d\xi \, d\eta -$$

$$- \frac{3}{8\pi} \int_{\lambda} [(\varkappa_1 + \varkappa_2)\, \Omega - (\overline{\varkappa}_1 + \overline{\varkappa}_2)\, \overline{\Omega}] \frac{\partial \ln r}{\partial x} \cos(n, x)\, ds + \tfrac{3}{8} (\overline{\varkappa}_1 + \overline{\varkappa}_2)\, \overline{\Omega}$$

$$\frac{\partial^2 J_3}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S-\Sigma} \varkappa_{12}\, \Omega \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) d\xi \, d\eta + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial\, (\varkappa_{12} \Omega)}{d\xi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) d\xi \, d\eta -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda} \varkappa_{12} \Omega \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \cos(n, x)\, ds \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^2 J_1}{\partial y^2} = -\frac{1}{8\pi} \iint_{S-\Sigma} (\varkappa_1 - \varkappa_2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 \Omega \, d\xi \, d\eta - \frac{1}{8\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial\, [(\varkappa_1 - \varkappa_2)\, \Omega]}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 d\xi \, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \int_{\lambda} \left\{ [(\varkappa_1 - \varkappa_2)\, \Omega - (\overline{\varkappa}_1 - \overline{\varkappa}_2)\, \overline{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] \cos(n, y) \right\} ds - \tfrac{1}{16} (\overline{\varkappa}_1 - \overline{\varkappa}_2)\, \overline{\Omega}$$

$$\frac{\partial^2 J_2}{\partial y^2} = \frac{3}{8\pi} \iint_{S-\Sigma} (\varkappa_1 + \varkappa_2)\, \Omega \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} d\xi \, d\eta + \frac{3}{8\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial\, [(\varkappa_1 + \varkappa_2)\, \Omega]}{\partial \eta} \frac{\partial \ln r}{\partial y} d\xi \, d\eta -$$

$$- \frac{3}{8\pi} \int_{\lambda} [(\varkappa_1 + \varkappa_2)\, \Omega - (\overline{\varkappa}_1 + \overline{\varkappa}_2)\, \overline{\Omega}] \frac{\partial \ln r}{\partial y} \cos(n, y)\, ds + \tfrac{3}{8} (\overline{\varkappa}_1 + \overline{\varkappa}_2)\, \overline{\Omega} \tag{2.7}$$

Кроме того, вычисляем необходимую для дальнейшего смешанную производную от $J_3$. Имеем

$$\frac{\partial^2 J_3}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S-\Sigma} \varkappa_{12} \Omega \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) d\xi \, d\eta + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial\, (\varkappa_{12} \Omega)}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) d\xi \, d\eta -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda} \varkappa_{12} \Omega \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \cos(n, x)\, ds + \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda} \overline{\varkappa}_{12} \overline{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \cos(n, x)\, ds -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda} \overline{\varkappa}_{12} \overline{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \cos(n, x)\, ds$$

или

$$\frac{\partial^2 J_3}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S-\Sigma} \varkappa_{12} \Omega \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) d\xi \, d\eta + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial\, (\varkappa_{12} \Omega)}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) d\xi \, d\eta -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda} (\varkappa_{12} \Omega - \overline{\varkappa}_{12} \overline{\Omega}) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \cos(n, x)\, ds + \tfrac{1}{4} \overline{\varkappa}_{12} \overline{\Omega} \tag{2.8}$$

Пользуясь (2.5)—(2.8), подставим вторые производные от (2.4), в выражения (1.1) для $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и $\varkappa_{12}$. Получим

$$\varkappa_1 - \frac{3}{8}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\,\Omega - \frac{1}{16}(\varkappa_1 - \varkappa_2)\,\Omega = \tag{2.9}$$

$$= \varkappa_1{}^* + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S-\Sigma}\left[3(\varkappa_1+\varkappa_2)\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + (\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 + 2\varkappa_{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\right]\Omega\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[3\frac{\partial\left[(\varkappa_1+\varkappa_2)\,\Omega\right]}{\partial \xi}\frac{\partial \ln r}{\partial x} + \frac{\partial(\varkappa_1-\varkappa_2)\,\Omega}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 + 2\frac{\partial(\varkappa_{12}\Omega)}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\right]d\xi\, d\eta -$$

$$- \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\lambda}\Big[3\left\{(\varkappa_1+\varkappa_2)\,\Omega - (\bar\varkappa_1 + \bar\varkappa_2)\,\bar\Omega\right\}\frac{\partial(\ln r)}{\partial x} + \left\{(\varkappa_1-\varkappa_2)\,\Omega - (\bar\varkappa_1 - \bar\varkappa_2)\,\bar\Omega\right\}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 +$$

$$+ 2\left\{(\varkappa_{12}\Omega - \bar\varkappa_{12}\bar\Omega)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\right\}\Big]ds + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S}(\ldots)\,d\xi\, d\eta$$

$$\varkappa_2 - \frac{3}{8}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\,\Omega - \frac{1}{16}(\varkappa_2 - \varkappa_1)\,\Omega = = \varkappa_2{}^* + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S-\Sigma}\Big[3(\varkappa_1+\varkappa_2)\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} -$$

$$- (\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2 + 2\varkappa_{12}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\Big]\Omega\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Sigma}\Big[3\frac{\partial\left[(\varkappa_1+\varkappa_2)\,\Omega\right]}{\partial \xi}\frac{\partial \ln r}{\partial y} - \frac{\partial(\varkappa_1-\varkappa_2)\,\Omega}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial(\varkappa_{12}\Omega)}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\Big]d\xi\, d\eta - \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\lambda}\Big[\Big\{3\left[(\varkappa_1+\varkappa_2)\,\Omega - (\bar\varkappa_1 + \bar\varkappa_2)\,\bar\Omega\right]\frac{\partial \ln r}{\partial y} -$$

$$- \Big[(\varkappa_1-\varkappa_2)\,\Omega - (\bar\varkappa_1 - \bar\varkappa_2)\,\bar\Omega\Big\}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2 +$$

$$+ 2\left\{(\varkappa_{12}\Omega - \bar\varkappa_{12}\bar\Omega\right\}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\Big]ds + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S}(\ldots)\,d\xi\, d\eta$$

$$\varkappa_{12} - \frac{1}{4}\varkappa_{12}\Omega = \varkappa_{12}{}^* + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S-\Sigma}\left[3(\varkappa_1+\varkappa_2)\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x \partial y} + (\cdots)\right]\Omega\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[3\frac{\partial\left[(\varkappa_1+\varkappa_2)\,\Omega\right.}{\partial \xi}\frac{\partial \ln r}{\partial y} + (\cdots)\right]d\xi\, d\eta -$$

$$- \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\lambda}\left[(\cdots) + 2(\varkappa_{12}\Omega + \bar\varkappa_{12}\Omega)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\right]ds + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S}(\cdots)\,d\xi\, d\eta$$

Следует отметить, что эти соотношения для $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ обладают тем свойством, что если решение краевой задачи существует, то интегралы в правой части (2.9), распространенные по области круга $\Sigma$ и окружности круга $\lambda$, малы, если мала площадь круга $\Sigma$. Сделаем замену переменных. От $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ перейдем к $X$, $Y$, $Z$ по формулам

$$\begin{aligned} \varkappa_1 - \frac{3}{8}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\,\Omega - \frac{1}{16}(\varkappa_2 - \varkappa_1)\,\Omega &= X \\ \varkappa_2 - \frac{3}{8}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\,\Omega - \frac{1}{16}(\varkappa_2 - \varkappa_1)\,\Omega &= Y \\ \varkappa_{12} - \frac{1}{4}\varkappa_{12}\Omega &= Z \end{aligned} \tag{2.10}$$

В равенствах (2.10) функция $\Omega$ определяется согласно формуле (1.11).

Докажем, что $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ можно выразить однозначно через $X$, $Y$, $Z$. Решим систему (2.10) относительно $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ (полагая $\Omega$ параметром), тогда получим

$$\varkappa_1 = \frac{(1 - {}^7/_{16}\,\Omega)\,X + {}^5/_{16}\,\Omega Y}{1 - {}^7/_8\,\Omega\,(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12}) + {}^3/_{32}\,\Omega^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{{}^5/_{16}\,\Omega X + (1 - {}^7/_{16}\,\Omega)\,Y}{1 - {}^7/_8\,\Omega + {}^3/_{32}\,\Omega^2}, \quad \varkappa_{12} = \frac{Z}{1 - {}^1/_4\,\Omega} \tag{2.11}$$

Так как $\omega \leqslant 1$ согласно (1.8), то $\Omega \leqslant 1$. Поэтому знаменатель не обращается в нуль, т. е.

$$1 - \frac{7}{8}\,\Omega + \frac{3}{32}\,\Omega^2 \neq 0$$

Так как $\omega$ согласно (1.7) есть функция $e_i = e_i\,(\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \varkappa_{12})$, то

$$\Omega = \Omega\,(\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \varkappa_{12}) \tag{2.12}$$

Пусть в этой функции произведена замена переменных по формулам (2.10); тогда получим

$$\Omega = \overline{\Omega}\,(X,\ Y,\ Z,\ \Omega) \tag{2.13}$$

Составим производную $d\overline{\Omega}\,/\,d\Omega$. Имеем

$$\Phi = \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial \Omega} = \frac{\partial \Omega}{\partial e_{i1}} \left[ \frac{\partial e_{i1}}{\partial \varkappa_1} \frac{\partial \varkappa_1}{\partial \Omega} + \frac{\partial e_{i1}}{\partial \varkappa_2} \frac{\partial \varkappa_2}{\partial \Omega} + \frac{\partial e_{i1}}{\partial \varkappa_{12}} \frac{\partial \varkappa_{12}}{\partial \Omega} \right] \tag{2.14}$$

Здесь согласно (1.11)

$$\frac{\partial e_{i1}}{\partial \varkappa_1} = \frac{h}{\sqrt{3}}\,\frac{\varkappa_1 + {}^1/_2\,\varkappa_2}{\sqrt{P_\varkappa}}, \qquad \frac{\partial e_{i1}}{\partial \varkappa_2} = \frac{h}{\sqrt{3}}\,\frac{\varkappa_2 + {}^1/_2\,\varkappa_1}{\sqrt{P_\varkappa}}, \qquad \frac{\partial e_{i1}}{\partial \varkappa_{12}} = \frac{h}{\sqrt{3}}\,\frac{\varkappa_{12}}{\sqrt{P_\varkappa}} \tag{2.15}$$

Из (2.11), используя (2.10), последовательно находим

$$\frac{\partial \varkappa_1}{\partial \Omega} = \frac{-{}^7/_{16}\,X + {}^5/_{16}\,Y}{1 - {}^7/_8\,\Omega + {}^3/_{32}\,\Omega^2} - \frac{[(1 - {}^7/_{16}\,\Omega)\,X + {}^5/_{16}\,\Omega Y]\,[-{}^7/_8 + {}^6/_{32}\,\Omega]}{[1 - {}^7/_8\,\Omega + {}^3/_{32}\,\Omega^2]^2} = \tag{2.16}$$

$$= \frac{-{}^7/_{16}X + {}^5/_{16}Y}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2} + \frac{\varkappa_1\,({}^7/_8 - {}^3/_{16}\Omega)}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2} = \frac{({}^7/_{16} - {}^3/_{32}\Omega)\,\varkappa_1 + {}^5/_{16}\,(1 - {}^7/_{16}\Omega)\,\varkappa_2}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2}$$

Аналогично имеем

$$\frac{\partial \varkappa_2}{\partial \Omega} = \frac{({}^7/_{16} - {}^3/_{16}\Omega)\,\varkappa_2 + {}^5/_{16}\,(1 - {}^7/_{16}\Omega)\,\varkappa_1}{1 - {}^7/_8\,\Omega + {}^3/_{32}\,\Omega^2} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial \varkappa_{12}}{\partial \Omega} = \frac{{}^1/_4\,\varkappa_{12}}{1 - {}^1/_4\Omega} \tag{2.18}$$

Подставив (2.15) — (2.18) в (2.18) в (2.14), получим

$$\Phi = \frac{\partial \Omega}{\partial e_{i1}}\,\frac{h}{\sqrt{3P_\varkappa}} \left\{ \frac{(\varkappa_1 + {}^1/_2\,\varkappa_2)\,[({}^7/_{16} - {}^3/_{32}\Omega)\,\varkappa_1 + {}^5/_{16}\,(1 - {}^7/_{16}\cdot\Omega)\,\varkappa_2]}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\varkappa_2 + {}^1/_2\varkappa_1)\,[({}^7/_{16} - {}^3/_{32}\Omega)\,\varkappa_2 + {}^5/_{16}\,(1 - {}^7/_{16}\Omega)\,\varkappa_1]}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2} + \frac{{}^1/_4\varkappa_{12}{}^2}{1 - {}^1/_4\,\Omega} \right\} \tag{2.19}$$

Оценим функцию $\Phi$ по модулю, используя формулы (1.11).

Имеем

$$|\Phi| = \frac{\partial\Omega}{\partial e_{i1}} \frac{h}{\sqrt{3P_\varkappa}} \Big[ \frac{34}{32} P_\varkappa - \frac{{}^{15}/_{32}(1-\Omega)\varkappa_1^2 - {}^{15}/_{32}(1-\Omega)\varkappa_1^2}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2} -$$

$$- \frac{{}^{34}/_{32} P_\varkappa {}^3/_{32}\Omega^2}{1 - {}^7/_8 + {}^3/_{32}\Omega^2} + \frac{{}^{9\cdot 5}/_{128}\Omega^2\varkappa_{12}^2}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2} + \frac{{}^{2\cdot 4}/_{64}\Omega\varkappa_1\varkappa_2 + {}^{4\cdot 5}/_{32}\Omega(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2} -$$

$$- \frac{[(0.9)^2 - 0.969\Omega + (0.583\Omega)^2]\varkappa_{12}^2}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2} \Big] \leqslant \frac{\partial\Omega}{\partial e_{i1}} \frac{h}{\sqrt{3P_\varkappa}} \Big[ \frac{34}{32} P_\varkappa + \frac{{}^{4\cdot 5}/_{32}\Omega P_\varkappa}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2} \Big] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\partial\Omega}{\partial e_{i1}} \frac{h}{\sqrt{3P_\varkappa}} \Big[ \frac{34}{32} P_\varkappa + \frac{4.5}{32} P_x \Big] = \frac{\partial\Omega}{\partial e_{i1}} \frac{h}{\sqrt{3P_\varkappa}} \frac{38.5}{32} P_\varkappa \tag{2.20}$$

Наконец, вычисляем производную:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial e_{i1}} = \frac{\partial}{\partial e_{i1}} \Big[ \frac{3}{e_{i1}^3} \int_0^{e_{i1}} \omega(e_i) e_i^2 de_i \Big] = - \frac{3^2}{e_{i1}^4} \int_0^{e_{i1}} \omega(e_i) e_i^2 de_i + \frac{3\omega(e_{i1})}{e_{i1}} =$$

$$= - \frac{3^2}{e_{i1}^4} \omega(e_{i1}) \frac{e_{i1}^3}{3} + \frac{3^2}{e_{i1}^4} \int_0^{e_{i1}} \frac{e_i^3}{3} \frac{d\omega}{de_i} de_i + \frac{3\omega(e_{i1})}{e_{i1}} < \frac{3}{4} \frac{d\omega}{de_{i1}} \tag{2.21}$$

Теперь согласно (2.20) и (2.21) окончательно имеем

$$|\Phi| < \frac{d\omega}{de_{i1}} e_{i1} \frac{38.5}{32} \frac{3}{4} = 0.9 \frac{d\omega}{de_{i1}} e_{i1} < 0.9 \tag{2.22}$$

Таким образом, $1 - \Phi \neq 0$. Так как доказано, что $d\Omega / d\Omega \neq 1$, то на основании теоремы о неявных функциях существует однозначная, непрерывная по совокупности переменных $X, Y, Z$ дифференцируемая функция $\Omega = \Omega(X, Y, Z)$, и, следовательно, согласно (2.11) существуют непрерывные по совокупности переменных $(X, Y, Z)$ и дифференцируемые функции

$$\varkappa_1 = \varkappa_1(X, Y, Z), \qquad \varkappa_2 = \varkappa_2(X, Y, Z), \qquad \varkappa_{12} = \varkappa_{12}(X, Y, Z) \tag{2.23}$$

Произведем в уравнениях (2.9) замену переменных по формулам (2.10). В результате получим систему, состоящую из интегральных уравнений следующего вида:

$$X = \varkappa_1^* + \frac{1}{8\pi} \iint_{S'} [f_1(\Omega) K_{11}(M, N) X + f_2(\Omega) K_{12}(M, N) Y +$$

$$+ f_3(\Omega) K_{13}(M, N) Z] \Omega d\xi d\eta + \frac{1}{8\pi} \iint_{\Sigma} \Big[ 3 \frac{\partial[\varphi_1(\Omega)(X+Y)\Omega]}{\partial\xi} \frac{\partial \ln r}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial[\varphi_2(\Omega)(X-Y)\Omega]}{\partial\xi} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial r}{\partial\xi}\Big)^2 + 2 \frac{\partial(f_3(\Omega) Z\Omega)}{\partial\xi} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial r}{\partial\xi} \frac{\partial r}{\partial\eta}\Big) \Big] d\xi d\eta -$$

$$- \frac{1}{8\pi} \int_\lambda \Big[ 3\{\varphi_1(\Omega)(X+Y)\Omega - \overline{\varphi}_1(\Omega)(\overline{X} + \overline{Y})\overline{\Omega}\} \frac{\partial \ln r}{\partial x} +$$

$$+ \{\varphi_2(\Omega)(X - Y)\Omega - \overline{\varphi}_2(\Omega)(\overline{X} - \overline{Y})\overline{\Omega}\} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial r}{\partial\xi}\Big)^2 +$$

$$+ 2\{f_3(\Omega) Z\Omega - \overline{f}_3(\Omega)\overline{Z}\overline{\Omega}\} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial r}{\partial\xi} \frac{\partial r}{\partial\eta}\Big) \Big] \cos(n, x) ds + (\cdots) \tag{2.24}$$

Здесь $\varphi_i(\Omega)$, $f_i(\Omega)$ — непрерывные и дифференцируемые функции

$$|\varphi_i(\Omega)| < 1, \qquad |f_i(\Omega)| \leqslant 1 + \delta \qquad \left(\delta < \tfrac{1}{2}\right) \tag{2.25}$$

и введены следующие обозначения:

$$K_{11}(M, N) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \psi_1(M, N) & \text{для} \quad |M^2 - N^2| > \rho \\ 0 + \psi_1(M, N) & \text{для} \quad |M^2 - N^2| \leqslant \rho \end{cases} \tag{2.26}$$

Полученная система интегральных уравнений (2.24) характерна тем, что первый интеграл, распространенный по всей области пластины, и третий контурный интеграл непрерывны при непрерывности $X$, $Y$, $Z$ и допускают дифференцирование любое число раз в любой точке $(x, y)$. Эта система содержит интегралы вида

$$I_1 = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial \Phi(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \ln r}{\partial x} d\xi\, d\eta, \quad I_2 = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial \Phi(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{d\bar{\xi}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r^2}{d\xi}\right) d\xi\, d\eta \tag{2.27}$$

которые берутся по области круга $\Sigma$ и содержат первые производные от $X$, $Y$, $Z$. При заданных функциях $X$, $Y$, $Z$ и допустимости дифференцируемости их по $(x, y)$ эти интегралы существуют и малы, если мала область круга $\Sigma$ радиуса $\rho$ с центром в точке $(x, y)$.

Исследуем более подробно, например, первый интеграл (2.27). Перейдем к полярной системе координат:

$$\xi = \rho \cos\varphi, \qquad \eta = \rho \sin\varphi; \qquad \bar{\xi} = x + \xi, \qquad \bar{\eta} = y + \eta$$

Тогда интеграл $I_1$ преобразовывается к виду

$$I_1 = \int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi(x + \rho\cos\varphi,\ y + \rho\sin\varphi)}{\partial \xi} \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi \tag{2.28}$$

Так как

$$\frac{\partial \Phi(x + \xi,\ y + n)}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi(x + \rho(\xi, \eta)\cos\varphi(\xi, \eta), \ldots)}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \frac{\partial \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}{\partial \xi} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \arccos\frac{\xi - x}{\rho} = -\frac{1}{\rho}\sin\varphi$$

то

$$I_1 = \int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\sin\varphi\right) \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi \tag{2.29}$$

Заметим, что если существует $\partial \Phi / \partial \xi$, то при $\rho = 0$ интеграл существует. Преобразуем интеграл (2.29) по частям. Первое слагаемое $A$ дает

$$A = \int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \cos^2\varphi\, d\varphi\, d\rho = \int\limits_0^{2\pi} [\Phi(x + \rho\cos\varphi,\ y + \rho\sin\varphi) - \Phi(x, y)] \cos^2\varphi\, d\varphi$$

Второе слагаемое $B$ в выражении (2.29) преобразуется к виду

$$B = -\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho}\,\Phi(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\varphi\,d\rho$$

Прибавим к $B$ величину, равную нулю:

$$\Phi(x, y)\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\varphi\,d\rho = \Phi \lim_{\varepsilon_n\to 0}\int_{\varepsilon_n}^{\rho}\frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\varphi\,d\rho = 0$$

(заметим, что рассмотренный интеграл не абсолютно сходится); получим

$$B = -\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi) - \Phi(x, y)}{\rho}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\varphi\,d\rho \qquad (2.30)$$

Применим теорему Лагранжа к подинтегральному выражению $B$:

$$B = -\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Phi(x+\theta\rho\cos\varphi,\ y+\theta\rho\sin\varphi)}{\partial\varphi}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\varphi d\rho \qquad (0<\theta<1)$$

Применяя теорему о среднем, а также обратную теорему Лагранжа, получим, что

$$B = -\int_0^{2\pi}\bar{\theta}_1[\Phi(x+\bar{\theta}\rho\cos\varphi,\ y+\bar{\theta}\rho\sin\varphi) - \Phi(x, y)](\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\varphi \quad \begin{pmatrix}0<\bar{\theta}<1\\ 0<\bar{\theta}_1<1\end{pmatrix}$$

и, следовательно, интеграл $I_1$ равен:

$$I_1 = \int_0^{2\pi}[\Phi(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi) - \Phi(x, y)]\cos^2\varphi\,d\varphi -$$

$$-\int_0^{2\pi}[\Phi(x+\theta\rho\cos\varphi,\ y+\theta\rho\sin\varphi) - \Phi(x, y)][\cos^2\varphi - \sin^2\varphi]\,d\varphi \qquad (2.31)$$

Аналогично можно преобразовать и другие интегралы вида (2.27).

Сделав указанные преобразования в уравнениях (2.24), получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $X$, $Y$, $Z$, из которых здесь приводим первое (остальные будут аналогичного вида):

$$X = x_1^* + \frac{1}{8\pi}\iint[f_1(M, N, \Omega)K_{11}(M, N)X + f_2(M, N, \Omega)K_{12}(M, N)Y +$$

$$+ f_3(M, N, \Omega)K_{13}(M, N)Z]\,\Omega\,d\xi\,d\eta -$$

$$-\frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi}\{[\varphi_1(\Omega)\Omega(X+Y)]_{0_1} - \varphi_1(\Omega)\Omega(X+Y)\}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\varphi -$$

$$-\frac{2}{8\pi}\int_0^{2\pi}\{[\varphi_2(\Omega)\Omega(X-Y)]_{0_2} - \varphi_2(\Omega)\Omega(X-Y)\}(3\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \sin^4\varphi)\,d\varphi -$$

$$-\frac{2}{8\pi}\int_0^{2\pi}\{[\varphi_3(\Omega)\Omega Z]_{\theta_3} - \varphi_3(\Omega)\Omega Z\}[-2\sin\varphi\cos\varphi +$$

$$+ 4(\cos^3\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\cos\varphi]\,d\varphi \qquad (2.32)$$

$$\ldots \varphi_2 (\Omega)\, \Omega\, (X - Y)\} \, (3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \sin^4 \varphi)\, d\varphi \, -$$

$$-\frac{2}{8\pi} \int_0^{2\pi} \{[\varphi_3 (\Omega)\, \Omega Z]_{\theta_s} - \varphi_3 (\Omega)\, \Omega Z\} \, [-2 \sin \varphi \cos \varphi + 4 (\cos^3 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi \cos \varphi]\, d\varphi$$

Граница пластических областей определится условием

$$e_s = e_i \, [X (x, y), \; Y (x, y), \; Z (x, y)]. \qquad (2.36$$

**§ 3. Некоторые вспомогательные предложения.** В дальнейшем будут использованы локальные теоремы существования нелинейных интегральных уравнений, доказанные В. В. Немыцким [1]. Доказательство этих теорем основано на исследовании непрерывных преобразований в функциональном пространстве, при этом существенно используется теорема Колмогорова-Шаудера о неподвижной точке при непрерывных преобразованиях и принцип Тихонова-Каччиополи.

Результаты получены для пространства Гильберта (пространства сходимости в среднем) и для пространства непрерывных функций (пространства равномерной сходимости) при несимметричном ядре.

$$\varphi(x) = \int K(x, y) f(y, \varphi(y))\, dy$$

(3.

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция.

Для доказательства существования и единственности решения уравнения (3.1) в пространстве равномерной сходимости надо доказать, что:

(а) оператор

$$A(u) = \int K(x, y)\, P(y, u(y))\, dy$$

для множества $|u(x)| < K$ в пространстве равномерной сходимости компактен (здесь используется теорема Колмогорова);

(б) оператор $A(u)$ непрерывен в пространстве равномерной сходимости;

(в) оператор $A(u)$ непрерывен для $|u(x)| < K$ в пространстве равномерной сходимости.

Выполнение (а), (б), (в) обеспечивает существование неподвижной точки, т. е. существование решения уравнения (3.1).

Дадим формулировку локальной теоремы В. В. Немыцкого существования решения нелинейного интегрального уравнения.

**А.** Уравнение (3.1) имеет решение, если выполнены условия:

(1) $$\iint K^2(x, y)\, dx\, dy = C_1^2 < \infty$$

(2) $$\sup f^2(x, u(x)) < C(x)$$

где $C(x)$ суммируем для всех $u(x)$ таких, что $|u(x)| < K$;

(3) $f(x, u)$ непрерывна по $u$

(4) $C_1 C_2 < K \qquad \left(C_2 = \int C(x)\, dx\right)$

**В.** Уравнение (3.1) допускает единственное решение при условиях (которые обеспечивают применение принципа Тихонова-Каччиополи):

(1) $$\iint K^2(x, y)\, dx\, dy = D^2 = \mathrm{const}$$

(2) $$\int f^2(y, u(y))\, dy \leqslant D^2 \quad \text{для } |u| < K$$

(3) $$|f(x, u') - f(x, u'')| < L\,|u' - u''|$$

(4) $$B^2 L < 1$$

(5) $$BD < K$$

Аналогично имеется теорема В. В. Немыцкого для систем нелинейных интегральных уравнений: система интегральных уравнений

$$u_i(\beta) = \lambda \int\limits_R K_i(\alpha, \beta) f_i(\alpha, Z_1, \ldots, Z_n)\, \alpha\beta \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

допускает единственное решение, если:

(1) $\iint |K_i(\alpha, \beta)|^p dx\, dy = C_1 < \infty$

(2) $|f_i(\alpha, Z_1, \ldots, Z_n)| < \varphi(\alpha), \qquad \int |\varphi(\alpha)|^q d\alpha < \infty$

(3) функция $f(\alpha, Z_1, \ldots, Z_n)$ является непрерывной для всех значений;

(4) параметр $\lambda$ достаточно мал;

(5) функция $f_2(\alpha, Z_2, \ldots, Z_n)$ удовлетворяет условию Гельдера.

**§ 4. Некоторые теоремы существования интегральных уравнений в большом.** Предварительно укажем теорему, доказательство которой дано в работе [5].

*Теорема 1.* Нелинейное интегральное уравнение вида

$$y = \int\limits_\alpha^x \int\limits_\beta^y K_1 f_1 dN + \psi(M) + \varphi(M) \tag{4.1}$$

(где функции $K_1$, $\psi(M)$, $\varphi(M)$ непрерывны) имеет единственное решение, если выполняется условие

$$|f_1(M_1, y)| < Ay \qquad (y > 0) \tag{4.2}$$

*Теорема 2.* Рассмотрим уравнение

$$y(M) = \int\limits_\alpha^x \int\limits_\beta^y K_1(M, N) f_1(N, y)\, dN + \int\limits_\lambda K_2(M, N) f_2(N, y)\, dN + \varphi(M) \tag{4.3}$$

В силу предыдущей теоремы 1 для $\psi(M)$ получим интегральное уравнение вида

$$\psi(M) = \int\limits_\lambda K_2 f_2 \Big(N, \iint K_1 f_1\, dN + \psi(M) + \varphi(M)\Big)\, dN \tag{4.4}$$

Предполагая область интегрирования достаточно малой и считая, что для подинтегральной функции уравнения (4.4) выполнены условия А и В теоремы В. В. Немыцкого (§ 3), получим, что уравнение (4.3) имеет единственное решение.

Полученную теорему существования можно распространить и на систему нелинейных интегральных уравнений.

*Теорема 3.* Система нелинейных интегральных уравнений вида

$$u_i(\alpha) = \int\limits_\alpha^x \int\limits_\beta^y K_i^{(1)} f_i^{(1)}(\beta, z_1, \ldots, z_n)\, d\beta + \psi_i(\alpha) + \varphi_i(\alpha) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.5}$$

при непрерывных $K_i^{(1)}$, $\psi_i$, $\varphi_i$ имеет единственное решение, если функция $f_i^{(1)}$ удовлетворяет условию

$$|f_i^{(1)}| < A\,[\,|z_1| + \ldots + |z_n|\,] \tag{4.6}$$

Доказательство этой теоремы дано в работе [5].

*Теорема 4.* Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений вида

$$\begin{aligned} u_i(\alpha) = \int\limits_\alpha^x \int\limits_\beta^y K_i^{(1)}(\alpha, \beta)\, f_i^{(1)}(\alpha, z_1, \ldots, z_n)\, d\alpha\, d\beta\, + \\ + \lambda \int K_i^{(2)} f_i^{(2)}[\alpha, z_1, \ldots, z_n]\, d\beta + \varphi_i(\alpha) \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{4.7}$$

В силу предыдущей теоремы для функций $\varphi_i(\alpha)$ имеем систему

$$\psi_i(\alpha) = \lambda \int\limits_\gamma K_i^{(2)} f_i^{(2)} \Big[\beta, \ldots, \int\limits_\alpha^x \int\limits_\beta^y K_i^{(1)} f_i^{(1)}\, d\beta + \psi_i(\beta) + \psi_i(\alpha), \ldots\Big] d\varphi \quad (i=1,\ldots,n) \tag{4.8}$$

Предполагая область интегрирования достаточно малой и считая, что для подинтегральной функции выполняются условия теоремы В. В. Немыцкого для систем, получим, что система уравнений (4.7) имеет единственное решение.

*Теорема 5.* Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$y(M) = \int f(y)\, y\, \Gamma(M, N)\, dN + \alpha\varphi(M) \tag{4.9}$$

где $\alpha$ — произвольный параметр, а функции $f, \Gamma$ и $\varphi$ удовлетворяют следующим условиям:

(а) функция $f(y) = f\{\omega[e_i(y)]\}$ удовлетворяет условиям:

(1) $\omega(e_i) \neq 0,$ если $e_i > 1$

$\omega(e_i) \equiv 0, \quad f[\omega(e_i)] \equiv 0,$ если $e_i \leqslant 1$ (4.10)

(2) $|f\{\omega[e_i(y)]\}| < A = \text{const}$ (4.11)

(3) $\left|\dfrac{df}{d\omega}\right| < B = \text{const}$ (4.12)

(4) $\omega < \omega(e_i) + \dfrac{d\omega}{de_i} e_i \leqslant 1 \qquad \omega \geqslant 0, \quad \dfrac{d\omega}{de_i} > 0$ (4.13)

(5) $\dfrac{d\omega}{de_i} e_i < \dfrac{1}{e_i^a} \quad (a > 0)$ или $\dfrac{\partial\omega}{de_i} e_i \to 0$ при $e_i \to \infty$ (4.14)

что следует из условия (4)

(6) $e_i = \psi(y) \geqslant 0$ (дифференцируемая функция) (4.15)

(б) функция $\Gamma(M, N)$ дифференцируема по каждому аргументу;

(в) функция $\varphi(M)$ имеет производную.

При этих условиях нелинейное интегральное уравнение (4.9) имеет дифференцируемое решение.

*Доказательство.* Произведем замену искомой функции $y$ в уравнении (4.9) по формуле

$$y = \alpha(z + \varphi)$$

Тогда получим

$$z = \int f\,[\alpha\,(z + \varphi)]\;[z + \varphi]\;\Gamma dN \tag{4.16}$$

Согласно условию (4.10) существует решение уравнения (4.16) $z \equiv 0$ для $\alpha \leqslant \alpha_1$ и, следовательно,

$$f\,[\alpha_1\,\varphi] \equiv 0 \qquad \text{для} \quad \alpha_1 \not\equiv 0$$

Так как функция $f$ дифференцируема, то ее можно представить в следующем виде:

$$f\,[\alpha\,(z + \varphi)] = f\,[(\alpha_1 + \beta)\,(z + \varphi)] = \frac{df\,[(\alpha_1 + \theta_1\beta)\,(z + \varphi)}{d\alpha}\,\beta + f\,[\alpha_1\,(z + \varphi)] \tag{4.17}$$

При этом если $e_i \leqslant 1$, т. е. $|\alpha_1\,(z + \varphi)| < K$, то на основании (4.10)

$$f\,[\alpha_1\,(z + \varphi)] \equiv 0$$

Если же $|\alpha_1\,(z + \varphi)| > K$, т. е. $e_i > 1$, и так как $|\alpha_1 \varphi| < K$, то

$$|\alpha_1 z| > \gamma_0 \neq 0$$

Таким образом, если $|\alpha_1 z| < \gamma_0$, то

$$f\,[\alpha\,(z + \varphi)] = \frac{df}{d\alpha}\beta$$

Если же $|\alpha_1\,z| > \gamma_0$, то функцию $f$ можно представить в виде

$$f\,[\alpha\,(z + \varphi)] = f\,[(\alpha_1 + \beta)\,(z + \varphi)] = \frac{\partial f\,[(\alpha_1 + \theta_2\beta)\,(z + \varphi)]}{\partial \alpha}\,\beta + {}$$
$$+ \frac{\partial f\,[\alpha_1\,(\theta_1 z + \varphi)]}{\partial z}\,z \qquad (0 < \theta_i < 1)$$

Произведем оценку первого слагаемого в правой части (4.17)

$$\frac{df\,[(\alpha_1 + \theta_1\beta)\,(z + \varphi)]}{d\alpha}\,\beta = \frac{df}{d\omega}\frac{d\omega}{de_i}\,\varphi'\,(y)\,(z + \varphi)\Big|_{(\alpha_1+\theta_1\beta)\,(z+\varphi)} =$$

$$= \frac{df}{d\omega}\,\frac{d\omega\,[(\alpha_1 + \theta_1\beta)\,(z + \varphi)]}{de_i}\,e_i\,[\alpha_1 + \beta)\,(z + \varphi)]\,\frac{\varphi'\,(y)\,\beta\,(z + \varphi)}{\varphi\,(\alpha_1 + \beta)\,(z + \varphi)} =$$

$$= \frac{df}{d\omega}\frac{d\omega\,[(\alpha_1 + \theta_1\beta)\,(z + \varphi)]}{de_i}\,e_i\,[(\alpha_1 + \beta)\,(z + \varphi)]\,\frac{\varphi'\,(y)\,\beta\,(z + \varphi)}{\varphi\,[\alpha_1\,(z + \varphi)] + \varphi'\,(y)\,\beta\,(z + \varphi)}$$

$$\left|\frac{df}{d\alpha}\,\beta\right| \leqslant \left|\frac{df}{d\omega}\right|\left|\frac{d\omega\,[(\alpha_1 + \theta_1\beta)\,(z + \varphi)]}{de_i}\,e_i\,[(\alpha_1 + \beta)\,(z + \varphi)]\right.$$

Но на основании условия (4.14) для функции $\omega\,(e_i)$ следует, что порядок $d\omega\,/\,de_i$ не ниже

$$\frac{1}{e_i^{\,1+a}} \qquad (a > 0), \qquad \text{или} \qquad \frac{d\omega}{de_i}\,e_i < \varepsilon \qquad \text{для} \qquad e_i > N$$

где $\varepsilon$ — произвольно малое положительное число, $N$ — достаточно большое положительное число.

Кроме того, имеем $e_i = \varphi\,(y) \leqslant My$. Следовательно,

$$|\varphi\,(y_1) - \varphi\,(y_2)| \leqslant M\,|\,y_1 - y_2\,|$$

Таким образом, имеем оценку

$$\left|\frac{df}{d\alpha}\beta\right| \leqslant \left|\frac{df}{d\omega}\right| L \frac{1}{e_i{}^a}$$

Оценка второго слагаемого получается аналогично. Следовательно, оценка для функции $f$ будет

$$|f[\alpha(z+\varphi)]| < N\frac{1}{e_i{}^a} \qquad (e_i > 1) \tag{4.18}$$

Рассмотрим оператор

$$O(z) = \int f[\alpha(z+\varphi)][z+\varphi]\,\Gamma dN$$

при фиксированном $\alpha$. Этот оператор $O(z)$ для выпуклого замкнутого множества пространства равномерной сходимости $|z| < K$, где $K$ — достаточно большое число, легко видеть, компактен и непрерывен на этом множестве.

Действительно, в силу неравенства (4.18) для достаточно большого $K$

$$|O(z)| < N(\alpha) < K$$

Следовательно, сфера $|z| < K$ преобразовывается в свою часть и поэтому согласно теореме Колмогорова-Шаудера-Немыцкого имеет по крайней мере одну неподвижную точку, т. е. решение.

Указанные теоремы справедливы и для системы интегральных уравнений вида

$$X = \int f_1(\omega) K_{11} X dN + \int f_2(\omega) K_{12} Y dN + \int f_3(\omega) K_{13} Z\, dN + \alpha\varphi_1 \tag{4.19}$$

если подинтегральные функции удовлетворяют условиям теоремы 5.

**§ 5. Существование решения системы (2.35).** Рассмотрим систему интегральных уравнений (2.35) без условия (2.33). Покажем, что все условия теоремы 4 существования и единственности решения для системы (2.35) выполнены. Функции $f_i(\Omega)$ дифференцируемы.

Если выбрать $\rho$ достаточно малым, то второй криволинейный интеграл в уравнении (2.35) мал, и следовательно, условия теоремы Немыцкого будут выполнены. Таким образом, система (2.35) имеет единственное решение. Подставляя полученное решение в условие (2.33), получаем области, на которые распространяется двойной интеграл системы (2.35).

Допустим, что известные функции

$$\varkappa_1{}^* = \alpha\varkappa_1{}^\circ, \qquad \varkappa_2{}^* = \alpha\varkappa_2{}^\circ, \qquad \varkappa_{12}{}^* = \alpha\varkappa_{12}{}^\circ$$

при некотором значении параметра $\alpha = \alpha_1$ выбраны так, что вся область пластины покрыта областями, удовлетворяющими условию (2.34). Тогда решать систему нелинейных интегральных уравнений (2.32) указанным способом нельзя. Система нелинейных уравнений принадлежит к типу фредгольмовых в отличие от уравнений (2.35) вольтеровского типа.

Затем определим

$$\int\limits_{\lambda} \frac{1}{8\pi}\left\{(\varkappa_1 - \varkappa_2)\,\Omega\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 \cos(n, x)\right]\right\} ds = -\tfrac{1}{16}(\varkappa_1 - \varkappa_2)\,\Omega$$

Тогда $\partial^2 I_1 / \partial x^2$ принимает вид:

$$\frac{\partial^2 J_1}{\partial x^2} = \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S-\Sigma}(\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2\right]\Omega\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(\varkappa_1 - \varkappa_2)\,\Omega\right]\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 d\xi\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\lambda}\left[(\varkappa_1 - \varkappa_2)\,\Omega - (\overline{\varkappa}_1 - \overline{\varkappa}_2)\,\overline{\Omega}\right]\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 \cos(n, x)\right] ds + \tfrac{1}{16}(\overline{\varkappa}_1 - \overline{\varkappa}_2)\,\Omega \qquad (2.5)$$

Черточки для $(\overline{\varkappa}_1 - \overline{\varkappa}_2)\,\overline{\Omega}$ обозначают, что функция взята в центре $(x, y)$ круга $\Sigma$. Аналогичные вычисления дают

$$\frac{\partial^2 J_2}{\partial x^2} = \frac{3}{8\pi}\iint\limits_{S-\Sigma}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\,\Omega\,\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\, d\xi\, d\eta + \frac{3}{8\pi}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial\,[(\varkappa_1 + \varkappa_2)\,\Omega]}{\partial \xi}\,\frac{\partial \ln r}{\partial x}\, d\xi\, d\eta -$$

$$- \frac{3}{8\pi}\int\limits_{\lambda}\left[(\varkappa_1 + \varkappa_2)\,\Omega - (\overline{\varkappa}_1 + \overline{\varkappa}_2)\,\overline{\Omega}\right]\frac{\partial \ln r}{\partial x}\cos(n, x)\, ds + \tfrac{3}{8}(\overline{\varkappa}_1 + \overline{\varkappa}_2)\,\overline{\Omega}$$

$$\frac{\partial^2 J_3}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S-\Sigma}\varkappa_{12}\,\Omega\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial\,(\varkappa_{12}\Omega)}{\partial \xi}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\lambda}\varkappa_{12}\Omega\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\cos(n, x)\, ds \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 J_1}{\partial y^2} = -\frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S-\Sigma}(\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2\Omega\, d\xi\, d\eta - \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial\,[(\varkappa_1 - \varkappa_2)\,\Omega]}{\partial \eta}\,\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2 d\xi\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\lambda}\left\{\left[(\varkappa_1 - \varkappa_2)\,\Omega - (\overline{\varkappa}_1 - \overline{\varkappa}_2)\,\overline{\Omega}\right]\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right]\cos(n, y)\right\} ds - \tfrac{1}{16}(\overline{\varkappa}_1 - \overline{\varkappa}_2)\,\overline{\Omega}$$

$$\frac{\partial^2 J_2}{\partial y^2} = \frac{3}{8\pi}\iint\limits_{S-\Sigma}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\,\Omega\,\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2}\, d\xi\, d\eta + \frac{3}{8\pi}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial\,[(\varkappa_1 + \varkappa_2)\,\Omega]}{\partial \eta}\,\frac{\partial \ln r}{\partial y}\, d\xi\, d\eta -$$

$$- \frac{3}{8\pi}\int\limits_{\lambda}\left[(\varkappa_1 + \varkappa_2)\,\Omega - (\overline{\varkappa}_1 + \overline{\varkappa}_2)\,\overline{\Omega}\right]\frac{\partial \ln r}{\partial y}\cos(n, y)\, ds + \tfrac{3}{8}(\overline{\varkappa}_1 + \overline{\varkappa}_2)\,\overline{\Omega} \qquad (2.7)$$

Кроме того, вычисляем необходимую для дальнейшего смешанную производную от $J_3$. Имеем

$$\frac{\partial^2 J_3}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S-\Sigma}\varkappa_{12}\Omega\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial\,(\varkappa_{12}\Omega)}{\partial \xi}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\lambda}\varkappa_{12}\Omega\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\cos(n, x)\, ds + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\lambda}\overline{\varkappa}_{12}\overline{\Omega}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\cos(n, x)\, ds -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\lambda}\overline{\varkappa}_{12}\overline{\Omega}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\cos(n, x)\, ds$$

или

$$\frac{\partial^2 J_3}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S-\Sigma}\varkappa_{12}\Omega\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial\,(\varkappa_{12}\Omega)}{\partial \xi}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\lambda}(\varkappa_{12}\Omega - \overline{\varkappa}_{12}\overline{\Omega})\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\cos(n, x)\, ds + \tfrac{1}{4}\,\overline{\varkappa}_{12}\overline{\Omega} \qquad (2.8)$$

Пользуясь (2.5)—(2.8), подставим вторые производные от (2.4), в выражения (1.1) для $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и $\varkappa_{12}$. Получим

$$\varkappa_1 - \frac{3}{8}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\Omega - \frac{1}{16}(\varkappa_1 - \varkappa_2)\Omega = \tag{2.9}$$

$$= \varkappa_1^* + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S-\Sigma}\left[3(\varkappa_1 + \varkappa_2)\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + (\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 + 2\varkappa_{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\right]\Omega\, d\xi\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[3\frac{\partial[(\varkappa_1 + \varkappa_2)\Omega]}{\partial \xi}\frac{\partial \ln r}{\partial x} + \frac{\partial(\varkappa_1 - \varkappa_2)\Omega}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 + 2\frac{\partial(\varkappa_{12}\Omega)}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\right]d\xi\, d\eta -$$

$$-\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\lambda}\left[3\left\{(\varkappa_1 + \varkappa_2)\Omega - (\bar\varkappa_1 + \bar\varkappa_2)\bar\Omega\right\}\frac{\partial(\ln r)}{\partial x} + \left\{(\varkappa_1 - \varkappa_2)\Omega - (\bar\varkappa_1 - \bar\varkappa_2)\bar\Omega\right\}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + 2\left\{(\varkappa_{12}\Omega - \bar\varkappa_{12}\bar\Omega)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\right\}\right]ds + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S}(\ldots)\, d\xi\, d\eta$$

$$\varkappa_2 - \frac{3}{8}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\Omega - \frac{1}{16}(\varkappa_2 - \varkappa_1)\Omega = = \varkappa_2^* + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S-\Sigma}\left[3(\varkappa_1 + \varkappa_2)\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} -\right.$$

$$\left. -(\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2 + 2\varkappa_{12}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\right]\Omega\, d\xi\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[3\frac{\partial[(\varkappa_1 + \varkappa_2)\Omega]}{\partial \xi}\frac{\partial \ln r}{\partial y} - \frac{\partial(\varkappa_1 - \varkappa_2)\Omega}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial(\varkappa_{12}\Omega)}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\right]d\xi\, d\eta - \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\lambda}\left[\left\{3\left[(\varkappa_1 + \varkappa_2)\Omega - (\bar\varkappa_1 + \bar\varkappa_2)\bar\Omega\right]\frac{\partial \ln r}{\partial y} -\right.\right.$$

$$\left. - \left[(\varkappa_1 - \varkappa_2)\Omega - (\bar\varkappa_1 - \bar\varkappa_2)\bar\Omega\right\}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + 2\left\{(\varkappa_{12}\Omega - \bar\varkappa_{12}\bar\Omega\right\}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\right]ds + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S}(\ldots)\, d\xi\, d\eta$$

$$\varkappa_{12} - \frac{1}{4}\varkappa_{12}\Omega = \varkappa_{12}^* + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S-\Sigma}\left[3(\varkappa_1 + \varkappa_2)\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x \partial y} + (\cdots)\right]\Omega\, d\xi\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[3\frac{\partial[(\varkappa_1 + \varkappa_2)\Omega}{\partial \xi}\frac{\partial \ln r}{\partial y} + (\cdots)\right]d\xi\, d\eta -$$

$$-\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\lambda}\left[(\cdots) + 2(\varkappa_{12}\Omega + \bar\varkappa_{12}\Omega)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)\right]ds + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S}(\cdots)\, d\xi\, d\eta$$

Следует отметить, что эти соотношения для $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ обладают тем свойством, что если решение краевой задачи существует, то интегралы в правой части (2.9), распространенные по области круга $\Sigma$ и окружности круга $\lambda$, малы, если мала площадь круга $\Sigma$. Сделаем замену переменных. От $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ перейдем к $X$, $Y$, $Z$ по формулам

$$\begin{aligned} \varkappa_1 - \tfrac{3}{8}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\Omega - \tfrac{1}{16}(\varkappa_2 - \varkappa_1)\Omega &= X \\ \varkappa_2 - \tfrac{3}{8}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\Omega - \tfrac{1}{16}(\varkappa_2 - \varkappa_1)\Omega &= Y \\ \varkappa_{12} - \tfrac{1}{4}\varkappa_{12}\Omega &= Z \end{aligned} \tag{2.10}$$

В равенствах (2.10) функция $\Omega$ определяется согласно формуле (1.11).

Докажем, что $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ можно выразить однозначно через $X$, $Y$, $Z$. Решим систему (2.10) относительно $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ (полагая $\Omega$ параметром), тогда получим

$$\varkappa_1 = \frac{(1 - {}^7/_{16}\,\Omega)\,X + {}^5/_{16}\,\Omega Y}{1 - {}^7/_8\,\Omega\,(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12}) + {}^3/_{32}\,\Omega^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{{}^5/_{16}\,\Omega X + (1 - {}^7/_{16}\,\Omega)\,Y}{1 - {}^7/_8\,\Omega + {}^3/_{32}\,\Omega^2}, \quad \varkappa_{12} = \frac{Z}{1 - {}^1/_4\,\Omega} \tag{2.11}$$

Так как $\omega \leqslant 1$ согласно (1.8), то $\Omega \leqslant 1$. Поэтому знаменатель не обращается в нуль, т. е.

$$1 - \frac{7}{8}\,\Omega + \frac{3}{32}\,\Omega^2 \neq 0$$

Так как $\omega$ согласно (1.7) есть функция $e_i = e_i\,(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12})$, то

$$\Omega = \Omega\,(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12}) \tag{2.12}$$

Пусть в этой функции произведена замена переменных по формулам (2.10); тогда получим

$$\Omega = \overline{\Omega}\,(X, Y, Z, \Omega) \tag{2.13}$$

Составим производную $d\overline{\Omega}\,/\,d\Omega$. Имеем

$$\Phi = \frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial\Omega} = \frac{\partial\Omega}{\partial e_{i1}}\left[\frac{\partial e_{i1}}{\partial\varkappa_1}\frac{\partial\varkappa_1}{\partial\Omega} + \frac{\partial e_{i1}}{\partial\varkappa_2}\frac{\partial\varkappa_2}{\partial\Omega} + \frac{\partial e_{i1}}{\partial\varkappa_{12}}\frac{\partial\varkappa_{12}}{\partial\Omega}\right] \tag{2.14}$$

Здесь согласно (1.11)

$$\frac{\partial e_{i1}}{\partial\varkappa_1} = \frac{h}{\sqrt{3}}\,\frac{\varkappa_1 + {}^1/_2\,\varkappa_2}{\sqrt{P_\varkappa}}, \qquad \frac{\partial e_{i1}}{\partial\varkappa_2} = \frac{h}{\sqrt{3}}\,\frac{\varkappa_2 + {}^1/_2\,\varkappa_1}{\sqrt{P_\varkappa}}, \qquad \frac{\partial e_{i1}}{\partial\varkappa_{12}} = \frac{h}{\sqrt{3}}\,\frac{\varkappa_{12}}{\sqrt{P_\varkappa}} \tag{2.15}$$

Из (2.11), используя (2.10), последовательно находим

$$\frac{\partial\varkappa_1}{\partial\Omega} = \frac{-{}^7/_{16}\,X + {}^5/_{16}\,Y}{1 - {}^7/_8\,\Omega + {}^3/_{32}\,\Omega^2} - \frac{[(1 - {}^7/_{16}\,\Omega)\,X + {}^5/_{16}\,\Omega Y]\,[-{}^7/_8 + {}^6/_{32}\,\Omega]}{[1 - {}^7/_8\,\Omega + {}^3/_{32}\,\Omega^2]^2} = \tag{2.16}$$

$$= \frac{-{}^7/_{16}X + {}^5/_{16}Y}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2} + \frac{\varkappa_1\,({}^7/_8 - {}^3/_{16}\Omega)}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2} = \frac{({}^7/_{16} - {}^3/_{32}\Omega)\,\varkappa_1 + {}^5/_{16}\,(1 - {}^7/_{16}\Omega)\,\varkappa_2}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2}$$

Аналогично имеем

$$\frac{\partial\varkappa_2}{\partial\Omega} = \frac{({}^7/_{16} - {}^3/_{16}\Omega)\,\varkappa_2 + {}^5/_{16}\,(1 - {}^7/_{16}\Omega)\,\varkappa_1}{1 - {}^7/_8\,\Omega + {}^3/_{32}\,\Omega^2} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial\varkappa_{12}}{\partial\Omega} = \frac{{}^1/_4\,\varkappa_{12}}{1 - {}^1/_4\Omega} \tag{2.18}$$

Подставив (2.15) — (2.18) в (2.18) в (2.14), получим

$$\Phi = \frac{\partial\Omega}{\partial e_{i1}}\,\frac{h}{\sqrt{3P_\varkappa}}\left\{\frac{(\varkappa_1 + {}^1/_2\,\varkappa_2)\,[({}^7/_{16} - {}^3/_{32}\Omega)\,\varkappa_1 + {}^5/_{16}\,(1 - {}^7/_{16}\cdot\Omega)\,\varkappa_2]}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\varkappa_2 + {}^1/_2\varkappa_1)\,[({}^7/_{16} - {}^3/_{32}\Omega)\,\varkappa_2 + {}^5/_{16}\,(1 - {}^7/_{16}\Omega)\,\varkappa_1]}{1 - {}^7/_8\Omega + {}^3/_{32}\Omega^2} + \frac{{}^1/_4\varkappa_{12}{}^2}{1 - {}^1/_4\,\Omega}\right\} \tag{2.19}$$

Оценим функцию $\Phi$ по модулю, используя формулы (1.11).

Имеем

$$|\Phi| = \frac{\partial\Omega}{\partial e_{i1}} \frac{h}{\sqrt{3P_\varkappa}}\left[\frac{34}{32}P_\varkappa - \frac{{}^{15}/_{32}(1-\Omega)\varkappa_1^2 - {}^{15}/_{32}(1-\Omega)\varkappa_1^2}{1-{}^7/_8\Omega+{}^3/_{32}\Omega^2} - \right.$$

$$- \frac{{}^{34}/_{32}P_\varkappa\,{}^3/_{32}\Omega^2}{1-{}^7/_8+{}^3/_{32}\Omega^2} + \frac{{}^{9\cdot5}/_{128}\Omega^2\varkappa_{12}^2}{1-{}^7/_8\Omega+{}^3/_{32}\Omega^2} + \frac{{}^{2\cdot4}/_{64}\Omega\varkappa_1\varkappa_2 + {}^{4\cdot5}/_{32}\Omega(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)}{1-{}^7/_8\Omega+{}^3/_{32}\Omega^2} -$$

$$\left. - \frac{[(0.9)^2 - 0.969\Omega + (0.583\Omega)^2]\,\varkappa_{12}^2}{1-{}^7/_8\Omega+{}^3/_{32}\Omega^2}\right] \leqslant \frac{\partial\Omega}{\partial e_{i1}} \frac{h}{\sqrt{3P_\varkappa}}\left[\frac{34}{32}P_\varkappa + \frac{{}^{4\cdot5}/_{32}\Omega P_\varkappa}{1-{}^7/_8\Omega+{}^3/_{32}\Omega^2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\partial\Omega}{\partial e_{i1}} \frac{h}{\sqrt{3P_\varkappa}}\left[\frac{34}{32}P_\varkappa + \frac{4.5}{32}P_x\right] = \frac{\partial\Omega}{\partial e_{i1}} \frac{h}{\sqrt{3P_\varkappa}} \frac{38.5}{32}P_\varkappa \tag{2.20}$$

Наконец, вычисляем производную:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial e_{i1}} = \frac{\partial}{\partial e_{i1}}\left[\frac{3}{e_{i1}^3}\int_0^{e_{i1}}\omega(e_i)\,e_i^2 de_i\right] = -\frac{3^2}{e_{i1}^4}\int_0^{e_{i1}}\omega(e_i)\,e_i^2 de_i + \frac{3\omega(e_{i1})}{e_{i1}} =$$

$$= -\frac{3^2}{e_{i1}^4}\omega(e_{i1})\frac{e_{i1}^3}{3} + \frac{3^2}{e_{i1}^4}\int_0^{e_{i1}}\frac{e_i^3}{3}\frac{d\omega}{de_i}de_i + \frac{3\omega(e_{i1})}{e_{i1}} < \frac{3}{4}\frac{d\omega}{de_{i1}} \tag{2.21}$$

Теперь согласно (2.20) и (2.21) окончательно имеем

$$|\Phi| < \frac{d\omega}{de_{i1}}\, e_{i1}\, \frac{38.5}{32}\, \frac{3}{4} = 0.9\,\frac{d\omega}{de_{i1}}\, e_{i1} < 0.9 \tag{2.22}$$

Таким образом, $1 - \Phi \neq 0$. Так как доказано, что $d\Omega\,/\,d\Omega \neq 1$, то на основании теоремы о неявных функциях существует однозначная, непрерывная по совокупности переменных $X, Y, Z$ дифференцируемая функция $\Omega = \Omega(X, Y, Z)$, и, следовательно, согласно (2.11) существуют непрерывные по совокупности переменных $(X, Y, Z)$ и дифференцируемые функции

$$\varkappa_1 = \varkappa_1(X, Y, Z), \qquad \varkappa_2 = \varkappa_2(X, Y, Z), \qquad \varkappa_{12} = \varkappa_{12}(X, Y, Z) \tag{2.23}$$

Произведем в уравнениях (2.9) замену переменных по формулам (2.10). В результате получим систему, состоящую из интегральных уравнений следующего вида:

(2.24)

$$X = \varkappa_1^* + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S'}[f_1(\Omega)K_{11}(M,N)\,X + f_2(\Omega)\,K_{12}(M,N)\,Y +$$

$$+ f_3(\Omega)\,K_{13}(M,N)\,Z]\,\Omega\,d\xi d\eta + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[3\,\frac{\partial[\varphi_1(\Omega)(X+Y)\Omega]}{\partial\xi}\,\frac{\partial\ln r}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial[\varphi_2(\Omega)(X-Y)\Omega}{\partial\xi}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial\xi}\right)^2 + 2\,\frac{\partial(f_3(\Omega)\,Z\Omega)}{\partial\xi}\,\frac{\partial}{\partial\varkappa}\left(\frac{\partial r}{\partial\xi}\,\frac{\partial r}{\partial\eta}\right)\right]d\xi d\eta -$$

$$- \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\lambda}\left[3\,\{\varphi_1(\Omega)(X+Y)\,\Omega - \overline{\varphi}_1(\Omega)(\overline{X}+\overline{Y})\,\overline{\Omega}\}\,\frac{\partial\ln r}{\partial x} + \right.$$

$$+ \{\varphi_2(\Omega)(X-Y)\,\Omega - \overline{\varphi}_2(\Omega)(\overline{X}-\overline{Y})\,\overline{\Omega}\}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial\xi}\right)^2 +$$

$$\left. + 2\,\{f_3(\Omega)\,Z\Omega - \overline{f}_3(\Omega)\,\overline{Z}\overline{\Omega}\}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial\xi}\,\frac{\partial r}{\partial\eta}\right)\right]\cos(n,x)\,ds + (\cdots)$$

Здесь $\varphi_i(\Omega)$, $f_i(\Omega)$ — непрерывные и дифференцируемые функции

$$|\varphi_i(\Omega)| < 1, \qquad |f_i(\Omega)| \leqslant 1 + \delta \qquad \left(\delta < \tfrac{1}{2}\right) \tag{2.25}$$

и введены следующие обозначения:

$$K_{11}(M, N) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \psi_1(M, N) & \text{для} \quad |M^2 - N^2| > \rho \\ 0 + \psi_1(M, N) & \text{для} \quad |M^2 - N^2| \leqslant \rho \end{cases} \tag{2.26}$$

Полученная система интегральных уравнений (2.24) характерна тем, что первый интеграл, распространенный по всей области пластины, и третий контурный интеграл непрерывны при непрерывности $X$, $Y$, $Z$ и допускают дифференцирование любое число раз в любой точке $(x, y)$. Эта система содержит интегралы вида

$$I_1 = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial \Phi(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \ln r}{\partial x} d\xi\, d\eta, \quad I_2 = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial \Phi(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{d\bar{\xi}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r^2}{d\xi}\right) d\xi\, d\eta \tag{2.27}$$

которые берутся по области круга $\Sigma$ и содержат первые производные от $X$, $Y$, $Z$. При заданных функциях $X$, $Y$, $Z$ и допустимости дифференцируемости их по $(x, y)$ эти интегралы существуют и малы, если мала область круга $\Sigma$ радиуса $\rho$ с центром в точке $(x, y)$.

Исследуем более подробно, например, первый интеграл (2.27). Перейдем к полярной системе координат:

$$\xi = \rho \cos \varphi, \qquad \eta = \rho \sin \varphi; \qquad \bar{\xi} = x + \xi, \qquad \bar{\eta} = y + \eta$$

Тогда интеграл $I_1$ преобразовывается к виду

$$I_1 = \int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi(x + \rho\cos\varphi,\ y + \rho\sin\varphi)}{\partial \xi} \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi \tag{2.28}$$

Так как

$$\frac{\partial \Phi(x + \xi,\ y + n)}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi(x + \rho(\xi, \eta)\cos\varphi(\xi, \eta), \ldots)}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \frac{\partial \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}{\partial \xi} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \arccos \frac{\xi - x}{\rho} = -\frac{1}{\rho}\sin\varphi$$

то

$$I_1 = \int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\sin\varphi\right)\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi \tag{2.29}$$

Заметим, что если существует $\partial\Phi / \partial\xi$, то при $\rho = 0$ интеграл существует. Преобразуем интеграл (2.29) по частям. Первое слагаемое $A$ дает

$$A = \int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\cos^2\varphi\, d\varphi\, d\rho = \int_0^{2\pi} [\Phi(x + \rho\cos\varphi,\ y + \rho\sin\varphi) - \Phi(x, y)]\cos^2\varphi\, d\varphi$$

Второе слагаемое $B$ в выражении (2.29) преобразуется к виду

$$B = -\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho}\,\Phi(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\,d\varphi\,d\rho$$

Прибавим к $B$ величину, равную нулю:

$$\Phi(x,\ y)\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\,d\varphi\,d\rho = \Phi\lim_{\varepsilon_n\to 0}\int_{\varepsilon_n}^{\rho}\frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\,d\varphi\,d\rho = 0$$

(заметим, что рассмотренный интеграл не абсолютно сходится); получим

$$B = -\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)-\Phi(x,\ y)}{\rho}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\,d\varphi\,d\rho \qquad (2.30)$$

Применим теорему Лагранжа к подинтегральному выражению $B$:

$$B = -\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Phi(x+\theta\rho\cos\varphi,\ y+\theta\rho\sin\varphi)}{\partial\varphi}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\,d\varphi\,d\rho \qquad (0<\theta<1)$$

Применяя теорему о среднем, а также обратную теорему Лагранжа, получим, что

$$B = -\int_0^{2\pi}\bar{\theta}_1\,[\Phi(x+\bar{\theta}\rho\cos\varphi,\ y+\theta\rho\sin\varphi)-\Phi(x,\ y)](\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\,d\varphi \quad \begin{pmatrix}0<\bar{\theta}<1\\ 0<\bar{\theta}_1<1\end{pmatrix}$$

и, следовательно, интеграл $I_1$ равен:

$$I_1 = \int_0^{2\pi}[\Phi(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)-\Phi(x,\ y)]\cos^2\varphi\,d\varphi\ -$$

$$-\int_0^{2\pi}[\Phi(x+\theta\rho\cos\varphi,\ y+\theta\rho\sin\varphi)-\Phi(x,\ y)][\cos^2\varphi-\sin^2\varphi]\,d\varphi \qquad (2.31)$$

Аналогично можно преобразовать и другие интегралы вида (2.27).

Сделав указанные преобразования в уравнениях (2.24), получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $X$, $Y$, $Z$, из которых здесь приводим первое (остальные будут аналогичного вида):

$$X = \varkappa_1^* + \frac{1}{8\pi}\iint[f_1(M,\ N,\ \Omega)\,K_{11}(M,\ N)\,X + f_2(M,\ N,\ \Omega)\,K_{12}(M,\ N)\,Y\ +$$

$$+ f_3(M,\ N,\ \Omega)\,K_{13}(M,\ N)\,Z]\,\Omega\,d\xi\,d\eta\ -$$

$$-\frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi}\{[\varphi_1(\Omega)\,\Omega\,(X+Y)]_{0_1}-\varphi_1(\Omega)\,\Omega\,(X+Y)\}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\,d\varphi\ -$$

$$-\frac{2}{8\pi}\int_0^{2\pi}\{[\varphi_2(\Omega)\,\Omega\,(X-Y)]_{0_2}-\varphi_2(\Omega)\,\Omega\,(X-Y)\}(3\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\sin^4\varphi)\,d\varphi\ -$$

$$-\frac{2}{8\pi}\int_0^{2\pi}\{[\varphi_3(\Omega)\,\Omega\,Z]_{\theta_3}-\varphi_3(\Omega)\,\Omega Z\}\,[-2\sin\varphi\cos\varphi\ +$$

$$+4(\cos^3\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi\cos\varphi]\,d\varphi \qquad (2.32)$$

где индексы $\theta_i$ у членов $\varphi_i(\Omega)\,\Omega\,(X+Y)$ указывают, что они берутся в точке $(x+\theta_i\rho\cos\varphi,\ \ y+\theta_i\rho\sin\varphi)$, тогда как те же члены с минусом берутся в точке $(x, y)$.

Систему интегральных уравнений (2.32) назовем мажорантной системой для интегро-дифференциального уравнения (1.14).

Заметим, что двойной интеграл в системе (1.14) хотя и берется по всей области пластины, но согласно (1.7) $\Omega$ должно обращаться в нуль в тех случаях, где выполняется условие

$$e_s \geqslant e_i(X, Y, Z) = \tag{2.33}$$

$$= \frac{2\,|Z|}{\sqrt{3}}\sqrt{\varkappa_1^2(X, Y, Z)+\varkappa_2^2(X, Y, Z)+\varkappa_1(X, Y, Z)\,\varkappa_2(X, Y, Z)+\varkappa_{12}^2(X, Y, Z)}$$

Это условие и определяет области, по которым необходимо брать двойной интеграл в системе (2.32). Возможно, конечно, что для всей области пластины условие (2.33) не выполняется и тогда областью интегрирования является вся пластина.

В частном случае, когда не для всей области выполняется

$$e_i\,[X(x, y),\ Y(x, y),\ Z(x, y)] \geqslant e_s \tag{2.34}$$

мажорантная система (2.32) будет состоять из уравнений вида

$$X = \varkappa^* + \frac{1}{8\pi}\int\limits_{a(e_i)}^{X(e_i)}\int\limits_{Y_1(e_i)}^{Y_2(e_i)} [f_1(M, N, \Omega)\,K_{11}X + f_2(M, N, \Omega)\,K_{12}Y +$$

$$+ f_3(M, N, \Omega)\,K_{13}Z]\,\Omega\,d\xi\,d\eta - \tag{2.35}$$

$$-\frac{3}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{[\varphi_1(\Omega)\,\Omega\,(X+Y)]_{\theta_1} - \varphi_1(\Omega)\,\Omega\,(X+Y)\}\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\varphi -$$

$$-\frac{2}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{[\varphi_2(\Omega)\,\Omega\,(X-Y)]_{\theta_2} - \varphi_2(\Omega)\,\Omega\,(X-Y)\}\,(3\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \sin^4\varphi)\,d\varphi -$$

$$-\frac{2}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{[\varphi_3(\Omega)\,\Omega Z]_{\theta_3} - \varphi_3(\Omega)\,\Omega Z\}\,[-2\sin\varphi\cos\varphi + 4(\cos^3\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\cos\varphi]\,d\varphi$$

Граница пластических областей определится условием

$$e_s = e_i\,[X(x, y),\ Y(x, y),\ Z(x, y)] \tag{2.36}$$

**§ 3. Некоторые вспомогательные предложения.** В дальнейшем будут использованы локальные теоремы существования нелинейных интегральных уравнений, доказанные В. В. Немыцким [1]. Доказательство этих теорем основано на исследовании непрерывных преобразований в функциональном пространстве, при этом существенно используется теорема Колмогорова-Шаудера о неподвижной точке при непрерывных преобразованиях и принцип Тихонова-Каччиополи.

Результаты получены для пространства Гильберта (пространства сходимости в среднем) и для пространства непрерывных функций (пространства равномерной сходимости) при несимметричном ядре.

Повторим теорему о неподвижной точке. При непрерывном преобразовании замкнутого выпуклого множества линейного, нормированного полного пространства в свою компактную часть имеется неподвижная точка.

Эта теорема и определяет существенные решения нелинейного интегрального уравнения.

Повторим принцип Тихонова-Каччиополи.

Если при преобразовании полного метрического пространства в свою часть расстояние между образами меньше, чем расстояние между прообразами, то существует, и притом лишь одна, неподвижная точка. Эта теорема и определяет единственное решение интегральных уравнений.

Пусть дано нелинейное интегральное уравнение вида

$$\psi(x) = \int K(x, y) f(y, \psi(y))\, dy \tag{3.1}$$

где $\psi(x)$ — неизвестная функция.

Для доказательства существования и единственности решения уравнения (3.1) в пространстве равномерной сходимости надо доказать, что:

(а) оператор

$$A(u) = \int K(x, y) P(y, u(y))\, dy$$

для множества $|u(x)| < K$ в пространстве равномерной сходимости компактен (здесь используется теорема Колмогорова);

(б) оператор $A(u)$ непрерывен в пространстве равномерной сходимости;

(в) оператор $A(u)$ непрерывен для $|u(x)| < K$ в пространстве равномерной сходимости.

Выполнение (а), (б), (в) обеспечивает существование неподвижной точки, т. е. существование решения уравнения (3.1).

Дадим формулировку локальной теоремы В. В. Немыцкого существования решения нелинейного интегрального уравнения.

**А.** Уравнение (3.1) имеет решение, если выполнены условия:

(1) $$\iint K^2(x, y)\, dx\, dy = C_1^2 < \infty$$

(2) $$\sup f^2(x, u(x)) < C(x)$$

где $C(x)$ суммируем для всех $u(x)$ таких, что $|u(x)| < K$;

(3) $f(x, u)$ непрерывна по $u$

(4) $C_1 C_2 < K \qquad \left(C_2 = \int C(x)\, dx\right)$

**В.** Уравнение (3.1) допускает единственное решение при условиях (которые обеспечивают применение принципа Тихонова-Каччиополи):

(1) $$\iint K^2(x, y)\, dx\, dy = D^2 = \text{const}$$

(2) $$\int f^2(y, u(y))\, dy \leq D^2 \quad \text{для} \quad |u| < K$$

(3) $$|f(x, u') - f(x, u'')| < L\,|u' - u''|$$

(4) $$B^2 L < 1$$

(5) $$BD < K$$

Аналогично имеется теорема В. В. Немыцкого для систем нелинейных интегральных уравнений: система интегральных уравнений

$$u_i(\beta) = \lambda \int_R K_i(\alpha, \beta) f_i(\alpha, Z_1, \ldots, Z_n) \alpha\beta \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

допускает единственное решение, если:

(1) $\iint |K_i(\alpha, \beta)|^p dx\, dy = C_1 < \infty$

(2) $|f_i(\alpha, Z_1, \ldots, Z_n)| < \varphi(\alpha), \qquad \int |\varphi(\alpha)|^q d\alpha < \infty$

(3) функция $f(\alpha, Z_1, \ldots, Z_n)$ является непрерывной для всех значений;

(4) параметр $\lambda$ достаточно мал;

(5) функция $f_2(\alpha, Z_2, \ldots, Z_n)$ удовлетворяет условию Гельдера.

**§ 4. Некоторые теоремы существования интегральных уравнений в большом.** Предварительно укажем теорему, доказательство которой дано в работе [5].

*Теорема 1.* Нелинейное интегральное уравнение вида

$$y = \int_\alpha^x \int_\beta^y K_1 f_1 dN + \psi(M) + \varphi(M) \tag{4.1}$$

(где функции $K_1$, $\psi(M)$, $\varphi(M)$ непрерывны) имеет единственное решение, если выполняется условие

$$|f_1(M_1, y)| < Ay \qquad (y > 0) \tag{4.2}$$

*Теорема 2.* Рассмотрим уравнение

$$y(M) = \int_\alpha^x \int_\beta^y K_1(M, N) f_1(N, y)\, dN + \int_\lambda K_2(M, N) f_2(N, y)\, dN + \varphi(M) \tag{4.3}$$

В силу предыдущей теоремы 1 для $\psi(M)$ получим интегральное уравнение вида

$$\psi(M) = \int_\lambda K_2 f_2 \left(N, \iint K_1 f_1\, dN + \psi(M) + \varphi(M)\right) dN \tag{4.4}$$

Предполагая область интегрирования достаточно малой и считая, что для подинтегральной функции уравнения (4.4) выполнены условия A и B теоремы В. В. Немыцкого (§ 3), получим, что уравнение (4.3) имеет единственное решение.

Полученную теорему существования можно распространить и на систему нелинейных интегральных уравнений.

*Теорема 3.* Система нелинейных интегральных уравнений вида

$$u_i(\alpha) = \int_\alpha^x \int_\beta^y K_i^{(1)} f_i^{(1)}(\beta, z_1, \ldots, z_n)\, d\beta + \psi_i(\alpha) + \varphi_i(\alpha) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.5}$$

при непрерывных $K_i^{(1)}$, $\psi_i$, $\varphi_i$ имеет единственное решение, если функция $f_i^{(1)}$ удовлетворяет условию

$$|f_i^{(1)}| < A[|z_1| + \ldots + |z_n|] \tag{4.6}$$

Доказательство этой теоремы дано в работе [5].

*Теорема 4.* Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений вида

$$\begin{aligned} u_i(\alpha) = \int_\alpha^x \int_\beta^y K_i^{(1)}(\alpha, \beta) f_i^{(1)}(\alpha, z_1, \ldots, z_n)\, d\alpha\, d\beta + \\ + \lambda \int K_i^{(2)} f_i^{(2)}[\alpha, z_1, \ldots, z_n]\, d\beta + \varphi_i(\alpha) \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{4.7}$$

В силу предыдущей теоремы для функций $\varphi_i(\alpha)$ имеем систему

$$\psi_i(\alpha) = \lambda \int_\gamma K_i^{(2)} f_i^{(2)} \left[\beta, \ldots, \int_\alpha^x \int_\beta^y K_i^{(1)} f_i^{(1)}\, d\overline{\beta} + \psi_i(\overline{\beta}) + \psi_i(\alpha), \ldots\right] d\varphi \quad (i=1,\ldots,n) \tag{4.8}$$

Предполагая область интегрирования достаточно малой и считая, что для подинтегральной функции выполняются условия теоремы В. В. Немыцкого для систем, получим, что система уравнений (4.7) имеет единственное решение.

*Теорема 5.* Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$y(M) = \int f(y)\, y\, \Gamma(M, N)\, dN + \alpha\varphi(M) \tag{4.9}$$

где $\alpha$ — произвольный параметр, а функции $f, \Gamma$ и $\varphi$ удовлетворяют следующим условиям:

(а) функция $f(y) = f\{\omega[e_i(y)]\}$ удовлетворяет условиям:

(1) $\omega(e_i) \neq 0,$ если $e_i > 1$

$\omega(e_i) \equiv 0, \quad f[\omega(e_i)] \equiv 0,$ если $e_i \leqslant 1$ (4.10)

(2) $|f\{\omega[e_i(y)]\}| < A = \mathrm{const}$ (4.11)

(3) $\left|\frac{df}{d\omega}\right| < B = \mathrm{const}$ (4.12)

(4) $\omega < \omega(e_i) + \frac{d\omega}{de_i} e_i \leqslant 1 \qquad \omega \geqslant 0, \quad \frac{d\omega}{de_i} > 0$ (4.13)

(5) $\frac{d\omega}{de_i} e_i < \frac{1}{e_i^a} \quad (a > 0)$ или $\frac{\partial\omega}{de_i} e_i \to 0$ при $e_i \to \infty$ (4.14)

что следует из условия (4)

(6) $e_i = \psi(y) \geqslant 0$ (дифференцируемая функция) (4.15)

(б) функция $\Gamma(M, N)$ дифференцируема по каждому аргументу;

(в) функция $\varphi(M)$ имеет производную.

При этих условиях нелинейное интегральное уравнение (4.9) имеет дифференцируемое решение.

*Доказательство.* Произведем замену искомой функции $y$ в уравнении (4.9) по формуле

$$y = \alpha(z + \varphi)$$

Тогда получим

$$z = \int f\,[\alpha\,(z+\varphi)]\,[z+\varphi]\,\Gamma dN \tag{4.16}$$

Согласно условию (4.10) существует решение уравнения (4.16) $z \equiv 0$ для $\alpha \leqslant \alpha_1$ и, следовательно,

$$f\,[\alpha_1 \varphi] \equiv 0 \qquad \text{для} \quad \alpha_1 \not\equiv 0$$

Так как функция $f$ дифференцируема, то ее можно представить в следующем виде:

$$f\,[\alpha\,(z+\varphi)] = f\,[(\alpha_1+\beta)\,(z+\varphi)] = \frac{df\,[(\alpha_1+\theta_1\beta)\,(z+\varphi)}{d\alpha}\beta + f\,[\alpha_1\,(z+\varphi)] \tag{4.17}$$

При этом если $e_i \leqslant 1$, т. е. $|\alpha_1\,(z+\varphi)| < K$, то на основании (4.10)

$$f\,[\alpha_1\,(z+\varphi)] \equiv 0$$

Если же $|\alpha_1\,(z+\varphi)| > K$, т. е. $e_i > 1$, и так как $|\alpha_1\varphi| < K$, то

$$|\alpha_1 z| > \gamma_0 \neq 0$$

Таким образом, если $|\alpha_1 z| < \gamma_0$, то

$$f\,[\alpha\,(z+\varphi)] = \frac{df}{d\alpha}\beta$$

Если же $|\alpha_1 z| > \gamma_0$, то функцию $f$ можно представить в виде

$$f\,[\alpha\,(z+\varphi)] = f\,[(\alpha_1+\beta)\,(z+\varphi)] = \frac{\partial f\,[(\alpha_1+\theta_2\beta)\,(z+\varphi)]}{\partial\alpha}\beta + \\ + \frac{\partial f\,[\alpha_1\,(\theta_1 z+\varphi)]}{\partial z}z \qquad (0 < \theta_i < 1)$$

Произведем оценку первого слагаемого в правой части (4.17)

$$\frac{df\,[(\alpha_1+\theta_1\beta)\,(z+\varphi)]}{d\alpha}\beta = \frac{df}{d\omega}\frac{d\omega}{de_i}\varphi'\,(y)\,(z+\varphi)\Big|_{(\alpha_1+\theta_1\beta)\,(z+\varphi)} =$$

$$= \frac{df}{d\omega}\frac{d\omega\,[(\alpha_1+\theta_1\beta)\,(z+\varphi)]}{de_i}e_i\,[\alpha_1+\beta)\,(z+\varphi)]\,\frac{\varphi'\,(y)\,\beta\,(z+\varphi)}{\varphi\,(\alpha_1+\beta)\,(z+\varphi)} =$$

$$= \frac{df}{d\omega}\frac{d\omega\,[(\alpha_1+\theta_1\beta)\,(z+\varphi)]}{de_i}e_i\,[(\alpha_1+\beta)\,(z+\varphi)]\,\frac{\varphi'\,(y)\,\beta\,(z+\varphi)}{\varphi\,[\alpha_1\,(z+\varphi)]+\varphi'\,(y)\,\beta\,(z+\varphi)}$$

$$\left|\frac{df}{d\alpha}\beta\right| \leqslant \left|\frac{df}{d\omega}\right|\frac{d\omega\,[(\alpha_1+\theta_1\beta)\,(z+\varphi)]}{de_i}e_i\,[(\alpha_1+\beta)\,(z+\varphi)]$$

Но на основании условия (4.14) для функции $\omega\,(e_i)$ следует, что порядок $d\omega\,/\,de_i$ не ниже

$$\frac{1}{e_i^{\,1+a}} \quad (a > 0), \quad \text{или} \quad \frac{d\omega}{de_i}e_i < \varepsilon \quad \text{для} \quad e_i > N$$

где $\varepsilon$ — произвольно малое положительное число, $N$ — достаточно большое положительное число.

Кроме того, имеем $e_i = \varphi\,(y) \leqslant My$. Следовательно,

$$|\varphi\,(y_1) - \varphi\,(y_2)| \leqslant M\,|\,y_1 - y_2\,|$$

Таким образом, имеем оценку

$$\left|\frac{df}{d\alpha}\beta\right| \leqslant \left|\frac{df}{d\omega}\right| L \frac{1}{e_i^{a}}$$

Оценка второго слагаемого получается аналогично. Следовательно, оценка для функции $f$ будет

$$|f[\alpha(z+\varphi)]| < N\frac{1}{e_i^{a}} \qquad (e_i > 1) \tag{4.18}$$

Рассмотрим оператор

$$O(z) = \int f[\alpha(z+\varphi)][z+\varphi]\Gamma dN$$

при фиксированном $\alpha$. Этот оператор $O(z)$ для выпуклого замкнутого множества пространства равномерной сходимости $|z| < K$, где $K$ — достаточно большое число, легко видеть, компактен и непрерывен на этом множестве.

Действительно, в силу неравенства (4.18) для достаточно большого $K$

$$|O(z)| < N(\alpha) < K$$

Следовательно, сфера $|z| < K$ преобразовывается в свою часть и поэтому согласно теореме Колмогорова-Шаудера-Немыцкого имеет по крайней мере одну неподвижную точку, т. е. решение.

Указанные теоремы справедливы и для системы интегральных уравнений вида

$$X = \int f_1(\omega) K_{11} X dN + \int f_2(\omega) K_{12} Y dN + \int f_3(\omega) K_{13} Z\, dN + \alpha\varphi_1 \tag{4.19}$$

если подинтегральные функции удовлетворяют условиям теоремы 5.

**§ 5. Существование решения системы (2.35).** Рассмотрим систему интегральных уравнений (2.35) без условия (2.33). Покажем, что все условия теоремы 4 существования и единственности решения для системы (2.35) выполнены. Функции $f_i(\Omega)$ дифференцируемы.

Если выбрать $\rho$ достаточно малым, то второй криволинейный интеграл в уравнении (2.35) мал, и следовательно, условия теоремы Немыцкого будут выполнены. Таким образом, система (2.35) имеет единственное решение. Подставляя полученное решение в условие (2.33), получаем области, на которые распространяется двойной интеграл системы (2.35).

Допустим, что известные функции

$$\varkappa_1^* = \alpha\varkappa_1^\circ, \qquad \varkappa_2^* = \alpha\varkappa_2^\circ, \qquad \varkappa_{12}^* = \alpha\varkappa_{12}^\circ$$

при некотором значении параметра $\alpha = \alpha_1$ выбраны так, что вся область пластины покрыта областями, удовлетворяющими условию (2.34). Тогда решать систему нелинейных интегральных уравнений (2.32) указанным способом нельзя. Система нелинейных уравнений принадлежит к типу фредгольмовых в отличие от уравнений (2.35) вольтеровского типа.

Система (2.32) состоит из уравнений вида

$$X = \alpha\varkappa_1^\circ + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_S [f_1(\Omega) K_{11}(M, N) X + f_2(M, N, \Omega) K_{12}(M, N) Y +$$

$$+ f_3(M, N, \Omega) K_{13}(M, N) Z]\,\Omega\, d\xi\, d\eta - \tag{5.1}$$

$$-\frac{3}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{[\varphi_1(\Omega)\,\Omega\,(X+Y)]_{\theta_1} - \varphi_1(\Omega)\,\Omega\,(X+Y)\}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\varphi -$$

$$-\frac{2}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{[\varphi_2(\Omega)\,\Omega\,(X-Y)]_{\theta_2} - \varphi_2(\Omega)\,\Omega\,(X-Y)\}(3\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \sin^4\varphi)\,d\varphi -$$

$$-\frac{2}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{[\varphi_3(\Omega)\Omega Z]_{\theta_3} - \varphi_3(\Omega)\Omega Z\}[-2\sin\varphi\cos\varphi + 4(\cos^3\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\cos\varphi)]\,d\varphi$$

где $S$ — вся область пластины и выполнено условие $e_i \gg e_s$.

Применим доказанную теорему 5 о существовании решения для системы неоднородных линейных уравнений. По этой теореме при любом $\alpha$ решение системы (2.35) существует.

Действительно, криволинейный интеграл мал при малом $\rho$, поэтому согласно доказанной теореме определяющим является двойной интеграл, распространенный на всю область пластины.

Так как по условию $\varkappa_1^\circ$ дифференцируем дважды (решение упругой задачи), то существуют всюду вторые производные от $X$, $Y$, $Z$.

Для этого надо дважды продифференцировать каждое уравнение системы (5.1). Получится система интегральных уравнений того же типа (5.1) следовательно, решение для нее существует.

Преобразуем в системе (5.1) в каждом уравнении интеграл по области. Имеем

$$\iint\limits_S f_1(\Omega)\, X\Omega K_{11}(M, N)\, d\xi\, d\eta = \iint\limits_S \left\{\frac{d\,[f(\Omega)\, X\Omega]}{d\xi}\int\limits_0^\xi K_{11}(M, N)\, dN\right\} d\xi\, d\eta \tag{5.2}$$

Вторую производную от $f$ или первую от $\partial f/d\xi$ берем из решения при некотором фиксированном $\rho_1$. Тогда убеждаемся, что двойной интеграл (5.1) условно сходящийся и, следовательно, можно полагать $\rho \to 0$.

Полученное решение при $\rho \to 0$ удовлетворяет тождественно системе (5.1).

Имея решение $X$, $Y$, $Z$, определяем $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ по формуле (2.11) и, следовательно, тождественно удовлетворим интегро-дифференциальному уравнению (1.14). Преобразовывая и дифференцируя определенное число раз $X$, $Y$, $Z$, убеждаемся, что решение $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$, $w$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.10) и краевым условиям (1.13).

*Замечание 1.* Так как при доказательстве существования интегро-дифференциального уравнения мы пользовались только методом последовательных приближений, выраженных в геометрической форме, то, следовательно, метод упругих решений всегда позволяет найти решение. Доказательство теоремы о единственности решения краевой задачи для конечной пластины мы не приводим, так как нами совместно с А. А. Ильюшиным дано доказательство единственности решения задач теории малых упруго-пластических задач [1].

Изложенный выше метод доказательства существования решения краевой задачи (изгиб пластины) нами обобщен на общий случай для любых краевых задач теории малых упруго-пластических деформаций [8].

Все выводы остаются правильными не только для пластины конечных размеров и тела конечных размеров, но и для тел бесконечных размеров. Метод доказательства нами изложен в работе [5].

В этой же работе дан метод доказательства положения, что число пластических областей конечно и что пластические области ограничены.

Заметим также, что решение конкретных задач теории пластичности, в том числе и пространственной задачи [5],[7] показывает быструю сходимость последовательных приближений по методу упругих решений.

*Замечание 2.* Следствием приведенных выше теорем является положение, что уравнение краевой задачи упруго-пластических деформаций есть дифференциальное уравнение эллиптического типа. Действительно, если $(k+1)$-е приближение краевой задачи упруго-пластических деформаций, полученное методом упругих решений, есть решение той же краевой задачи для упругих деформаций с массовыми и поверхностными силами, вычисляемыми по $k$-му приближению.

Следовательно, для $(k+1)$-го приближения мы имеем уравнения, определяющие приближения эллиптическога типа. Выбирая $k$ достаточно большим, мы получаем решение краевой задачи упруго-пластических деформаций с любой заданной точностью. Следовательно, уравнения краевой задачи упруго-пластических деформаций есть дифференциальное уравнение эллиптического типа, если выполнены условия (1.7) и (1.9) и существует вторая производная $d^2\omega/de_i^2$.

Как известно, этим условиям и удовлетворяет функция $\sigma_i = \sigma_i\ (e_i)$, определяемая экспериментальным путем.

Поступила 24 IX 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. ГИТТЛ. 1948.
2. Немыцкий В. В. Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений. Математический сборник. 1934. Т. 41. Вып. 3.
3. Немыцкий В. В. О нелинейных интегральных уравнениях, сравнимых с линейными. ДАН СССР. 1937. Т. XV. Вып. 1.
4. Немыцкий В. В. Решения уравнений эллиптического типа для «малых» областей. Математический сборник. 1936 (новая серия). Т. I (43). Вып. 4.
5. Панферов В. М. О сходимости метода упругих решений в теории упруго-пластических деформаций оболочек. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. I.
6. Панферов В. М. Осесимметричная деформация полубесконечной цилиндрической оболочки. Вестник Московского университета. 1949. № 5.
7. Панферов В. М. Полубесконечная пластина под действием давления на границе. Вестник Московского университета. 1951. № 12.
8. Панферов В. М. Общий метод решения краевых задач теории упруго-пластических деформаций при простом нагружении. Вестник Московского университета. 1952. № 2.