Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В. М. Даревский

(Москва)

В работе на основании результатов, приведенных в ранее опубликованной статье,[1], исследуется вопрос о действии на цилиндрическую оболочку сосредоточенной нагрузки и нагрузки, равномерно распределенной вдоль отрезка линии кривизны средней поверхности оболочки.

Кроме того, излагаются некоторые дополнительные результаты, касающиеся полученного в статье [1] решения при элементарной нагрузке.

При указанных нагрузках та или иная из искомых величин (перемещений или внутренних силовых факторов) определяется в виде достаточно быстро сходящегося функционального ряда или в виде суммы из достаточно быстро сходящегося ряда и функции, выраженной в замкнутой форме. В окрестности точки приложения сосредоточенной нагрузки, а также в окрестностях концевых точек нагруженных отрезков линий кривизны и угловых точек нагруженной площадки устанавливаются простые асимптотические формулы для тех искомых величин, которые не ограничены в окрестностях указанных точек.

В содержание настоящей работы входит также решение уравнений теории цилиндрической оболочки при произвольно распределенной нагрузке конечной интенсивности.

Следует указать, что вопрос о действии на цилиндрическую оболочку нормальной сосредоточенной силы рассматривался Ю. Н. Работновым [2] и В. З. Власовым[3], исходившим из уравнений для пологой цилиндрической оболочки.

Кроме того, в статье Шао Вен Юаня [4], который также исходил из упрощенных уравнений, рассмотрен вопрос о деформации цилиндрической оболочки, на которую действуют две взаимоуравновешивающиеся сосредоточенные силы, нормальные к поверхности оболочки [1].

Решение такой задачи для бесконечно длинной оболочки может быть получено из проводимых ниже результатов (если принять во внимание сказанное в статье [1] на стр. 555—6), причем они позволяют определить все перемещения и, что особенно важно, все внутренние силовые факторы, между тем как в [4] удалось определить лишь радиальные перемещения.

Некоторые известные приемы, формально применявшиеся в [4], используются и здесь, но сопровождаются необходимыми обоснованиями.

Метод, использованный в статье [1] и в настоящей работе, а также ряд полученных результатов остаются в силе и по отношению к вариантам теории оболочек, отличным от принятого здесь.

Обозначения, введенные в статье [1], используются ниже без пояснений.

---

[1] Этот вопрос рассмотрен и в [5], но приведенное там приближенное решение вряд ли приемлемо, так как согласно этому решению прогиб под силой стремится к нулю при бесконечном увеличении длины оболочки.

1. Случай сосредоточенной нагрузки. Как было указано в статье [1], решение вопроса о действии на цилиндрическую оболочку сосредоточенной нагрузки или нагрузки, равномерно распределенной по отрезку линии кривизны средней поверхности S оболочки, заключается в основном в определении соответствующего предела частного решения при элементарной нагрузке. Поэтому, рассматривая сосредоточенную и распределенную по отрезку нагрузки, будем говорить лишь о пределах полученного в статье [1] частного решения при элеменарной нагрузке, когда соответственно каждая или одна из величин α и β стремится к нулю, и называть эти пределы частными решениями при указанных нагрузках.

В случае сосредоточенной нагрузки согласно равенству (4.22)* (значок * над номером формулы будет указывать, что речь идет о формуле из статьи [1]) перемещения и внутренние силовые факторы, соответствующие рассматриваемому частному решению, определяются в точности теми же выражениями вида (4,1)*, как и при элементарной нагрузке, с той только разницей, что функции $f_{\nu n}(\xi)$ заменяются функциями $f_{\nu n}{}^{00}(\xi)$ (см. [1], стр 562) [1].

Из равенства (2.19)* легко получить для $f_{\nu 0}{}^{00}(\xi)$ и $f_{\nu 1}{}^{00}(\xi)$ формулу

$$2f_{\nu 0}{}^{00}(\xi) = f_{\nu 1}{}^{00}(\xi) = \frac{k_\nu Q_\nu E h}{8\pi(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2 R^2} f(\xi) \tag{1.1}$$

где

$$f(\xi) = -\frac{1}{2}\varkappa^{-3}(\sin\varkappa|\xi| + \cos\varkappa\xi)\, e^{-\varkappa|\xi|} + \frac{1}{3}|\xi|^3 \tag{1.2}$$

Для определения функций $f_{\nu n}{}^{00}(\xi)\ (n > 1)$ можно либо воспользоваться равенством (2.18)*, поделив обе его части на α и определив предел правой части при $\alpha \to 0$ по правилу Лопиталя (принимая во внимание, что величина R_n, R_{n1}, R_{n2} не зависят от α), либо использовать равенство (2.13)*, внеся α из коэффициента $\lambda_{\nu n}$ под знак интеграла, перейдя к пределу при $\alpha \to 0$ под знаком интеграла (что законно) и определив последний с помощью вычетов. В результате какой-либо из этих операций и некоторых преобразований получаем

$$4\pi n^3(n^2-1)^2(1-\sigma)(1-\sigma^2)\, h f_{\nu n}{}^{00}(\xi) = 3k_\nu Q_\nu E f_n(\xi) \qquad (n > 1) \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned} f_n(\xi) = {} & (R_{n1}{}^{(1)}\cos nA_{n1}\xi + R_{n2}{}^{(1)}\sin nA_{n1}|\xi|)\, e^{-nB_{n1}|\xi|} + \\ & + (R_{n1}{}^{(2)}\cos nA_{n2}\xi + R_{n2}{}^{(2)}\sin nA_{n2}|\xi|)\, e^{-nB_{n2}|\xi|} \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} R_{n1}{}^{(1)} = {} & R_{n1}A_{n1} + R_nB_{n1} = \tfrac{1}{2}B_{n1}{}^{-1}\Lambda_n{}^{-1}(A_{n1}{}^2 + B_{n1}{}^2)(A_{n2}{}^2 + \\ & + B_{n2}{}^2)^2\,[(A_{n1}{}^2 - B_{n1}{}^2 - A_{n2}{}^2 + B_{n2}{}^2)^2 - 4A_{n1}{}^2B_{n1}{}^2 + 4A_{n2}{}^2B_{n2}{}^2 - \\ & - 4B_{n1}{}^2(A_{n1}{}^2 - B_{n1}{}^2 - A_{n2}{}^2 + B_{n2}{}^2)] \end{aligned}$$

---

[1] В [1] вкралась арифметическая ошибка: в знаменателе выражения P_4 цифра 2 лишняя. В соответствии с этим должно быть $Rk_4 = 2$. Кроме того, в D_{12} вместо E^6 должно быть E^2, в D_{23} вместо $(2-\sigma+\sigma^2)$ должно стоять $(2-\sigma-\sigma^2)$, а в D_{25} и D_{41} коэффициенты у последних членов, соответственно, в квадратных и фигурных скобках должны быть $1-\sigma$ и $-(1-\sigma)$ (см. [1], стр. 533, 535, 538—540).

$$R_{n2}^{(1)} = R_n A_{n1} - R_{n1} B_{n1} = \tfrac{1}{2} A_{n1}^{-1} \Lambda_n^{-1} (A_{n1}^2 + B_{n1}^2)(A_{n2}^2 + B_{n2}^2)^2 [(A_{n1}^2 - B_{n1}^2 - A_{n2}^2 + B_{n2}^2)^2 - 4A_{n1}^2 B_{n1}^2 + 4A_{n2}^2 B_{n2}^2 + 4A_{n1}^2 (A_{n1}^2 - B_{n1}^2 - A_{n2}^2 + B_{n2}^2)]$$

$$R_{n1}^{(2)} = R_{n2} A_{n2} + (1 - R_n) B_{n2} = \tfrac{1}{2} B_{n2}^{-1} \Lambda_n^{-1} (A_{n2}^2 + B_{n2}^2)(A_{n1}^2 + B_{n1}^2)^2 [(A_{n2}^2 - B_{n2}^2 - A_{n1}^2 + B_{n1}^2)^2 - 4A_{n2}^2 B_{n2}^2 + 4 A_{n1}^2 B_{n1}^2 - 4B_{n2}^2 (A_{n2}^2 - B_{n2}^2 - A_{n1}^2 + B_{n1}^2)]$$

$$R_{n2}^{(2)} = (1 - R_n) A_{n2} - R_{n2} B_{n2} = \tfrac{1}{2} A_{n2}^{-1} \Lambda_n^{-1} (A_{n2}^2 + B_{n2}^2)(A_{n1}^2 + B_{n1}^2)^2 [(A_{n2}^2 - B_{n2}^2 - A_{n1}^2 + B_{n1}^2)^2 - 4A_{n2}^2 B_{n2}^2 + 4A_{n1}^2 B_{n1}^2 + 4A_{n2}^2 (A_{n2}^2 - B_{n2}^2 - A_{n1}^2 + B_{n1}^2)]$$

Для достаточно малых $n > 1$, при которых в статье [1] на стр. 538 указаны приближенные значения A_{n1}, B_{n1}, A_{n2}, B_{n2}, R_{n1}, R_{n2}, R_n, имеем

$$R_{n1}^{(1)} \approx -\frac{n^3 (n^2-1)^2}{16\varkappa^7}\left(1 - \frac{5n^2}{2\varkappa^2} - \frac{21n^4}{4\varkappa^4} + 10\frac{n^6}{\varkappa^6}\right)$$

$$R_{n2}^{(1)} \approx -\frac{n^3 (n^2-1)^2}{16\varkappa^7}\left(1 + \frac{5n^2}{2\varkappa^2} - \frac{21n^4}{4\varkappa^4} - 10\frac{n^6}{\varkappa^6}\right)$$

$$R_{n1}^{(2)} \approx \frac{\sqrt{n^2-1}}{2\varkappa}\left(1 - \frac{n^2-1}{2\varkappa^2} - 3\frac{2n^2-1}{8\varkappa^4}\right)$$

$$R_{n2}^{(2)} \approx \frac{\sqrt{n^2-1}}{2\varkappa}\left(1 + \frac{n^2-1}{2\varkappa^2} - 3\frac{2n^2-1}{8\varkappa^4}\right)$$

Таким образом, для любой компоненты (с индексом $\nu = 1, \ldots, 5$) сосредоточенной нагрузки перемещения [1] $u^{(\nu)}$, $v^{(\nu)}$, $w^{(\nu)}$ и внутренние силовые факторы $T_1^{(\nu)}$, $T_2^{(\nu)}, \ldots, G_1^{(\nu)}$, $G_2^{(\nu)}$ могут быть получены в результате почленного воздействия некоторых известных операторов [2] $L_\nu^{(t)}$ на ряд $f_{\nu 0}^{00} + f_{\nu 1}^{00}\cos\varphi + f_{\nu 2}^{00}\cos 2\varphi + \ldots$, где функции $f_{\nu n}^{00}(\xi)$ определены формулами (1.1) — (1.4). Это справедливо, вообще говоря, при любых значениях φ и $\xi \neq 0$, по отношению же к тем перемещениям, которые определяются с помощью операторов $L_\nu^{(t)}$, не содержащих производных выше пятого порядка, при всех значениях ξ и φ без исключения [3].

Из равенства (4.9)* (доказанного при $k \leqslant 6$ для всех значений ξ) и последней оценки (4.3)* получаем, что при $k + m < 6$ и любых ξ и φ

$$\left|\frac{\partial^{k+m} f_{\nu n}^{00}(\xi)\cos n\varphi}{\partial\xi^k \partial\varphi^m}\right| = \left|\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to 0}} \frac{\partial^{k+m} f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi}{\partial\xi^k\partial\varphi^m}\right| \leqslant c_{\nu k}' n^{k+m-7} \leqslant c_{\nu k}' n^{-2}$$

---

[1] Верхний индекс ν у перемещений и силовых факторов показывает, что они получаются при нагрузке, состоящей из одной компоненты с индексом ν.

[2] Заметим, что $L_\nu^{(t)}$ либо являются операторами $(-1)^{\nu+\mu} D_{\nu\mu}$, с помощью которых определяются $u^{(\nu)}$, $v^{(\nu)}$, $w^{(\nu)}$ и $N_1^{(\nu)}$, $N_2^{(\nu)}$, либо операторами, которые получаются, если в формулы для T_1, T_2, S_1, S_2, H_1, H_2, G_1, G_2, (см. равенства (1.2)* и последнее уравнение (1.1)*) вставить вместо u, v, w соответствующие операторы $(-1)^{\nu+\mu} D_{\nu\mu}$.

[3] См. сказанное о равенствах (4.2)* и (4.21)* в статье [1] на стр. 559 и 562.

Следовательно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} \left(f_{\nu n}{}^{00}(\xi) \cos n\varphi\right) \qquad (k+m<6) \tag{1.5}$$

равномерно сходится относительно ξ и φ и при всех значениях этих переменных ограничен. Поэтому для тех указанных выше операторов $L_\nu^{(t)}$, которые содержат производные не выше пятого порядка, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_\nu^{(t)} \left(f_{\nu n}{}^{00}(\xi) \cos n\varphi\right) \tag{1.6}$$

является всюду непрерывной функцией переменных ξ и φ, ограниченной на множестве всех действительных значений этих переменных. Такого рода функциями, как это видно после сказанного выше из формул для операторов $D_{\nu\mu}$ (см. [1], § 2), является перемещение w для любой сосредоточенной нагрузки и перемещения u и v для сосредоточенной силы, нормальной к поверхности оболочки, т. е. перемещения $u^{(3)}$ и $v^{(3)}$. При вычислении этих перемещений как выражений вида (1.6) можно ограничиться сравнительно небольшим числом членов соответствующих рядов.

Мы выделили из искомых величин некоторые перемещения, не имеющие особенностей; остались перемещения u и v, соответствующие компонентам сосредоточенной нагрузки с индексами $\nu \neq 3$, и внутренние силовые факторы при любой сосредоточенной нагрузке. Каждая из этих величин определяется с помощью того или иного линейного дифференциального оператора не ниже шестого порядка и может иметь в точке приложения сосредоточенной нагрузки ($\xi = 0$, $\varphi = 0$) особенность, поскольку уже при $k + m = 6$ ряд (1.5) как функция переменных ξ и φ имеет в указанной точке особенность [см. равенство (1.18)].

Определение искомых величин, соответствующих той или иной компоненте сосредоточенной нагрузки, непосредственно в виде рядов (1.6) может потребовать вычисления многих членов этих рядов, если искомые величины имеют особенности в точке $\xi = 0$, $\varphi = 0$ и ищутся на недостаточно большом расстоянии от нее.

Покажем, как можно представить любую искомую величину с особенностью, кроме $N_1^{(\nu)}$ и $N_2^{(\nu)}(\nu \neq 3)$, в виде суммы из не имеющего особенностей функционального ряда (достаточно быстро сходящегося) и функции, выраженной в замкнутой форме.

Это позволит без большого труда находить искомые величины на любом расстоянии от точки $\xi = 0$, $\varphi = 0$ и установить для них асимптотические формулы (последнее удастся сделать и для $N_1^{(\nu)}$, $N_2^{(\nu)}$ при $\nu \neq 3$), из которых выяснится характер особенностей искомых величин.

Имеем

$$f_{\nu n}{}^{00}(\xi) = f_{\nu n1}{}^{00}(\xi) + f_{\nu n2}{}^{00}(\xi) \qquad (n > 1) \tag{1.7}$$

где

$$f_{\nu n1}{}^{00}(\xi) = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 0}} f_{\nu n1}(\xi), \qquad f_{\nu n2}{}^{00}(\xi) = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 0}} f_{\nu n2}(\xi)$$

Используя этот результат применительно к равенству (1.14), приходим к следующим формулам:

$$\psi_1(|\xi|, \varphi) = -\frac{1}{2}\ln(1 + e^{-2|\xi|} - 2e^{-|\xi|}\cos\varphi) \tag{1.15}$$

$$\psi_2(|\xi|, \varphi) = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\varphi}{e^{|\xi|} - \cos\varphi} \tag{1.16}$$

справедливым при любых значениях $|\xi|$ и φ, за исключением точки[1] $\xi = 0$, $\varphi = 0$. Функции ψ_1 и ψ_2 имеют в точке $\xi = 0, \varphi = 0$ особенности: первая обращается в бесконечность, вторая, оставаясь ограниченной, терпит разрыв[2].

Из равенств (1.8) и (1.13) при любых φ и $\xi \neq 0$ следует

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^6}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}(f_{\nu n}{}^{00}(\xi)\cos n\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^6}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}(f_{\nu n 1}{}^{00}(\xi)\cos n\varphi) + S_{km}{}^{00}(\xi, \varphi) \tag{1.17}$$

где

$$S_{km}{}^{00}(\xi, \varphi) = \frac{\partial^6}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}(f_{\nu 0}{}^{00}(\xi) + f_{\nu 1}{}^{00}(\xi)\cos\varphi) +$$

$$+ (-\operatorname{sgn})^k\frac{\pi}{96}\lambda_\nu\Big[-e^{-|\xi|}(|\xi|^3 + A_k\xi^2 + B_k|\xi| + C_k)\cos(\varphi + \tfrac{1}{2}m\pi) +$$

$$+ (-1)^{m+[{}^1/{}_2 m]}\left(-|\xi|^3\frac{\partial^3\psi}{\partial|\xi|^3} + A_k\xi^2\frac{\partial^2\psi}{\partial|\xi|^2} - B_k|\xi|\frac{\partial\psi}{\partial|\xi|} + C_k\psi\right)\Big] \tag{1.18}$$

а функция ψ есть либо ψ_1, либо ψ_2 в зависимости от того, четно или нет число m ($m = 0, 1, \ldots$). Ряд, стоящий в правой части равенства (1.17), является всюду непрерывной функцией переменных ξ и φ и останется таковой, если его продифференцировать[3] один раз почленно по ξ или по φ. Функция же $S_{km}{}^{00}(\xi, \varphi)$ с помощью формул (1.1), (1.2), (1.15) и (1.16) пишется в замкнутом виде.

Таким образом, мы представили ряд (1.5) при $k + m = 6$ в виде суммы двух частей, одна из которых является достаточно быстро сходящимся рядом и не имеет особенностей, а другая написана в замкнутой форме.

Поставив в равенстве (1.17) знак производной (по ξ или по φ) перед функцией $S_{km}{}^{00}$ и в рядах под знаком суммы (что может быть оправдано при помощи равенства (1.8), если принять во внимание законность почленного дифференцирования рядов из правой части формулы (1.13) при $\xi \neq 0$), мы представим ряд (1.5) при $k + m = 7$ и любых φ и $\xi \neq 0$ также в виде суммы указанного рода частей. То же самое можно сделать, как

---

[1] Хотя формулы (1.15) и (1.16) устанавливаются исходя из равенства (1.14), имеющего смысл при $\xi \neq 0$, тем не менее они справедливы при $\xi = 0$, $\varphi \neq 0$ ($|\varphi| < 2\pi$). В самом деле, в силу признака Абеля ряды, изображающие ψ_1 и ψ_2, сходятся равномерно по $|\xi|$ на множестве всех значений $|\xi|$, каково бы ни было $\varphi \neq 0$, если речь идет о ψ_1, и при любом φ, если имеется в виду ψ_2. Поэтому левые части формул (1.15) и (1.16) при $\varphi \neq 0$ являются всюду непрерывными функциями от $|\xi|$, как и правые части. Отсюда, очевидно, следует наше утверждение.

[2] Легко установить, что $\lim\limits_{\varphi\to 0}\psi_2(0, \varphi) = \pi/2$, в то время как $\lim\limits_{|\xi|\to 0}\psi_2(|\xi|, 0) = 0$.

[3] См. сказанное на стр. 163 относительно первого ряда из правой части равенства (1.8).

это теперь должно быть ясно, по отношению к ряду (1.6), если оператор $L_\nu^{(t)}$ шестого или седьмого порядка, т. е. представить в указанном виде все обладающие особенностью перемещения и внутренние силовые факторы, кроме величин $N_1^{(\nu)}$ и $N_2^{(\nu)}$ при $\nu \neq 3$. Эти величины, как видно из формулы для $D_{\nu 4}$ и $D_{\nu 5}$ (см. [1], § 2), определяются с помощью операторов восьмого порядка. Но если дважды продифференцировать (по ξ или по φ или один раз по ξ и один раз по φ) равенство (1.17), взяв производные от рядов под знаком суммы (что опять-таки может быть оправдано при всех φ и $\xi \neq 0$ с помощью равенства (1.8)), то в правой части (1.17) будет стоять ряд, про который нельзя уже будет утверждать, что он не имеет особенностей. Важно, однако, отметить, что этот ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^8}{\partial \xi^{k'} \partial \varphi^{m'}} \left(f_{\nu n 1}{}^{00}(\xi) \cos n\varphi\right) \tag{1.19}$$

будет вблизи точки $\xi = 0$, $\varphi = 0$ пренебрежимо мал по сравнению с второй производной функции $S_{km}{}^{00}(\xi, \varphi)$. Действительно, можно написать

$$\frac{\partial^8}{\partial \xi^{k'} \partial \varphi^{m'}} \left(f_{\nu n 1}{}^{00}(\xi) \cos n\varphi\right) = \frac{\lambda_\nu}{n} \cos\left(n\varphi + \tfrac{1}{2} m'\pi\right) \int_0^\infty \cos\left(n\xi\eta + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2} k'\pi\right) \frac{\eta^{k'} \Pi_n(\eta)}{\delta_n(\eta)(\eta^2+1)^4} d\eta = -\frac{\lambda_\nu}{\xi n^2} \cos\left(n\varphi + \tfrac{1}{2} m'\pi\right) \int_0^\infty \sin\left(n\xi\eta + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2} k'\pi\right) d\left(\frac{\eta^{k'} \Pi_n(\eta)}{\delta_n(\eta)(\eta^2+1)^4}\right) \qquad (\xi \neq 0,\ k' \geqslant 0,\ m \geqslant 0)$$

В этом равенстве последний интеграл ограничен[1] при всех ξ, $n \geqslant 2$ и $k' \leqslant 8$, поэтому ясно, что

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^8}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} \left(f_{\nu n 1}{}^{00}(\xi) \cos n\varphi\right) \right| < \frac{c_\nu}{|\xi|}$$

где c_ν — некоторая положительная константа[2]. Между тем любая вторая производная по ξ и φ от какой-либо из функций: ψ, $|\xi|\partial\psi/\partial|\xi|$, $\xi^2\partial^2\psi/\partial|\xi|^2$, $|\xi|^3\partial^3\psi/\partial|\xi|^3$ [см. (1.18)], если приближаться к точке $\xi = 0$, $\varphi = 0$ вдоль линий $\varphi/\xi = \text{const}$, есть, вообще говоря, бесконечно большая величина того же порядка, что и ξ^{-2} (это легко установить с помощью приводимой ниже формулы (1.20) и равенств $\partial\psi_1/\partial\varphi = \partial\psi_2/\partial|\xi|$, $\partial\psi_1/\partial|\xi| = -\partial\psi_2/\partial\varphi$). Отмеченное обстоятельство позволит установить в окрестности точки $\xi = 0$, $\varphi = 0$ асимптотические формулы для $N_1^{(\nu)}$ и $N_2^{(\nu)}$ ($\nu \neq 3$).

Заметим, что если бы мы исходили из упрощенных уравнений, используемых в [6], и, следовательно, имели бы для потенциальной функции

---

[1] Как это следует из вида функций $\delta_n(\eta)$ и $\Pi_n(\eta)$ (см. [1] § 2, 3).

[2] Если абсолютное значение указанного интеграла меньше M, то можно положить

$$c_\nu = \lambda_\nu M \sum_{n=2}^{\infty} n^{-2}.$$

уравнение, приведенное в статье [1] на стр. 544, то $\delta_n(\eta)$ определялось бы формулой

$$\delta_n(\eta) = \tilde{\delta}_n(\eta) = (\eta^2+1)^4 + 4\varkappa^4 n^{-4}\eta^4$$

Это привело бы к равенству

$$f_{\nu n1}{}^{00}(\xi) = -4\lambda_\nu \varkappa^4 n^{-11}\int\limits_0^\infty \cos n\xi\eta \frac{\eta^4\,d\eta}{\tilde{\delta}_n(\eta)(\eta^2+1)^4}$$

а тогда можно было бы утверждать, что ряд (1.19) есть всюду непрерывная функция ξ и φ, ограниченная на множестве всех действительных значений этих переменных.

Итак, некоторые перемещения, указанные на стр. 162, могут быть непосредственно вычислены как выражения вида (1.6) (или как сумма таких выражений, соответствующих всем значениям индекса ν), причем в рядах (1.6) можно ограничиваться сравнительно небольшим числом первых членов. Таким же образом могут быть вычислены все перемещения и внутренние силовые факторы, если они ищутся на достаточно большом расстоянии от точки приложения сосредоточенной нагрузки. В противном случае при определении той или иной искомой величины с особенностью целесообразно представить ее указанным выше образом [отправляясь от равенства (1.17)] в виде суммы двух функций: функционального ряда, не имеющего особенностей, если речь не идет о величинах $N_1^{(\nu)}$ и $N_2^{(\nu)}$ ($\nu \neq 3$), и функции, выраженной в замкнутой форме. Первая из этих функций может быть отброшена, если искомая величина неограниченно растет по мере приближения к точке приложения сосредоточенной нагрузки и исследуется в достаточной близости от указанной точки (поскольку первая функция ограничена или пренебрежимо мала по сравнению со второй вблизи точки $\xi=0$, $\varphi=0$). Кроме того, в этом случае могут быть отброшены ограниченные члены, входящие в состав второй из упомянутых функций. Таким путем для всех искомых величин, которые неограниченно растут по мере приближения к точке приложения сосредоточенной нагрузки, могут быть получены в окрестности указанной точки простые асимптотические формулы. Мы установим сейчас такого рода формулу для ряда (1.5) при $k+m=6$ и четном [1] $m=2\mu$.

Обратимся к равенствам (1.17) и (1.18). При четном m функция ψ равна ψ_1 и, следовательно, неограниченно растет по мере приближения к точке приложения сосредоточенной нагрузки, причем в окрестности этой точки имеет место асимптотическое равенство [2]

$$\psi_1 \simeq -\frac{1}{2}\ln(\xi^2+\varphi^2) \tag{1.20}$$

Между тем функции

$$|\xi|\frac{\partial\psi_1}{\partial|\xi|}, \qquad \xi^2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial|\xi|^2}, \qquad |\xi|^3\frac{\partial^3\psi_1}{\partial|\xi|^3} \tag{1.21}$$

[1] При нечетном m этот ряд будет ограниченной функцией ξ и φ, как видно из равенства (1.17), если принять во внимание, что в данном случае $\psi=\psi_2$.

[2] Оно получается из разложения $1+e^{-2|\xi|}-2e^{-|\xi|}\cos\varphi = \xi^2+\varphi^2-\ldots$.

ограничены в окрестности указанной точки, как это видно из устанавливаемых с помощью формулы (1.20) асимптотических равенств

$$|\xi| \frac{\partial \psi_1}{\partial |\xi|} \simeq -\xi^2 \rho^{-2}, \qquad \xi^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial |\xi|^2} \simeq \xi^2 (\xi^2 - \varphi^2) \rho^{-4}$$

$$|\xi|^3 \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial |\xi|^3} \simeq 2\xi^4 (3\varphi^2 - \xi^2) \rho^{-6} \qquad (\rho^2 = \xi^2 + \rho^2) \tag{1.22}$$

каждое из которых справедливо в окрестности точки $\xi = 0$, $\varphi = 0$, за исключением сколь угодно малых углов, содержащих те линии $\xi / \varphi = \mathrm{const}$, вдоль которых правая часть этого равенства исчезает. Ограничена также и шестая производная от $f_{\nu 0}^{00}(\xi) + f_{\nu 1}^{00}(\xi) \cos \varphi$, входящая в равенство (1.18) [это видно из формул (1.1) и (1.2)]. Кроме того, как уже указывалось, ограничен ряд из правой части равенства (1.17) (см. стр. 164). Поэтому, рассматривая достаточно малую окрестность точки приложения сосредоточенной нагрузки, т. е. точки $\xi = 0$, $\varphi = 0$, можно в равенстве (1.17) целиком отбросить стоящий в его правой части ряд, а из состава $S_{km}^{00}(\xi, \varphi)$ $(m = 2\mu,\ k = 6 - m$ — четное) отбросить все члены, кроме

$$(-1)^\mu \frac{\pi}{96} \lambda_\nu C_k \psi_1 (|\xi|, \varphi)$$

Если это сделать и воспользоваться значением C_k [см. формулы (4.20)*] и формулой (1.20), то получим следующее асимптотическое равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^6}{\partial \xi^k \, \partial \varphi^{2\mu}} (f_{\nu n}^{00}(\xi) \cos n\varphi) \simeq -(-1)^\mu \frac{\pi}{96} \lambda_\nu (k-1) [k(8-k) - 15] \ln \rho \tag{1.23}$$

справедливое в окрестности точки $\xi = 0$, $\varphi = 0$.

Установим теперь асимптотическую формулу для ряда (1.5) при $k + m = 7, 8$; на основании равенств (1.8) и (1.17) можно написать

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \, \partial \varphi^m} (f_{\nu n}^{00}(\xi) \cos n\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+m-6}}{\partial \xi^{k'} \, \partial \varphi^{m'}} \left[\frac{\partial^6}{\partial \xi^{k''} \, \partial \varphi^{2\mu}} (f_{\nu n}^{00}(\xi) \cos n\varphi) \right] =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \, \partial \varphi^m} (f_{\nu n 1}^{00}(\xi) \cos n\varphi) + \frac{\partial^{k+m-6}}{\partial \xi^{k'} \, \partial \varphi^{m'}} S_{k'' 2\mu}^{00}(\xi, \varphi) \tag{1.24}$$

$$(k + m = k' + m' + 6 = 7{,}8;\ k',\ m',\ k'' = k - k',\ 2\mu = m - m' \geqslant 0)$$

Переходя от этого равенства к асимптотическому, можно отбросить ряд справа, о чем указывалось выше, а из состава $S_{k''2\mu}^{00}$ оставить член

$$(-1)^\mu \frac{\pi}{96} \lambda_\nu \left(-|\xi|^3 \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial |\xi|^3} + A_{k''} \xi^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial |\xi|^2} - B_{k''} |\xi| \frac{\partial \psi_1}{\partial |\xi|} + C_{k''} \psi_1 \right) \tag{1.25}$$

Отбрасывать из состава $S_{k'' 2\mu}^{00}$ функции (1.21), как это было сделано при выводе формулы (1.23), теперь нельзя, так как производные от этих функций при приближении к точке $\xi = 0$, $\varphi = 0$ по линиям $\varphi / \xi = \mathrm{const}$ являются, вообще говоря, бесконечно большими величинами такого же порядка, как и соответствующая производная от ψ_1 [что легко установить с помощью формул (1.20) и (1.22)].

Заменяя в равенстве (1.24) функцию $S_{k''2\mu}^{00}$ выражением (1.25) и вставляя в последнее вместо ψ_1 и функций (1.21) их значения из формул (1.20) и (1.22), а вместо величин $A_{k''}$, $B_{k''}$ и $C_{k''}$ их значения из формул (4.20)*, приходим к нужной нам асимптотической формуле:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \, \partial \varphi^m} (f_{\nu n}{}^{00}(\xi) \cos n\varphi) \simeq (-1)^{\mu} \frac{\pi}{96} \lambda_{\nu} \frac{\partial^{k+m-6}}{\partial \xi^{k'} \, \partial \varphi^{m'}} \{2\xi^4 (\xi^2 - 3\varphi^2) \rho^{-6} +$$
$$+ 3(2 - k'') \xi^2 (\xi^2 - \varphi^2) \rho^{-4} + 3 [5(1 - k'') + k''^2] \xi^2 \rho^{-2} -$$
$$- (k'' - 1) [k'' (8 - k'') - 15] \ln \rho\} \qquad (1.26)$$
$$(k + m = k' + m' + 6 = 7, 8; \; k', m', k'' = k - k', 2\mu = m - m' \geqslant 0)$$

Ясно, что в окрестности точки приложения сосредоточенной нагрузки с помощью формул (1.23) и (1.26) могут быть без труда написаны асимптотические равенства для тех перемещений и внутренних силовых факторов, которые неограниченно возрастают по мере приближения к указанной точке (поскольку они являются выражениями вида (1.6), где операторы $L_{\nu}^{(l)}$ не ниже шестого порядка) [1]. Мы выпишем для всех этих величин асимптотические равенства [2], объединив их в группы в зависимости от вида входящих в них выражений.

Первая группа асимптотических формул:

$$Q_1{}^{-1} u^{(1)} \simeq Q_2{}^{-1} v^{(2)} \simeq -(1 + \sigma)(3 - \sigma)(8\pi Eh)^{-1} \ln \rho \qquad (\rho^2 = \xi^2 + \varphi^2)$$

$$2(1 - 2\sigma)^{-1} RT_1{}^{(3)} \simeq -\tfrac{2}{3} RT_2{}^{(3)} \simeq -(1 + \sigma)^{-1} G_1{}^{(3)} \simeq -(1 + \sigma)^{-1} G_2{}^{(3)} \simeq$$
$$\simeq (4\pi)^{-1} Q_3 \ln \rho$$

$$-\tfrac{1}{3} Q_4{}^{-1} v^{(4)} \simeq Q_5{}^{-1} u^{(5)} \simeq (1 + \sigma)(16\pi Eh R)^{-1} \ln \rho$$

Вторая группа асимптотических формул:

$$4\pi RT_1{}^{(1)} \simeq \quad Q_1 \xi \rho^{-2} [2(1 + \sigma) \varphi^2 \rho^{-2} - 3 - \sigma]$$
$$4\pi RT_2{}^{(1)} \simeq -Q_1 \xi \rho^{-2} [2(1 + \sigma) \varphi^2 \rho^{-2} - 1 + \sigma]$$

$$96\pi R^2 G_1{}^{(1)} \simeq -(1 + \sigma) h^2 Q_1 \xi \rho^{-2} [16(1 - \sigma) \varphi^6 \rho^{-6} +$$
$$+ 8(1 + 3\sigma) \varphi^4 \rho^{-4} - 2(5 + 3\sigma) \varphi^2 \rho^2 - 3 - \sigma]$$

$$96\pi R^2 G_2{}^{(1)} \simeq (1 - \sigma^2) h^2 Q_1 \xi \rho^{-2} (16\varphi^6 \rho^{-6} - 8\varphi^4 \rho^{-4} - 2\varphi^2 \rho^{-2} - 1)$$

$$S_1{}^{(2)} \simeq -S_2{}^{(2)} \simeq -(4\pi R)^{-1} Q_2 \xi \rho^{-2} [2(1 + \sigma) \varphi^2 \rho^{-2} + 1 - \sigma]$$

---

[1] Так как равенства (4.2)* и (4.21)* при $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ и $6 \leqslant k + m \leqslant 8$, а также (1.17) были установлены в предположении, что $\xi \neq 0$, то, говоря об асимптотических формулах для искомых величин в окрестности точки $\xi = 0$, $\varphi = 0$, мы должны исключить из этой окрестности точки, принадлежащие линии $\xi = 0$.

[2] Асимптотические равенства для перемещений и внутренних силовых факторов, приводимые сейчас и затем в § 2, 3, 4, были даны (часть из них в менее простом виде) без доказательства в [7, 8]. Следует указать, что в некоторых асимптотических формулах, приведенных в статьях [7, 8], имеются ошибки, которые здесь исправлены.

$$H_1^{(2)} = -H_2^{(2)} \simeq -(96\pi R^2)^{-1} h^2 Q_2 \xi\rho^{-2} [16(1-\sigma^2)\varphi^6\rho^{-6} + 8(3-2\sigma+3\sigma^2)\varphi^4\rho^{-4} + 2(7+4\sigma-3\sigma^2)\varphi^2\rho^{-2} + 11 + 2\sigma - \sigma^2]$$

$$2\pi R N_1^{(3)} \simeq -Q_3\xi\rho^{-2}$$

$$8\pi R^2 S_1^{(4)} \simeq -Q_4\xi\rho^{-2}[8\varphi^4\rho^{-4} - 4(1-\sigma)\varphi^2\rho^{-2} + 3 - 2\sigma]$$

$$8\pi R^2 S_2^{(4)} \simeq Q_4\xi\rho^{-2}(8\varphi^4\rho^{-4} + 1)$$

$$H_1^{(4)} = -H_2^{(4)} \simeq (1-\sigma)(4\pi R)^{-1} Q_4\xi\rho^{-2}(2\varphi^2\rho^{-2} - 1)$$

$$8\pi R^2 T_1^{(5)} \simeq -Q_5\xi\rho^{-2}[8\varphi^4\rho^{-4} - 4(1+\sigma)\varphi^2\rho^{-2} - 1 + 2\sigma]$$

$$8\pi R^2 T_2^{(5)} \simeq Q_5\xi\rho^{-2}(8\varphi^4\rho^{-4} - 3)$$

$$4\pi R G_1^{(5)} \simeq -Q_5\xi\rho^{-2}[2(1-\sigma)\varphi^2\rho^{-2} + 1 + \sigma]$$

$$4\pi R G_2^{(5)} \simeq Q_5\xi\rho^{-2}[2(1-\sigma)\varphi^2\rho^{-2} - 1 - \sigma]$$

Третья группа асимптотических формул:

$$S_1^{(1)} \simeq -S_2^{(1)} \simeq -(4\pi R)^{-1} Q_1\varphi\rho^{-2}[2(1+\sigma)\xi^2\rho^{-2} + 1 - \sigma]$$

$$H_1^{(1)} = -H_2^{(1)} \simeq -(96\pi R^2)^{-1}(1+\sigma) h^2 Q_1\varphi\rho^{-2}[16(1-\sigma)\xi^6\rho^{-6} - 8(5-3\sigma)\xi^4\rho^{-4} + 6(5-\sigma)\xi^2\rho^{-2} - 5 - \sigma]$$

$$4\pi R T_1^{(2)} \simeq -Q_2\varphi\rho^{-2}[2(1+\sigma)\xi^2\rho^{-2} - 1 + \sigma]$$

$$4\pi R T_2^{(2)} \simeq Q_2\varphi\rho^{-2}[2(1+\sigma)\xi^2\rho^{-2} - 3 - \sigma]$$

$$96\pi R^2 G_1^{(2)} \simeq h^2 Q_2\varphi\rho^{-2}[16(1-\sigma^2)\xi^6\rho^{-6} - 8(9-\sigma^2)\xi^4\rho^{-4} + 2(47+\sigma^2)\xi^2\rho^{-2} - 25 + \sigma^2]$$

$$96\pi R^2 G_2^{(2)} \simeq -(1-\sigma) h^2 Q_2\varphi\rho^{-2}[16(1+\sigma)\xi^6\rho^{-6} - 8(7+3\sigma)\xi^4\rho^{-4} + 6(9+\sigma)\xi^2\rho^{-2} - 11 + \sigma]$$

$$2\pi R N_2^{(3)} \simeq -Q_3\varphi\rho^{-2}$$

$$8\pi R^2 T_1^{(4)} \simeq Q_4\varphi\rho^{-2}(8\xi^4\rho^{-4} - 8\xi^2\rho^{-2} + 1)$$

$$8\pi R^2 T_2^{(4)} \simeq -Q_4\varphi\rho^{-2}[8\xi^4\rho^{-4} - 4(3+\sigma)\xi^2\rho^{-2} + 3 + 2\sigma]$$

$$4\pi R G_1^{(4)} \simeq -Q_4\varphi\rho^{-2}[2(1-\sigma)\xi^2\rho^{-2} - 1 - \sigma]$$

$$4\pi R G_2^{(4)} \simeq Q_4\varphi\rho^{-2}[2(1-\sigma)\xi^2\rho^{-2} + 1 + \sigma]$$

$$8\pi R^2 S_1^{(5)} \simeq -Q_5\varphi\rho^{-2}(8\xi^4\rho^{-4} - 8\xi^2\rho^{-2} + 1)$$

$$8\pi R^2 S_2^{(5)} \simeq Q_5\varphi\rho^{-2}(8\xi^4\rho^{-4} - 4(3-\sigma)\xi^2\rho^{-2} + 3 - 2\sigma)$$

$$H_1^{(5)} = -H_2^{(5)} \simeq -(4\pi R)^{-1}(1-\sigma) Q_5\varphi\rho^{-2}(2\xi^2\rho^{-2} - 1)$$

Четвертая группа асимптотических формул:

$$24\pi R^3 N_1^{(1)} \simeq -(1+\sigma) h^2 Q_1\rho^{-2}(24\varphi^6\rho^{-6} - 28\varphi^4\rho^{-4} + 4\varphi^2\rho^{-2} + 1)$$

$$48\pi R^3 N_2^{(2)} \simeq h^2 Q_2\rho^{-2}[48(1+\sigma)\varphi^6\rho^{-6} + 8(1-8\sigma)\varphi^4\rho^{-4} - 2(11-8\sigma)\varphi^2\rho^{-2} - 7 + \sigma]$$

$$Q_4^{-1} N_2^{(4)} \simeq Q_5^{-1} N_1^{(5)} \simeq -(2\pi R^2)^{-1}\rho^{-2}(2\varphi^2\rho^{-2} - 1)$$

Пятая группа асимптотических формул:

$$24\pi R^3 N_2^{(1)} \simeq (1+\sigma)\, h^2 Q_1 \xi\varphi\rho^{-4} (24\xi^4\rho^{-4} - 40\xi^2\rho^{-2} + 15)$$

$$24\pi R^3 N_1^{(2)} \simeq h^2 Q_2 \xi\varphi\rho^{-4} [24(1+\sigma)\xi^4\rho^{-4} - 8(7+3\sigma)\xi^2\rho^{-2} + 3(9+\sigma)]$$

$$-Q_4^{-1} N_1^{(4)} \simeq Q_5^{-1} N_2^{(5)} \simeq (\pi R^2)^{-1} \xi\varphi\rho^{-4}$$

Любая из приведенных асимптотических формул справедлива в окрестности точки $\xi = 0$, $\varphi = 0$, за исключением может быть линии $\xi = 0$ (см. сноску на стр. 169) и сколь угодно малых фиксированных углов, содержащих особые по отношению к данной формуле линии $\varphi / \xi = \text{const}$ (среди них может быть и линия $\xi = 0$), вдоль которых правая часть данной формулы исчезает[1]. Очевидно, что по отношению к первой группе асимптотических формул не существует особых линий.

На основании приведенных асимптотических формул можно утверждать, что при приближении к точке $\xi = 0$, $\varphi = 0$ вдоль линии $\varphi / \xi = \text{const}$, отличной от линии $\xi = 0$, величины $u^{(1)}$, $v^{(2)}$, $T_1^{(3)}$, $T_2^{(3)}$, $G_1^{(3)}$, $G_2^{(3)}$, $v^{(4)}$ и $u^{(5)}$ ведут себя, как $\ln \rho$, любая из величин $T_1^{(\nu)}$, $T_2^{(\nu)}$, $S_1^{(\nu)}$, $S_2^{(\nu)}$, $H_1^{(\nu)}$, $H_2^{(\nu)}$, $G_1^{(\nu)}$, $G_2^{(\nu)}$ $(\nu \neq 3)$ и $N_1^{(3)}$, $N_2^{(3)}$, если линия $\varphi / \xi = \text{const}$ не является для нее особой, ведет себя, как $1 / r$, а любая из величин $N_1^{(\nu)}$ и $N_2^{(\nu)}$ $(\nu \neq 3)$, опять-таки при условии, что линия $\varphi / \xi = \text{const}$ не является для нее особой, ведет себя, как $1 / r^2$.

Нетрудно понять, что силовые факторы из второй и третьей групп асимптотических формул остаются ограниченными вдоль своих особых линий (отличных от $\xi = 0$), а силовые факторы из четвертой и пятой групп асимптотических формул не могут расти вдоль своих особых линий (отличных от $\xi = 0$) быстрее, чем $1 / r$.

Необходимо отметить следующее: так как решение однородной системы исходных уравнений (которое в сумме с рассматриваемым частным решением удовлетворяет граничным условиям) должно быть ограниченным в окрестности точки приложения сосредоточенной нагрузки[2], то *приведенные асимптотические равенства определяют вблизи указанной точки перемещения и внутренние силовые факторы, соответствующие не только рассмотренному частному решению задачи о действии сосредоточенной силы на цилиндрическую оболочку, но и полному решению*[3] *этой задачи.*

Относительно некоторых из приведенных выше асимптотических формул мы сделаем еще несколько замечаний. Прежде всего укажем, что асимптотическая формула для перемещения $u^{(1)}$ $(v^{(2)})$ и асимптотические формулы для усилий $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, $S_1^{(1)} \simeq -S_2^{(1)}$ $(T_1^{(2)}$, $T_2^{(2)}$, $S_1^{(2)} \simeq -S_2^{(2)})$

---

[1] Например, особыми линиями по отношению к формуле для $H_1^{(4)}$ и $H_2^{(4)}$ являются линии $\xi = 0$ и $\varphi = \pm\xi$. Эта формула справедлива в окрестности точки $\xi = 0$, $\varphi = 0$, за исключением трех пар сколь угодно малых углов со сторонами $\xi / \varphi = \pm\varepsilon$, $\varphi / \xi = 1 \pm \varepsilon$ и $\varphi / \xi = -1 \pm \varepsilon$.

[2] За исключением того искусственного случая, когда точка приложения сосредоточенной нагрузки (точка $\xi = 0$, $\varphi = 0$) попадает на контур граничного сечения оболочки.

[3] См. [1], стр. 555.

совпадают соответственно с асимптотической формулой для компоненты перемещения по оси $X\,(Y)$ и с формулами для усилий $2hX_x$, $2hY_y$, $2hX_y$, которые имеют место согласно известному решению Лява в тонкой пластине толщиной $2h$, если в направлении оси $X\,(Y)$ действует сила $Q_1\,(Q_2)$, распределенная на отрезке $(-h,\,h)$ оси $Z\,(X,\,Y,\,Z$ — прямоугольная система координат на средней поверхности пластины с осью Z, нормальной к этой поверхности)[1].

Далее отметим, что для цилиндрической оболочки моменты $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$, $H_1^{(1)}$, $H_2^{(1)}$ $(G_1^{(2)},\ G_2^{(2)},\ H_1^{(2)},\ H_2^{(2)})$ являются по мере приближения к точке приложения сосредоточенной силы $Q_1\,(Q_2)$ бесконечно большими величинами того же порядка, что и $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, $S_1^{(1)} \simeq -S_2^{(1)}$ $(T_1^{(2)},\ T_2^{(2)},$ $S_1^{(2)} \simeq -S_2^{(2)})$, а эти последние являются бесконечно большими величинами менее высокого порядка, чем $N_1^{(1)}$, $N_2^{(1)}$ $(N_1^{(2)},\ N_2^{(2)})$, как это видно из соответствующих асимптотических формул. Однако в любой сколь угодно близкой к началу координат, но фиксированной точке $x = R\xi$, $y = R\varphi$ моменты $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$, $H_1^{(1)}$, $H_2^{(1)}$ $(G_1^{(2)},\ G_2^{(2)},\ H_1^{(2)},\ H_2^{(2)})$ и усилия $N_1^{(1)}$, $N_2^{(1)}$ $(N_1^{(2)},\ N_2^{(2)})$, вычисленные по асимптотическим формулам, будут стремиться к нулю с ростом R, в то время как усилия $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, $S_1^{(1)} \simeq -S_2^{(1)}$ $(T_1^{(2)},\ T_2^{(2)},\ S_1^{(2)} \simeq -S_2^{(2)})$, найденные по асимптотическим формулам, останутся без изменений.

Обращаясь к асимптотическим формулам для $G_1^{(3)} \simeq G_2^{(3)}$, $N_1^{(3)}$ и $N_2^{(3)}$, заметим, что они совпадают соответственно с асимптотическими формулами для $G \simeq G_1 \simeq G_2$, N_1 и N_2, которые имеют место по отношению к тонкой круглой пластине с радиусом R, изгибаемой сосредоточенной силой Q_3, приложенной в центре пластины. Остановим внимание на том обстоятельстве, что хотя усилия $T_1^{(3)}$ и $T_2^{(3)}$ имеют ту же особенность, что и моменты $G_1^{(3)}$, $G_2^{(3)}$, тем не менее в любой сколь угодно близкой к началу координат, но фиксированной точке $x = R\xi$, $y = R\varphi$ напряжения от вычисленных по асимптотическим формулам усилий $T_1^{(3)}$, $T_2^{(3)}$, благодаря присутствию в левых частях этих формул множителя R, будут как угодно малыми по сравнению с напряжениями от найденных по асимптотическим формулам моментов $G_1^{(3)}$, $G_2^{(3)}$, если только радиус R достаточно велик.

Наконец, поясним, почему $S_1^{(\nu)} \simeq -S_2^{(\nu)}$ при $\nu = 1, 2$ а при $\nu = 4, 5$ это соотношение не имеет место. Из шестого уравнения равновесия (1.1)* и третьего и шестого равенств (1.2)* имеем

$$S_1^{(\nu)} = \frac{Eh}{(1+\sigma)R}\left[\frac{\partial u^{(\nu)}}{\partial\varphi} + \left(1 + \frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial v^{(\nu)}}{\partial\xi} + \frac{h^2}{3R^2}\,\frac{\partial^2 w^{(\nu)}}{\partial\xi\,\partial\varphi}\right]$$

$$-S_2^{(\nu)} = \frac{Eh}{(1+\sigma)R}\left[\frac{\partial u^{(\nu)}}{\partial\varphi} + \left(1 - \frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial v^{(\nu)}}{\partial\xi} - \frac{h^2}{3R^2}\,\frac{\partial^2 w^{(\nu)}}{\partial\xi\,\partial\varphi}\right]$$

При переходе от этих формул к асимптотическим перемещения $u^{(\nu)}$, $v^{(\nu)}$, $w^{(\nu)}$ определяются соответственно с помощью операторов $D_{\nu1}$, $D_{\nu2}$,

---

[1] См. [9], стр. 220, первую формулу (27) и формулы (29). В этих формулах следует положить $A = -Q_1/4\pi h$ $(A = -Q_2/4\pi h)$ и заменить λ на $\lambda' = 2\lambda\mu/(\lambda+2\mu)$, разумея под u, v, X_x, Y_y, X_y средние значения перемещений и напряжений (поскольку имеется в виду обобщенное плоское напряженное состояние).

$D_{\nu 3}$, в которых следует сохранить только старшие производные. Как видно из приведенных в [1] (см. стр. 538—41) равенств для операторов $D_{\nu 1}$, $D_{\nu 2}$, $D_{\nu 3}$, коэффициенты при их старших производных являются сравнимыми между собой величинами, когда $\nu = 1, 2$, а в случае $\nu = 4, 5$ коэффициенты при старших производных у оператора $D_{\nu 3}$ в противоположность операторам $D_{\nu 1}$ и $D_{\nu 2}$ содержат большую (по сравнению с единицей) величину R^2 / h^2. Из сказанного нетрудно понять, что при $\nu = 4, 5$ в указанных выше формулах для $S_1^{(\nu)}$ и $S_2^{(\nu)}$ последний член в квадратных скобках играет существенную роль, и потому $S_1^{(\nu)}$ не будет асимптотически равно $-S_2^{(\nu)}$ при $\nu = 4, 5$, между тем как при $\nu = 1, 2$ будем иметь $S_1^{(\nu)} \simeq -S_2^{(\nu)}$ (если пренебречь по сравнению с единицей малой величиной $h^2 / 3R^2$).

В заключение настоящего параграфа отметим, что изложенный и развиваемый далее метод получения асимптотических формул для неограниченных искомых величин может быть непосредственно использован при любом из указанных в [1] (см. введение) вариантов теории оболочек. Это связано с тем, что для любого из этих вариантов оператор D в уравнении (2.2)* имеет вид: $D = \Delta\Delta\Delta\Delta + D'$, где D' — оператор не выше шестого порядка. Поэтому при замене принятого нами варианта иным можно для новых функций $f_{\nu n}^{00}(\xi)$ $(n > 1)$ воспользоваться тем же представлением (1.7), не изменив функций $f_{\nu n 2}^{00}(\xi)$ (они соответствуют оператору $\Delta\Delta\Delta\Delta$, входящему в состав D) и не ухудшив при этом сходимости первого ряда из правой части равенства (1.8) при новых $f_{\nu n 1}^{00}(\xi)$. В результате асимптотические равенства (1.23) и (1.26) при переходе к иному варианту остаются без изменений и могут быть использованы так, как это было сделано выше (то же самое можно сказать об асимптотических равенствах (2.11), (2.17), (2.18), (3.13), (3.14), (3.16), (4.7), устанавливаемых в § 2—4), придется только рассматривать, вообще говоря, иные операторы $L_\nu^{(l)}$.

§ 2. Случай нагрузки, равномерно распределенной вдоль отрезка направляющего круга. Если составляющие нагрузки равномерно распределены вдоль отрезка направляющего круга длиной $2\beta R$, то, как это следует из равенства (4.22)*, перемещения и внутренние силовые факторы, соответствующие рассматриваемому частному решению, определяются опять-таки теми же самыми выражениями вида (4.1)*, как и при элементарн[...] [на]грузке, но с заменой $f_{\nu n}(\xi)$ функциями $f_{\nu n}^{0\beta}(\xi)$ (см. [1], стр. 562). [...] из формулы (2.13)* или из формул (2.18)*, (2.19)*:

$$\ldots^{0}(\xi), \qquad f_{\nu n}^{0\beta}(\xi) = \frac{\sin n\beta}{n\beta} f_{\nu n}^{00}(\xi) \qquad (n \geqslant 1)$$

$$\ldots = \frac{k_\nu Q_\nu E h}{8\pi (1-\sigma)(1-\sigma^2)^2 R^2} f(\xi) \qquad (2.1)$$

$$\ldots(\xi) \qquad (n > 1) \qquad (2.2)$$

Таким образом, для каждой компоненты рассматриваемой сейчас нагрузки перемещения и внутренние силовые факторы могут быть получены в результате почленного воздействия указанных выше операторов $L_\nu^{(t)}$ на ряды $f_{\nu 0}{}^{0\beta} + f_{\nu 1}{}^{0\beta} \cos \varphi + f_{\nu 2}{}^{0\beta} \cos 2\varphi + \cdots$, члены которых определяются из формул (2.1), (2.2).

По отношению к тем искомым величинам, которые определяются при помощи операторов $L_\nu^{(t)}$ ниже седьмого порядка, сказанное справедливо при любых значениях ξ и φ, а по отношению к остальным искомым величинам [1] — при всех φ и $\xi \neq 0$. Мы, разумеется, считаем $\beta < \pi$. Для нагрузки, распределенной по всей направляющей окружности (т. е. когда $\beta = \pi$), имеем согласно (2.1) и (2.2) $f_{\nu n}{}^{0\beta} = 0$ при $n \geqslant 1$ и наше решение принимает замкнутую форму.

Из равенства (4.9)* (справедливого при любом ξ, если $k \leqslant 6$) и второй оценки (4.3)* получаем, что при $k + m < 7$ и любых ξ и φ

$$\left| \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} \left(f_{\nu n}{}^{0\beta}(\xi) \cos n\varphi \right) \right| = \left| \lim_{\alpha \to 0} \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} \left(f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{\nu k}'' \beta^{-1} n^{k+m-8} \leqslant c_{\nu k}'' \beta^{-1} n^{-2}$$

Следовательно, если оператор $L_\nu^{(t)}$ ниже седьмого порядка, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_\nu^{(t)} \left(f_{\nu n}{}^{0\beta}(\xi) \cos n\varphi \right) \tag{2.3}$$

сходится равномерно относительно ξ и φ и является всюду непрерывной функцией этих переменных, ограниченной на множестве всех действительных значений ξ и φ. Такого рода функциями являются перемещения u, v, w при любой нагрузке, равномерно распределенной по отрезку направляющего круга, а также внутренние силовые факторы (все, кроме N_1 и N_2), соответствующие компоненте с индексом $\nu = 3$ рассматриваемой сейчас нагрузки, т. е. величины $T_1^{(3)}$, $T_2^{(3)}$, $S_1^{(3)}$, $S_2^{(3)}$, $H_1^{(3)}$, $H_2^{(3)}$, $G_1^{(3)}$, $G_2^{(3)}$.

Перемещения и только что указанные силовые факторы могут быть вычислены, как выражения (2.3) (или как суммы таких выражений), в любой точке (ξ, φ); при этом в рядах (2.3) можно ограничиваться сравнительно небольшим числом членов. Остальные искомые величины выражаются при помощи операторов $L_\nu^{(t)}$ не ниже седьмого порядка и имеют особенности. Определение этих величин, как выражений (2.3), при недостаточно большом $|\xi|$ может потребовать вычисления большого числа членов соответствующих рядов. В этом случае можно использовать представление искомой величины в виде суммы из не имеющего особенностей функционального ряда (достаточно быстро сходящегося) и функции, выраженной в замкнутой форме. Такое представление осуществимо аналогичным образом, как это было сделано в § 1.

---

[1] Это следует из установленного в статье [1] на стр. 559 результата рый, как указывалось в этой статье на стр. 562, справедлив равенству (4.21)*.

... можно написать

$$\ldots) + f_{\nu n2}^{0\beta}(\xi) \qquad (n > 1) \tag{2.4}$$

$$\ldots, \qquad f_{\nu n2}^{0\beta}(\xi) = \lim_{\alpha \to 0} f_{\nu n2}(\xi)$$

$$\ldots f_{\nu n1}^{00}(\xi), \qquad f_{\nu n2}^{0\beta}(\xi) = \frac{\sin n\beta}{n\beta} f_{\nu n2}^{00}(\xi) \tag{2.5}$$

При $k + m \leqslant 8$ и любых φ и $\xi \neq 0$ имеем [1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} (f_{\nu n}^{0\beta}(\xi) \cos n\varphi) = \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} (f_{\nu 0}^{0\beta}(\xi) + f_{\nu 1}^{0\beta}(\xi) \cos \varphi) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} (f_{\nu n1}^{0\beta}(\xi) \cos n\varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} (f_{\nu n2}^{0\beta}(\xi) \cos n\varphi) \tag{2.6}$$

Из первой формулы (2.5) и оценки (1.9) следует

$$\left| \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} (f_{\nu n1}^{0\beta}(\xi) \cos n\varphi) \right| < n^{k+m-10} \beta^{-1} C_{\nu k}$$

Поэтому первый ряд в правой части равенства (2.6) при $k + m \leqslant 8$ достаточно быстро сходится и есть всюду непрерывная функция ξ и φ, ограниченная на множестве всех действительных значений указанных переменных. Из второго равенства (2.5) и равенства (1.12) ясно, что при любых φ и $\xi \neq 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^7}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} (f_{\nu n2}^{0\beta}(\xi) \cos n\varphi) = (-\operatorname{sgn} \xi)^k \frac{\pi \lambda_\nu}{96\,\beta} \Big\{ -e^{-|\xi|} (|\xi|^3 +$$

$$+ A_k \xi^2 + B_k |\xi| + C_k) \sin \beta \cos (\varphi + \tfrac{1}{2} m\pi) + \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n|\xi|} \Big(n^2 |\xi|^3 +$$

$$+ n A_k \xi^2 + B_k |\xi| + \frac{1}{n} C_k \Big) \Big[\cos [n\zeta + \tfrac{1}{2}(m-1)\pi] \Big]_{\zeta = \varphi - \beta}^{\zeta = \varphi + \beta} \Big\} \tag{2.7}$$

Из равенств (2.6) и (2.7), используя функции ψ_1, ψ_2 подобно тому, как это было сделано при выводе равенства (1.17), получаем, что при любых φ и $\xi \neq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^7}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} (f_{\nu n}^{0\beta}(\xi) \cos n\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^7}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} (f_{\nu n1}^{0\beta}(\xi) \cos n\varphi) + S_{km}^{0\beta}(\xi, \varphi) \tag{2.8}$$

---

[1] Убедиться в том, что входящие в равенство (2.6) ряды имеют смысл, можно при помощи формул (4.21)*, (4.19)* и (2.4) подобно тому, как было оправдано равенство (1.8) (см. стр. 163).

где

$$S_{km}{}^{0\beta}(\xi,\varphi)=\frac{\partial^7}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}\left(f_{\nu0}{}^{0\beta}(\xi)+f_{\nu1}{}^{0\beta}(\xi)\cos\varphi\right)-(-\operatorname{sgn}\xi)^k\frac{\pi\lambda_\nu}{96\,\beta}\Big\{\ldots$$

$$+A_k\xi^2+B_k|\xi|+C_k)\sin\beta\cos\left(\varphi+\frac{1}{2}m\pi\right)+$$

$$+\frac{1}{2}(-1)^{m+[{}^1/_2(m+1)]}\left[|\xi|^3\frac{\partial^3\psi(|\xi|,\zeta)}{\partial|\xi|^3}-A_k\xi^2\frac{\partial^2\psi(|\xi|,\zeta)}{\partial|\xi|^2}+\right.$$

$$\left.+B_k|\xi|\frac{\partial\psi(|\xi|,\zeta)}{\partial|\xi|}-C_k\psi(|\xi|,\zeta)\right]_{\zeta=\varphi-\beta}^{\zeta=\varphi+\beta}\Bigg\} \tag{2.9}$$

а функция $\psi=\psi_1$ при нечетном m и $\psi=\psi_2$ при четном m $(m=0,1,2,\ldots)$.

Таким образом, мы представили ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}\left(f_{\nu n}{}^{0\beta}(\xi)\cos n\varphi\right) \tag{2.10}$$

при $k+m=7$ в виде суммы из не имеющего особенностей функционального ряда (достаточно быстро сходящегося) и функции, выраженной в замкнутой форме.

Поставив в равенстве (2.8) знак производной (по ξ или по φ) перед функцией $S_{km}{}^{0\beta}$ и в рядах под знаком суммы (что может быть оправдано с помощью равенства (2.6), если принять во внимание законность почленного дифференцирования ряда из правой части формулы (2.7) при $\xi\neq0$), мы представим ряд (2.10) при $k+m=8$ также в виде суммы указанного рода частей. В таком же виде могут быть написаны и ряды (2.3), когда операторы $L_\nu^{(t)}$ седьмого или восьмого порядка.

Итак, если нагрузка равномерно распределена вдоль отрезка направляющего круга, то все перемещения и некоторые силовые факторы (см. стр. 174) могут быть определены путем непосредственного вычисления рядов (2.3), для чего можно ограничиться сравнительно небольшим числом первых членов этих рядов. Таким же образом могут быть найдены все искомые величины при достаточно большом $|\xi|$. Если $|\xi|$ недостаточно велико, и искомая величина имеет особенность, то во избежании подсчета большого числа членов соответствующего ряда (2.3) можно эту искомую величину (внутренний силовой фактор) представить указанным выше образом в виде суммы двух функций: не имеющего особенностей функционального ряда, сходящегося достаточно быстро, и функции, выраженной в замкнутой форме. Первая из этих функций и ограниченные члены, входящие в состав второй функции, могут быть отброшены, если поведение силового фактора исследуется в достаточно малой окрестности точки, в которой данный фактор обращается в бесконечность (такого рода точками, как это будет видно, являются только точки $\xi=0$, $\varphi=-\beta$ и $\xi=0$, $\varphi=\beta$). Таким путем получаются простые асимптотические формулы.

Мы сейчас установим асимптотическую формулу для ряда (2.10) при $k+m=7$ и нечетном [1] $m=2\mu+1$.

[1] При четном m этот ряд будет ограниченной функцией ξ и φ.

Ряд, стоящий в правой части равенства (2.8), является всюду непрерывной ограниченной функцией ξ и φ и останется таковой, если этот ряд продифференцировать почленно по ξ или по φ (об этом уже говорилось на стр. 175). Седьмая производная от $f_{\nu 0}{}^{0\beta}(\xi) + f_{\nu 1}{}^{0\beta}(\xi)\cos\varphi$, входящая в состав $S_{km}{}^{0\beta}$, тоже ограничена, как это ясно из формул (2.1) и (1.2). Что касается функций $\psi_1(|\xi|, \varphi+\beta)$ и $\psi_1(|\xi|, \varphi-\beta)$, то они неограниченно растут по мере приближения соответственно в точках $\xi=0$, $\varphi=-\beta$ и $\xi=0$, $\varphi=\beta$ (и только к ним). Принимая во внимание сказанное и ограниченность функций (1.21), можно при переходе от равенства (2.8) к асимптотическому (в окрестностях точек $\xi=0$, $\varphi=\pm\beta$) отбросить стоящий в его правой части ряд, а из состава функции $S_{km}{}^{0\beta}$ ($m=2\mu+1$, $k=7-m$ — четное) оставить только член

$$\pm(-1)^{\mu}\frac{\pi\lambda_\nu}{192\,\beta}C_k\psi_1(|\xi|, \varphi\pm\beta)$$

Если еще использовать формулу для C_k и асимптотическую формулу для ψ_1, то в результате получаем следующее асимптотическое равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^7}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^{2\mu+1}}\left(f_{\nu n}{}^{0\beta}(\xi)\cos n\varphi\right)\simeq$$

$$\simeq\mp(-1)^{\mu}\frac{\pi\lambda_\nu}{384\,\beta}(k-1)\left[k(8-k)-15\right]\ln\left[\xi^2+(\varphi\pm\beta)^2\right] \tag{2.11}$$

где верхние знаки соответствуют окрестности точки $\xi=0$, $\varphi=-\beta$, а нижние — окрестности точки $\xi=0$, $\varphi=\beta$.

Установим теперь асимптотическую формулу для ряда (2.10) при $k+m=8$. На основании равенств (2.6) и (2.8) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^8}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}\left(f_{\nu n}{}^{0\beta}(\xi)\cos n\varphi\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^8}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}\left(f_{\nu n1}{}^{0\beta}(\xi)\cos n\varphi\right)+\frac{\partial}{\partial\xi\,(\partial\varphi)}S_{k'm'}{}^{0\beta}(\xi,\varphi) \tag{2.12}$$
$$(k'+m'+1=k+m=8)$$

где символ $\partial/\partial\xi\,(\partial\varphi)$ может означать как $\partial/\partial\xi$, так и $\partial/\partial\varphi$.

Как легко установить из формул (1.22) и из формул[1]

$$\begin{gathered}|\xi|\frac{\partial\psi_2}{\partial|\xi|}\simeq-|\xi|\,\varphi\rho^{-2}, \qquad \xi^2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial|\xi|^2}\simeq 2|\xi|^3\varphi\rho^{-4}\\ |\xi|^3\frac{\partial^3\psi_2}{\partial|\xi|^3}\simeq 2|\xi|^3\varphi(\varphi^2-3\xi^2)\rho^{-6} \qquad (\rho^2=\xi^2+\varphi^2)\end{gathered} \tag{2.13}$$

производные от функций

$$\begin{gathered}|\xi|^3\frac{\partial^3\psi(|\xi|, \varphi\pm\beta)}{\partial|\xi|^3}, \qquad \xi^2\frac{\partial^2\psi(|\xi|, \varphi\pm\beta)}{\partial|\xi|^2}\\ |\xi|\frac{\partial\psi(|\xi|, \varphi\pm\beta)}{\partial|\xi|}, \qquad \psi(|\xi|, \varphi\pm\beta) \qquad (\psi=\psi_1, \psi_2)\end{gathered} \tag{2.14}$$

---

[1] Формулы (2.13) справедливы в окрестности точки $\xi=0$, $\varphi=0$ с той же оговоркой, которая была сделана по отношению к равенствам (1.22).

неограниченно растут по мере приближения к точкам[1] $\xi=0$, $\varphi=\mp\beta$ (и только к ним) и нельзя, вообще говоря, вблизи этих точек пренебрегать производной от какой-либо из указанных функций. На основании сказанного, переходя от равенства (2.12) к асимптотическому, можно отбросить в этом равенстве ряд справа, а из состава $S_{k'm'}{}^{0\beta}$ оставить лишь член

$$\mp(-1)^{\mu}\frac{\pi\lambda_{\nu}}{192\,\beta}\Big[|\xi|^{3}\frac{\partial^{3}\psi_{1}(|\xi|,\varphi\pm\beta)}{\partial|\xi|^{3}}-A_{k'}\xi^{2}\frac{\partial^{2}\psi_{1}(|\xi|,\varphi\pm\beta)}{\partial|\xi|^{2}}+$$
$$+B_{k'}|\xi|\frac{\partial\psi_{1}(|\xi|,\varphi\pm\beta)}{\partial|\xi|}-C_{k'}\psi_{1}(|\xi|,\varphi\pm\beta)\qquad(2.15)$$

если $m'=2\mu+1$ $(\mu=0,1,2,\ldots)$, что всегда может быть осуществлено при $m\neq 0$; если же $m=0$ и, следовательно, $S_{k'm'}{}^{0\beta}=S_{70}{}^{0\beta}$, то из состава $S_{70}{}^{0\beta}(\xi,\varphi)$ можно оставить только член

$$\pm\operatorname{sgn}\xi\,\frac{\pi\lambda_{\nu}}{192\,\beta}\Big[|\xi|^{3}\frac{\partial^{3}\psi_{2}(|\xi|,\varphi\pm\beta)}{\partial|\xi|^{3}}-A_{7}\xi^{2}\frac{\partial^{2}\psi_{2}(|\xi|,\varphi\pm\beta)}{\partial|\xi|^{2}}+$$
$$+B_{7}|\xi|\frac{\partial\psi_{2}(|\xi|,\varphi\pm\beta)}{\partial|\xi|}-C_{7}\psi_{2}(|\xi|,\varphi\pm\beta)\Big]\qquad(2.16)$$

В выражениях (2.15) и (2.16) верхние знаки соответствуют окрестности точки $\xi=0$, $\varphi=-\beta$, а нижние — окрестности точки $\xi=0$, $\varphi=\beta$.

Оставляя в правой части равенства (2.12) только производную от выражения (2.15) (если $m\neq 0$) или производную от выражения (2.16) (если $m=0$) и используя формулы (4.20)*, (1.20), (1.22), (2.13), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^{8}}{\partial\xi^{k}\,\partial\varphi^{m}}\left(f_{\nu n}{}^{0\beta}(\xi)\cos n\varphi\right)\simeq\mp(-1)^{\mu}\frac{\pi\lambda_{\nu}}{192\,\beta}\frac{\partial}{\partial\xi(\partial\varphi)}\Big[2\xi^{4}(3\zeta^{2}-\xi^{2})\rho^{-6}+$$
$$+3(2-k')\xi^{2}(\zeta^{2}-\xi^{2})\rho^{-4}-3[5(1-k')+k'^{2}]\xi^{2}\rho^{-2}+$$
$$+(k'-1)[k'(8-k')-15]\ln\rho\Big]_{\zeta=\varphi\pm\beta}\qquad(\rho^{2}=\xi^{2}+\zeta^{2})\qquad(2.17)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^{8}}{\partial\xi^{8}}\left(f_{\nu n}{}^{0\beta}(\xi)\cos n\varphi\right)\simeq\pm\frac{\pi\lambda_{\nu}}{64\beta}\left[\zeta\rho^{-2}(16\xi^{6}\rho^{-6}-56\xi^{4}\rho^{-4}+70\,\xi^{2}\rho^{-2}-35)\right]_{\zeta=\varphi\pm\beta}$$

В этих формулах верхние знаки соответствуют окрестности точки $\xi=0$, $\varphi=-\beta$, а нижние — окрестности точки $\xi=0$, $\varphi=\beta$. Затем в формуле (2.17) либо $m=2\mu+1$ и $k=k'+1$ (тогда $\partial/\partial\xi(\partial\varphi)=\partial/\partial\xi$), либо $m=2\mu+2$ и $k=k'$ (тогда $\partial/\partial\xi(\partial\varphi)=\partial/\partial\varphi$).

Используя формулы (2.11) и (2.17) легко получить асимптотические равенства для всех искомых величин, не ограниченных в окрестностях точек $\xi=0$, $\varphi=-\beta$ и $\xi=0$, $\varphi=\beta$ и, следовательно, определяющихся с помощью операторов $L_{\nu}^{(t)}$ выше шестого порядка.

Выписывая для всех этих величин асимптотические равенства, мы объединим их в группы в зависимости от вида входящих в них выражений.

---

[1] Если двигаться вне сколь угодно малых углов, выходящих из точек $\xi=0$, $\varphi=\mp\beta$ и содержащих некоторые особые линии. Под последними мы разумеем те из линий $(\varphi\pm\beta)/\xi=\mathrm{const}$, вдоль которых исчезают производные от функций (2.14), когда эти функции определены из асимптотических равенств (1.22), (2.13).

Первая группа асимптотических формул:

$$S_1^{(1)} = -S_2^{(1)} \simeq \mp (1-\sigma)(8\pi R\beta)^{-1} Q_1 \ln \rho \qquad (\rho^2 = \xi^2 + (\varphi \pm \beta)^2)$$

$$H_1^{(1)} = -H_2^{(1)} \simeq \pm (1+\sigma)(5+\sigma) h^2 (192\pi R^2\beta)^{-1} Q_1 \ln \rho$$

$$(1-\sigma)^{-1} T_1^{(2)} \simeq -(3+\sigma)^{-1} T_2^{(2)} \simeq \pm (8\pi R\beta)^{-1} Q_2 \ln \rho$$

$$-(25-\sigma^2)^{-1} G_1^{(2)} \simeq (1-\sigma)^{-1}(11-\sigma)^{-1} G_2^{(2)} \simeq \pm (192\pi R^2\beta)^{-1} h^2 Q_2 \ln \rho$$

$$4\pi R\beta N_2^{(3)} \simeq \mp Q_3 \ln \rho$$

$$T_1^{(4)} \simeq -(3+2\sigma)^{-1} T_2^{(4)} \simeq \pm (16\pi R^2\beta)^{-1} Q_4 \ln \rho$$

$$G_1^{(4)} \simeq G_2^{(4)} \simeq \pm (1+\sigma)(8\pi R\beta)^{-1} Q_4 \ln \rho$$

$$S_1^{(5)} \simeq (3-2\sigma)^{-1} S_2^{(5)} \simeq \mp (16\pi R^2\beta)^{-1} Q_5 \ln \rho$$

$$H_1^{(5)} = -H_2^{(5)} \simeq \pm (8\pi R\beta)^{-1}(1-\sigma) Q_5 \ln \rho$$

Вторая группа асимптотических формул:

$$N_2^{(1)} \simeq \mp (96\pi R^3\beta)^{-1}(1+\sigma) h^2 Q_1 \xi \rho^{-2} [8(\varphi \pm \beta)^4 \rho^{-4} + 4(\varphi \pm \beta)^2 \rho^{-2} + 3]$$

$$N_1^{(2)} \simeq \mp (96\pi R^3\beta)^{-1} h^2 Q_2 \xi \rho^{-2} [8(1+\sigma)(\varphi \pm \beta)^4 \rho^{-4} + \\ + 4(3-\sigma)(\varphi \pm \beta)^2 \rho^{-2} + 7 - \sigma]$$

$$Q_4^{-1} N_1^{(1)} \simeq -Q_5^{-1} N_2^{(5)} \simeq \pm (4\pi R^2\beta)^{-1} \xi \rho^{-2}$$

Третья группа асимптотических формул:

$$N_1^{(1)} \simeq \pm (96\pi R^3\beta)^{-1}(1+\sigma) h^2 Q_1 (\varphi \pm \beta) \rho^{-2} (8\xi^4 \rho^{-4} - 12\xi^2 \rho^{-2} + 3)$$

$$N_2^{(2)} \simeq \mp (96\pi R^3\beta)^{-1} h^2 Q_2 (\varphi \pm \beta) \rho^{-2} [8(1+\sigma)\xi^4 \rho^{-4} - \\ - 4(7+3\sigma)\xi^2 \rho^{-2} + 3(9+\sigma)]$$

$$N_2^{(4)} \simeq \pm (4\pi R^2\beta)^{-1} Q_4 (\varphi \pm \beta) \rho^{-2}, \qquad N_1^{(5)} \simeq \pm (4\pi R^2\beta)^{-1} Q_5 (\varphi \pm \beta) \rho^{-2}$$

Формулы первой группы справедливы в окрестностях точек $\xi = 0$, $\varphi = -\beta$ и $\xi = 0$, $\varphi = \beta$, за исключением, быть может, линии[1] $\xi = 0$. Любая из формул второй и третьей групп справедлива в окрестностях точек $\xi = 0$, $\varphi = -\beta$ и $\xi = 0$, $\varphi = \beta$, за исключением, быть может, линии $\xi = 0$ и за исключением сколь угодно малых фиксированных углов, имеющих вершины в указанных точках и содержащих особые линии $(\varphi + \beta)/\xi = \text{const}$ (среди них может быть и линия $\xi = 0$), вдоль которых правая часть данной формулы исчезает. В каждой из приведенных асимптотических формул верхние знаки соответствуют окрестности точки $\xi = 0$, $\varphi = -\beta$, а нижние — окрестности точки $\xi = 0$, $\varphi = \beta$.

На основании приведенных асимптотических формул можно утверждать, что при приближении к точке $\xi = 0$, $\varphi = \mp \beta$ вдоль линии $(\varphi \pm \beta)/\xi = \text{const}$,

[1] Мы вынуждены исключить из рассмотрения линию $\xi = 0$, поскольку равенства (4.2)* и (4.21)* при $\alpha \to 0$, $\beta = \text{const}$ и $k + m = 7$, 8, а также равенство (2.8) были установлены лишь для $\xi \neq 0$.

отличной от $\xi=0$, величины $T_1^{(\nu)}$, $T_2^{(\nu)}$, $G_1^{(\nu)}$, $G_2^{(\nu)}$, $S_1^{(\nu)}$, $S_2^{(\nu)}$, $H_1^{(\nu)}$, $H_2^{(\nu)}\,(\nu\neq 3)$ и $N_2^{(3)}$ ведут себя, как $\ln\rho$, а любая из величин $N_1^{(\nu)}$ и $N_2^{(\nu)}\,(\nu\neq 3)$, если линия $(\varphi\pm\beta)/\xi=\mathrm{const}$ не является для нее особой, ведет себя, как $1/\rho$. Величины $N_1^{(\nu)}$ и $N_2^{(\nu)}\,(\nu\neq 3)$ остаются, очевидно, ограниченными вдоль своих особых линий, отличных от линии $\xi=0$.

Укажем, что *приведенные в настоящем параграфе асимптотические формулы соответствуют не только частному решению, с помощью которого они получены, но и полному решению задачи о действии на цилиндрическую оболочку нагрузки, равномерно распределенной по отрезку направляющего круга*[1] *поверхности* S.

§ 3. Случай нагрузки, равномерно распределенной вдоль отрезка образующей. Если составляющие нагрузки равномерно распределены по отрезку образующей длиной $2\alpha R$, то, обращаясь снова к равенству (4.22)*, заключаем, что перемещения и внутренние силовые факторы при рассматриваемом частном решении определяются выражениями вида (4.1)*, как и при элементарной нагрузке, но только с заменой в этих выражениях функций $f_{\nu n}(\xi)$ функциями $f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi)$ (см. [1], стр. 562). Очевидно, функции $f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi)$ определяются из формул (2.19)*, (2.18)*, если в них заменить $n\beta/\sin n\beta$ $(n=1, 2, \ldots)$ единицей.

Таким образом, для любой компоненты рассматриваемой в этом параграфе нагрузки перемещения и внутренние силовые факторы могут быть получены путем почленного воздействия все тех же операторов $L_\nu^{(t)}$ на ряды $f_{\nu 0}^{\alpha 0}+f_{\nu 1}^{\alpha 0}\cos\varphi+f_{\nu 2}^{\alpha 0}\cos 2\varphi+\cdots$. По отношению к тем искомым величинам, которые определяются с помощью операторов ниже седьмого порядка, сказанное справедливо при любых значениях ξ и φ, а по отношению к остальным искомым величинам всюду, за исключением линий $\xi=\pm\alpha$, а также нагруженного отрезка $|\xi|\leqslant\alpha$, $\varphi=0$, если искомая величина определяется с помощью оператора $L_\nu^{(t)}$, содержащего производную[2] $\partial^8/\partial\varphi^8$ (такой искомой величиной является лишь $N_1^{(5)}$).

Из равенства (4.9)* и первой оценки (4.3)* получаем, что при $k+m<7$ и любых ξ и φ

$$\left|\frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}\left(f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi\right)\right|=\left|\lim_{\beta\to 0}\frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}\left(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant c_{\nu k}'\,\alpha^{-1}n^{k+m-8}\leqslant c_{\nu k}'\,\alpha^{-1}n^{-2}$$

Поэтому если оператор $L_\nu^{(t)}$ ниже седьмого порядка, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_\nu^{(t)}\left(f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi\right) \tag{3.1}$$

[1] Считая, что этот отрезок не принадлежит граничному контуру оболочки.

[2] См. результаты, касающиеся равенства (4.21)* (статья [1], курсив на стр. 562). В статье [1], рассматривая ряд с членами $\partial^8(f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi)/\partial\varphi^8$, мы условились понимать выписанное выражение не буквально, а разуметь под ним функцию $-\overline{D}(f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi)$, если $|\xi|<\alpha$, $\varphi\neq 0$. Этого условия мы будем придерживаться и в настоящей работе.

сходится равномерно относительно ξ и φ и является всюду непрерывной функцией этих переменных, ограниченной на множестве всех действительных значений ξ и φ. Такого рода функциями являются перемещения u, v, w, соответствующие любой компоненте нагрузки, равномерно распределенной по отрезку образующей, и внутренние силовые факторы (все, кроме N_1 и N_2), соответствующие компоненте с индексом $\nu = 3$ той же нагрузки, т. е. величины $T_1^{(3)}$, $T_2^{(3)}$, $S_1^{(3)}$, $S_2^{(3)}$, $H_1^{(3)}$, $H_2^{(3)}$, $G_1^{(3)}$, $G_2^{(3)}$. Указанные перемещения и силовые факторы могут быть вычислены в каждой точке (ξ, φ), как ряды (3.1), в которых можно ограничиваться сравнительно небольшим числом первых членов. Остальные искомые величины выражаются при помощи операторов $L_\nu^{(t)}$ не ниже седьмого порядка и имеют особенности. Определение этих величин при недостаточно большом $|\xi|$ может потребовать вычисления большого числа членов рядов (3.1). Покажем, как в рассматриваемом случае можно представить какую-либо искомую величину с особенностью в виде суммы из достаточно быстро сходящегося ряда и функции, выраженной в замкнутой форме. Напишем

$$f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi) = f_{\nu n1}^{\alpha 0}(\xi) + f_{\nu n2}^{\alpha 0}(\xi) \qquad (n > 1) \tag{3.2}$$

где

$$f_{\nu n1}^{\alpha 0}(\xi) = \lim_{\beta \to 0} f_{\nu n1}(\xi), \qquad f_{\nu n2}^{\alpha 0}(\xi) = \lim_{\beta \to 0} f_{\nu n2}(\xi)$$

При $k + m = 7, 8$ всюду, за исключением линий $\xi = \pm\alpha$, а также отрезка $|\xi| \leqslant \alpha$, $\varphi = 0$, если $k = 0$, $m = 8$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}(f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi) = \frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}(f_{\nu 0}^{\alpha 0}(\xi) + f_{\nu 1}^{\alpha 0}(\xi)\cos\varphi) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}(f_{\nu n1}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}(f_{\nu n2}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi) \tag{3.3}$$

где при $k = 0$, $m = 8$ и $|\xi| < \alpha$, $\varphi \neq 0$ под символом $\partial^8 / \partial\varphi^8$ следует разуметь оператор $-\overline{D}$ (имея в виду сказанное в статье [1] на стр. 562 о формуле (4.21)* в случае $k = 0$, $m = 8$ и $\beta \to 0$, $\alpha = \mathrm{const}$). При $k = 0$, $m = 8$ и $|\xi| > \alpha$ в равенстве (3.3) можно оставить за символом $\partial^8 / \partial\varphi^8$ его буквальный смысл, но можно понимать под этим символом и оператор $-\overline{D}$, так как при $|\xi| > \alpha$

$$\frac{\partial^8}{\partial\varphi^8}(f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi) = -\overline{D}(f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi)$$

и ряд из левой части равенства (3.3) имеет смысл [1].

---

[1] Ряд, стоящий в левой части формулы (3.3), имеет смысл при $k + m = 7, 8$ всюду, кроме линий $\xi = \pm\alpha$ и отрезка $|\xi| \leqslant \alpha$, $\varphi = 0$, если $k = 0$, $m = 8$, как это ясно из рассуждений, приведших к равенству (4.21)*. С помощью формулы (3.13)* легко видеть, что второй ряд из правой части равенства (3.3) также имеет смысл при $k + m = 7, 8$, если только $\xi \neq \pm\alpha$. Но тогда в силу равенства (3.2) при $k + m = 7, 8$ всюду вне линий $\xi = \pm\alpha$ и отрезка $|\xi| \leqslant \alpha$, $\varphi = 0$, если $k = 0$, $m = 8$, имеет смысл и первый ряд из правой части формулы (3.3) и формула (3.3) справедлива со сделанными оговорками.

Оценим члены первого ряда из правой части равенства (3.3). Имеем

$$f_{\nu n1}{}^{\alpha 0}(\xi) = \frac{n\beta}{\sin n\beta} f_{\nu n1}(\xi)$$

Отсюда и из формулы (3.9)* при $k \neq 0$ легко получить

$$\left| \frac{d^k}{d\xi^k} f_{\nu n1}{}^{\alpha 0}(\xi) \right| < n^{k-10} C_{\nu k}'' \tag{3.4}$$

где

$$C_{\nu k}'' = \frac{\lambda_\nu}{\alpha} \int\limits_0^\infty \frac{2 + 8\eta^2 + (4\varkappa^2 + 7)\eta^4}{(\eta^8 + {}^1/_2)(\eta^2 + 1)^4} \eta^{k-1} d\eta$$

Так как в равенстве (3.3) может быть $k = 0$, то проведем еще следующую оценку [см. формулу (3.9)*]:

$$|f_{\nu n1}{}^{\alpha 0}(\xi)| < \frac{\lambda_\nu}{2n^{10}\alpha} \left\{ \left| \int\limits_0^\infty \frac{\sin(\xi+\alpha) n\eta + \sin(\xi-\alpha) n\eta}{\eta} \frac{2 - n^{-2}}{\delta_n(\eta)(\eta^2+1)^4} d\eta \right| + \right.$$

$$\left. + 2 \int\limits_0^\infty \frac{|4(2 - n^{-2})\eta + [\theta(7 - \sigma^2) - 4\varkappa^2 n^{-2}]\eta^3|}{\delta_n(\eta)(\eta^2+1)^4} d\eta \right\} <$$

$$< \frac{\lambda_\nu}{2n^{10}\alpha} \left\{ 4 \int\limits_0^{\pi/n|\xi+\alpha|} \frac{\sin n|\xi+\alpha|\eta}{\eta} d\eta + 4 \int\limits_0^{\pi/n|\xi-\alpha|} \frac{\sin n|\xi-\alpha|\eta}{\eta} d\eta + \right.$$

$$\left. + 2 \int\limits_0^\infty \frac{8\eta + (4\varkappa^2 + 7)\eta^3}{(\eta^8 + {}^1/_2)(\eta^2+1)^4} d\eta \right\} = n^{-10} C_{\nu 0}'' \tag{3.5}$$

где

$$C_{\nu 0}'' = \frac{\lambda_\nu}{\alpha} \left[4 \int\limits_0^\pi \frac{\sin\eta}{\eta} d\eta + \int\limits_0^\infty \frac{8\eta + (4\varkappa^2 + 7)\eta^3}{(\eta^8 + {}^1/_2)(\eta^2 + 1)^4} d\eta \right]$$

Из оценок (3.4) и (3.5) получаем [1]

$$\left| \frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k \partial\varphi^m} (f_{\nu n1}{}^{\alpha 0}(\xi) \cos n\varphi) \right| < n^{k+m-10} C_{\nu k}'' \leqslant n^{-2} C_{\nu k}'' \qquad (k, m \geqslant 0, \ k + m \leqslant 8)$$

где константы $C_{\nu k}''$ не зависят от n.

Отсюда следует, что при $k + m = 7{,}8$ первый ряд из правой части равенства (3.3) сходится достаточно быстро, а также, что он сходится равномерно относительно ξ и φ и является ограниченной функцией этих переменных на множестве всех действительных значений ξ и φ. Заметим (хотя это и не имеет значения для дальнейших рассуждений), что при $k + m = 7$ и $k + m = 8$, $k \neq 0$, а также при $k = 0$, $m = 8$, если под $\partial^8 / \partial\varphi^8$ всюду разуметь оператор $-\overline{D}$, указанный ряд является всюду непрерывной

---

[1] Здесь опять-таки при $k = 0$, $m = 8$ и $|\xi| < \alpha$ под $\partial^8 / \partial\varphi^8$ разумеется оператор $-\overline{D}$. Если при любых ξ и φ разуметь под $\partial^8 / \partial\varphi^8$ оператор $-\overline{D}$, то этот результат устанавливается с помощью одной оценки (3.4).

функцией ξ и φ. Если же под $\partial^8/\partial\varphi^8$ разуметь оператор $-D$ только для $|\xi|<\alpha$, то при $k=0$, $m=8$ указанный ряд является непрерывной функцией ξ и φ на каждом из множеств: множестве точек, у которых $|\xi|<\alpha$, и множестве точек, у которых[1] $|\xi|>\alpha$. Обратимся теперь ко второму ряду из правой части равенства (3.3). Из соотношения

$$f_{\nu n2}{}^{\alpha 0}(\xi)=\frac{n\beta}{\sin n\beta}\,f_{\nu n2}(\xi)$$

и формул (3.12)*, (3.13)* получаем

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^7}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}\,(f_{\nu n2}{}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi)=\frac{\pi\lambda_\nu}{192\alpha}\Big\{\Big[(1-\operatorname{sgn}|y|-\operatorname{sgn}y)^{k+1}\Big(-e^{-|y|}(|y|^3+$$
$$+A_k'y^2+B_k'|y|+C_k')\cos(\varphi+\tfrac{1}{2}m\pi)+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n|y|}(|y|^3n^2+A_k'y^2n+B_k'|y|+$$
$$+C_k'n^{-1})\cos(n\varphi+\tfrac{1}{2}m\pi)\Big)\Big]_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha}+48\,\rho_k\,[\operatorname{sgn}(\xi+\alpha)-$$
$$-\operatorname{sgn}(\xi-\alpha)]\sum_{n=2}^{\infty}n^{-1}\sin n\varphi\Big\}\quad(\rho_0=1,\ \rho_1=\rho_2=\cdots=0)\qquad(3.6)$$

Из равенств (3.3) и (3.6) на основании тех же соображений, которые использовались при переходе от равенста (1.13) к равенству (1.17), получаем, что при любых $\xi\neq\pm\alpha$ и φ имеет место формула

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^7}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}\,(f_{\nu n}{}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^7}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}\,(f_{\nu n1}{}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi)+S_{km}{}^{\alpha 0}(\xi,\varphi)\qquad(3.7)$$

где

$$S_{km}{}^{\alpha 0}(\xi,\varphi)=\frac{\partial^7}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}\,(f_{\nu 0}{}^{\alpha 0}(\xi)+f_{\nu 1}{}^{\alpha 0}(\xi)\cos\varphi)+\frac{\pi\lambda_\nu}{192\alpha}\Big\{48\rho_k\,[\operatorname{sgn}(\xi+\alpha)-$$
$$-\operatorname{sgn}(\xi-\alpha)]\,[\psi_2(0,\varphi)-\sin\varphi]-\Big[(-\operatorname{sgn}y)^{k+1}\,[e^{-|y|}(|y|^3+A_k'y^2+B_k'|y|+$$
$$+C_k')\cos(\varphi+\tfrac{1}{2}m\pi)+(-1)^{m+[{}^1/_2 m]}\Big(|y|^3\frac{\partial^3\psi(|y|,\varphi)}{\partial|y|^3}-A_k'y^2\frac{\partial^2\psi(|y|,\varphi)}{\partial|y|^2}+$$
$$+B_k'|y|\frac{\partial\psi(|y|,\varphi)}{\partial|y|}-C_k'\psi(|y|,\varphi)\Big)\Big]_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha}\Big\}\qquad(3.8)$$
$$(\rho_0=1,\ \rho_1=\rho_2=\cdots=0)$$

а функция $\psi=\psi_1$ при четном m, и $\psi=\psi_2$ при нечетном m $(m=0,1,\ldots)$.

---

[1] Сказанное следует из равномерной сходимости ряда, о котором идет речь [первого ряда из правой части равенства (3.3)], и из непрерывности его членов (всюду или на указанных множествах, если $k=0$, $m=8$ и под $\partial^8/\partial\varphi^8$ разумеется оператор $-\overline{D}$ только для $|\xi|<\alpha$). Непрерывность членов рассматриваемого ряда по φ очевидна, а непрерывность по ξ следует из того, что в равенстве

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\,f_{\nu n1}{}^{\alpha 0}(\xi)=\lambda_\nu n^{k-9}\int_0^{\infty}\frac{\sin n\alpha\eta\cos(n\xi\eta+{}^1/_2 k\pi)}{n\alpha\eta}\,\frac{\eta^k\,\Pi_n(\eta)}{\delta_n(\eta)(\eta^2+1)^4}\,d\eta\qquad(k=0,1,\ldots,8)$$

интеграл сходится равномерно относительно ξ, а подинтегральная функция непрерывна по η и ξ.

Таким образом, мы представили ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \, \partial \varphi^m} (f_{\nu n}{}^{\alpha 0}(\xi) \cos n\varphi) \tag{3.9}$$

при $k+m=7$ и $\xi \neq \pm \alpha$ в виде суммы из достаточно быстро сходящегося всюду ограниченного функционального ряда и функции, выраженной в замкнутой форме.

Остается представить ряд (3.9) в указанном виде при $k+m=8$.

Если $\xi \neq \pm \alpha$ и $k \neq 0$, то можно написать

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^8}{\partial \xi^k \, \partial \varphi^m} (f_{\nu n}{}^{\alpha 0}(\xi) \cos n\varphi) =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^8}{\partial \xi^k \, \partial \varphi^m} (f_{\nu n 1}{}^{\alpha 0}(\xi) \cos n\varphi) + \frac{\partial}{\partial \xi \, (\partial \varphi)} S_{k' 2\mu}{}^{\alpha 0}(\xi, \varphi) \qquad (k' > 0, \ k' + 2\mu = 7) \tag{3.10}$$

Далее при $\xi \neq \pm \alpha$ справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{D} (f_{\nu n}{}^{\alpha 0}(\xi) \cos n\varphi) =$$

$$= \overline{D}' (f_{\nu 0}{}^{\alpha 0}(\xi) + f_{\nu 1}{}^{\alpha 0}(\xi) \cos \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} [\overline{D}' (f_{\nu n}{}^{\alpha 0}(\xi) \cos n\varphi) + \overline{D}'' (f_{\nu n 1}{}^{\alpha 0}(\xi) \cos n\varphi)] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \xi} (S_{70}{}^{\alpha 0}(\xi, \varphi) + 4S_{52}{}^{\alpha 0}(\xi, \varphi) + 6S_{34}{}^{\alpha 0}(\xi, \varphi) + 4S_{16}{}^{\alpha 0}(\xi, \varphi)) \tag{3.11}$$

где $\overline{D}'' = \overline{D} - \overline{D}'$ — та часть оператора $\overline{D}$, которая содержит все производные восьмого порядка. Наконец, при $|\xi| > \alpha$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^8}{\partial \varphi^8} (f_{\nu n}{}^{\alpha 0}(\xi) \cos n\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^8}{\partial \varphi^8} (f_{\nu n 1}{}^{\alpha 0}(\xi) \cos n\varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} S_{07}{}^{\alpha 0}(\xi, \varphi) \tag{3.12}$$

Эти равенства следуют из равенства (3.3), если принять во внимание, что первые два ряда из правой части формулы (3.6) могут быть продифференцированы почленно при $\xi \neq \pm \alpha$, а член с множителем ρ_k исчезает, когда $k = k' > 0$ или $|\xi| > \alpha$. Написав равенства (3.10) — (3.12), мы представили тем самым ряд (3.9) при $k+m=8$ (исключив из рассмотрения линии $\xi = \pm \alpha$, а также отрезок $|\xi| \leqslant \alpha$, $\varphi = 0$, если $k=0$, $m=8$) также в виде суммы из достаточно быстро сходящегося, всюду ограниченного функционального ряда[1] и функции, выраженной в замкнутой форме. В таком же виде, как это теперь должно быть ясно, могут быть написаны и ряды (3.1), когда операторы $L_\nu^{(t)}$ седьмого или восьмого порядка.

Итак, если нагрузка равномерно распределена вдоль отрезка образующей, то все перемещения и некоторые силовые факторы (см. стр. 181)

---

[1] Таким рядом является каждый из рядов, стоящих в правых частях равенств (3.10) — (3.12) [см. сказанное о ряде (3.1), когда оператор $L_\nu^{(t)}$ ниже седьмого порядка, и о первом ряде из правой части равенства (3.3)].

могут быть определены путем непосредственного вычисления рядов (3.1), для чего можно ограничиваться сравнительно небольшим числом первых членов этих рядов. Таким же образом могут быть найдены все искомые величины при достаточно больших значениях $|\alpha \pm \xi|$. Если искомая величина (внутренний силовой фактор) имеет особенность и ищется на недостаточно большом удалении от концов нагруженного участка, то во избежании подсчета большого числа членов соответствующего ряда (3.1) целесообразно представить (указанным выше способом) эту искомую величину в виде суммы двух функций: достаточно быстро сходящегося, всюду ограниченного функционального ряда и функции, выраженной в замкнутой форме. Первая из этих функций и ограниченные члены, входящие в состав второй функции, могут быть отброшены, если поведение силового фактора исследуется в достаточно малой окрестности точки, в которой данный фактор обращается в бесконечность (такими точками, как это будет видно, являются только точки $\xi = -\alpha$, $\varphi = 0$ и $\xi = \alpha$, $\varphi = 0$). В результате получаются простые асимптотические формулы.

Мы сейчас установим асимптотическую формулу для ряда (3.9) при $k + m = 7$ и четном [1] $m = 2\mu$. Ряд, стоящий в правой части равенства (3.7), так же как и его производная по ξ или по φ, полученная в результате почленного дифференцирования, являются всюду ограниченными функциями (см. сказанное на стр. 182 о первом ряде из правой части равенства (3.3)). Седьмая производная от $f_{\nu 0}^{\alpha 0}(\xi) + f_{\nu 1}^{\alpha 0}(\xi) \cos \varphi$, входящая в состав $S_{km}^{\alpha 0}$, также ограничена, как и любая производная от указанного выражения [это ясно из формулы (2.19)*]. Что касается функций $\psi_1(|\xi + \alpha|, \varphi)$ и $\psi_1(|\xi - \alpha|, \varphi)$, то они неограниченно растут по мере приближения соответственно к точкам $\xi = -\alpha$, $\varphi = 0$ и $\xi = \alpha$, $\varphi = 0$ (и только к ним). Принимая во внимание сказанное и ограниченность функций (1.21), можно при переходе от равенства (3.7) к асимптотическому (в окрестностях точек $\xi = \mp \alpha$, $\varphi = 0$) отбросить стоящий в его правой части ряд, а из состава $S_{km}^{\alpha 0}$ ($m = 2\mu$, $k = 7 - m$ — нечетное) оставить только член

$$\pm (-1)^{\mu} \frac{\pi \lambda_{\nu}}{192\alpha} C_k' \psi_1(|\xi \pm \alpha|, \varphi)$$

используя при этом формулу для C_k' [см. формулы (3.14)] и асимптотическую формулу (1.20) для ψ_1. В результате приходим к следующему асимптотическому равенству:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^7}{\partial \xi^k \, \partial \varphi^{2\mu}} (f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi) \cos n\varphi) \simeq \mp (-1)^{\mu} \frac{\pi \lambda_{\nu}}{192\alpha} [3(16 - 11k) + k(k-1)(11 - k)] \ln \rho$$

$$(\rho^2 = (\xi \pm \alpha)^2 + \varphi^2) \tag{3.13}$$

где верхние знаки соответствуют окрестности точки $\xi = -\alpha$, $\varphi = 0$, а нижние — окрестности точки $\xi = \alpha$, $\varphi = 0$.

Установим теперь асимптотическую формулу для ряда (3.9) при $k + m = 8$. Будем исходить из равенств (3.10) — (3.12). Переходя от ра-

[1] При нечетном m этот ряд будет ограниченной функции ξ и φ.

венства (3.10) к асимптотическому, можно отбросить ряд в правой части (как ограниченную функцию), а из состава $S_{k'2\mu}^{\alpha 0}$ оставить только член

$$\mp (-1)^{\mu} \frac{\pi\lambda_\nu}{192\,\alpha}\left[|y|^3 \frac{\partial^3\psi_1(|y|,\varphi)}{\partial|y|^3} - A_{k'}' y^2 \frac{\partial^2\psi_1(|y|,\varphi)}{\partial|y|^2} + \right.$$
$$\left. + B_{k'}'\,|y|\frac{\partial\psi_1(|y|,\varphi)}{\partial|y|} - C_{k'}'\,\psi_1(|y|,\varphi)\right]_{y=\xi\pm\alpha}$$

поскольку остальные члены из состава $S_{k'2\mu}^{\alpha 0}$ остаются при дифференцировании ограниченными, а производная по ξ или по φ от выписанного выражения, вообще говоря, неограниченно растет по мере приближения к точкам $\xi = -\alpha$, $\varphi = 0$ и $\xi = \alpha$, $\varphi = 0$ (и только к ним). При переходе от равенства (3.11) к асимптотическому можно отбросить в его правой части первое выражение и стоящий там ряд (как ограниченные функции), а из состава функции $S_{70}^{\alpha 0} + 4S_{52}^{\alpha 0} + 6S_{34}^{\alpha 0} + 4S_{16}^{\alpha 20}$ отбросить всю ее ограниченную часть, оставив только выражение

$$\pm \frac{\pi\lambda_\nu}{192\alpha}\left[|y|^3 \frac{\partial^3\psi_1(|y|,\varphi)}{\partial|y|^3} + (A_7' - 4A_5' + 6A_3' - 4A_1')\,y^2 \frac{\partial^2\psi_1(|y|,\varphi)}{\partial|y|^2} - \right.$$
$$- (B_7' - 4B_5' + 6B_3' - 4B_1')\,|y|\frac{\partial\psi_1(|y|,\varphi)}{\partial|y|} +$$
$$\left. + (C_7' - 4C_5' + 6C_3' - 4C_1')\,\psi_1(|y|,\varphi)\right]_{y=\xi\pm\alpha}$$

Аналогично, переходя от равенства (3.12) к асимптотическому, можно отбросить ряд в правой части, а из состава $S_{07}^{\alpha 0}$ оставить только член

$$\pm\,\mathrm{sgn}\,y\,\frac{\pi\lambda_\nu}{192\alpha}\left[|y|^3 \frac{\partial^3\psi_2(|y|,\varphi)}{\partial|y|^3} - A_0' y^2 \frac{\partial^2\psi_2(|y|,\varphi)}{\partial|y|^2} + \right.$$
$$\left. + B_0'\,|y|\frac{\partial\psi_2(|y|,\varphi)}{\partial|y|} - C_0'\psi_2(|y|,\varphi)\right]_{y=\xi\pm\alpha}$$

Имея в виду сказанное и используя формулы (3.14)* и асимптотические равенства (1.22), (2.13), получаем асимптотические формулы:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^8}{\partial\xi^k\partial\varphi^m}\left(f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi\right) \simeq \mp(-1)^{\mu}\frac{\pi\lambda_\nu}{192\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi\,(\partial\varphi)}\{2y^4(3\varphi^2 - y^2)\rho^{-6} -$$
$$- 3(3-k')\,y^2(y^2-\varphi^2)\rho^{-4} - 3[11 + k'(k'-7)]\,y^2\rho^{-2} +$$
$$+ [3(16 - 11k') + k'(k'-1)(11-k')]\ln\rho\}_{y=\xi\pm\alpha} \tag{3.14}$$

$$\left(k \neq 0,\ \rho^2 = y^2 + \varphi^2;\ \begin{cases} k = k'+1,\ \partial/\partial\xi\,(\partial\varphi) = \partial/\partial\xi, & \text{если } m = 2\mu \\ k = k',\ \partial/\partial\xi\,(\partial\varphi) = \partial/\partial\varphi, & \text{если } m = 2\mu+1 \end{cases}\right)$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\overline{D}\left(f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi\right) \simeq \mp\frac{\pi\lambda_\nu}{64\alpha}\,y\rho^{-2}\,[8y^2\varphi^2(\varphi^2 - y^2)\rho^{-6} -$$
$$- 8\varphi^2(3y^2 - \varphi^2)\rho^{-4} - 38\varphi^2\rho^{-2} + 35]\,|_{y=\xi\pm\alpha} \tag{3.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^8}{\partial\varphi^8}\left(f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi)\cos n\varphi\right) \simeq \mp\frac{\pi\lambda_\nu}{64\alpha}\,y\rho^{-2}\,[2y^2(y^4 - 6y^2\varphi^2 + \varphi^4)\rho^{-6} +$$
$$+ 6y^2(y^2 - 3\varphi^2)\rho^{-4} + 11(y^2-\varphi^2)\rho^{-2} + 16]\,|_{y=\xi\pm\alpha} \quad (|\xi| > \alpha) \tag{3.16}$$

Формулы (3.14) и (3.15) справедливы в окрестностях точек $\xi = -\alpha$, $\varphi = 0$ и $\xi = \alpha$, $\varphi = 0$, а формула (3.16) справедлива в тех частях указанных окрестностей[1], для которых $|\xi| > \alpha$. Верхние знаки в формулах (3.14)—(3.16) соответствуют окрестности точки $\xi = -\alpha$, $\varphi = 0$, а нижние — окрестности точки $\xi = \alpha$, $\varphi = 0$.

Так как при $|\xi| > \alpha$ левые части формул (3.15) и (3.16) равны, то правые части этих формул, являясь рациональными выражениями, должны совпадать, как это действительно и получается после соответствующих преобразований.

Поэтому если попрежнему под выражением

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^s}{\partial \varphi^s} \left(f_{\nu n}^{(\alpha)}(\xi) \cos n\varphi\right)$$

при $|\xi| < \alpha$ разуметь левую часть формулы (3.15), то формула (3.16) будет справедлива в полных окрестностях[2] точек $\xi = -\alpha$, $\varphi = 0$ и $\xi = 0$, $\varphi = 0$, совпадая с формулой (3.15).

Используя формулы (3.13), (3.14) и (3.16), легко получить асимптотические равенства для всех искомых величин, не ограниченных в окрестностях точек $\xi = -\alpha$, $\varphi = 0$ и $\xi = \alpha$, $\varphi = 0$ и, следовательно, определяющихся при помощи операторов $L_\nu^{(t)}$ выше шестого порядка. Мы сейчас выпишем для всех этих величин асимптотические равенства, объединив их в группы по виду входящих в них выражений.

Первая группа асимптотических формул:

$$-(3+\sigma)^{-1}T_1^{(1)} \simeq (1-\sigma)^{-1}T_2^{(1)} \simeq \pm (8\pi R\alpha)^{-1} Q_1 \ln \rho \qquad (\rho^2 = (\xi \pm \alpha)^2 + \varphi^2)$$

$$(3+\sigma)^{-1}G_1^{(1)} \simeq -(1-\sigma)^{-1}G_2^{(1)} \simeq \pm (1+\sigma) h^2 (192\pi R^2\alpha)^{-1} Q_1 \ln \rho$$

$$S_1^{(2)} \simeq -S_2^{(2)} \simeq \mp (1-\sigma)(8\pi R\alpha)^{-1} Q_2 \ln \rho$$

$$H_1^{(2)} = -H_2^{(2)} \simeq \mp (11 + 2\sigma - \sigma^2) h^2 (192\pi R^2\alpha)^{-1} Q_2 \ln \rho$$

$$N_1^{(3)} \simeq \mp (4\pi R\alpha)^{-1} Q_3 \ln \rho$$

$$(3-2\sigma)^{-1} S_1^{(4)} \simeq -S_2^{(4)} \simeq \mp (16\pi R^2\alpha)^{-1} Q_4 \ln \rho$$

$$H_1^{(4)} = -H_2^{(4)} \simeq \mp (8\pi R\alpha)^{-1} (1-\sigma) Q_4 \ln \rho$$

$$(1-2\sigma)^{-1} T_1^{(5)} \simeq -\frac{1}{3} T_2^{(5)} \simeq \pm (16\pi R^2\alpha)^{-1} Q_5 \ln \rho$$

$$G_1^{(5)} \simeq G_2^{(5)} \simeq \mp (8\pi\alpha R)^{-1} (1+\sigma) Q_5 \ln \rho$$

---

[1] Рассматривая какую-либо из асимптотических формул (3.14) — (3.16) в окрестностях точек $\xi = -\alpha$, $\varphi = 0$ и $\xi = \alpha$, $\varphi = 0$, нужно исключать из этих окрестностей сколь угодно малые углы, содержащие особые линии $\varphi / (\xi \pm \alpha) = \mathrm{const}$, вдоль которых правая часть данной асимптотической формулы исчезает. Линии $\xi \pm \alpha = 0$ следует исключать, даже если они не являются особыми, поскольку уже при выводе равенства (3.7) мы предполагали $\xi \neq \pm \alpha$.

[2] С оговоркой, сделанной в предыдущей сноске.

Вторая группа асимптотических формул:

$$N_1^{(1)} \simeq \mp (1+\sigma) h^2 (96\pi R^3 \alpha)^{-1} Q_1 (\xi \pm \alpha) \rho^{-2} (8\varphi^4 \rho^{-4} - 4\varphi^2 \rho^{-2} - 1)$$

$$N_2^{(2)} \simeq \pm h^2 (96\pi R^3 \alpha)^{-1} Q_2 (\xi \pm \alpha) \rho^{-2} [8(1+\sigma)\varphi^4 \rho^{-4} + 4(3-\sigma)\varphi^2\rho^{-2} + 7 - \sigma]$$

$$Q_4^{-1} N_2^{(4)} \simeq Q_5^{-1} N_1^{(5)} \simeq \mp (4\pi R^2 \alpha)^{-1} (\xi \pm \alpha) \rho^{-2}$$

Третья группа асимптотических формул:

$$N_2^{(1)} \simeq \mp (1+\sigma) h^2 (96\pi R^3 \alpha)^{-1} Q_1 \varphi \rho^{-2} [8(\xi \pm \alpha)^4 \rho^{-4} - 12 (\xi \pm \alpha)^2 \rho^{-2} + 3]$$

$$N_1^{(2)} \simeq \mp h^2 (96\pi R^3 \alpha)^{-1} Q_2 \varphi \rho^{-2} [8(1+\sigma)(\xi \pm \alpha)^4 \rho^{-4} - 4(5+\sigma)(\xi \pm \alpha)^2 \rho^{-2} + 7 - \sigma]$$

$$Q_4^{-1} N_1^{(4)} \simeq - Q_5^{-1} N_2^{(5)} \simeq \pm (4\pi R^2 \alpha)^{-1} \varphi \rho^{-2}$$

Формулы первой группы справедливы в окрестностях точек $\xi = -\alpha$, $\varphi = 0$ и $\xi = \alpha$, $\varphi = 0$, за исключением, быть может, линий $\xi \pm \alpha = 0$[1]. Любая из формул второй и третьей групп справедлива в окрестностях точек $\xi = -\alpha$, $\varphi = 0$ и $\xi = \alpha$, $\varphi = 0$, за исключением, быть может, линий $\xi \pm \alpha = 0$, а также отрезка $|\xi| \leqslant \alpha$, $\varphi = 0$, если речь идет о формуле для $N_1^{(5)}$[2], и за исключением сколь угодно малых фиксированных углов, имеющих вершины в указанных точках и содержащих особые линии $\varphi/(\xi \pm \alpha) = \text{const}$ (среди них могут быть и линии $\xi \pm \alpha = 0$), вдоль которых правая часть данной формулы исчезает. В каждой из приведенных асимптотических формул верхние знаки соответствуют окрестности точки $\xi = -\alpha$, $\varphi = 0$, а нижние — окрестности точки $\xi = \alpha$, $\varphi = 0$.

На основании приведенных формул можно утверждать, что при приближении к точке $\xi = \mp \alpha$, $\varphi = 0$ вдоль линии $\varphi / (\xi \pm \alpha) = \text{const}$, отличной от линии $\xi \pm \alpha = 0$, величины $T_1^{(\nu)}, T_2^{(\nu)}, S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}, G_1^{(\nu)}, G_2^{(\nu)}, H_1^{(\nu)}, H_2^{(\nu)}$ $(\nu \neq 3)$ и $N_1^{(3)}$ ведут себя, как $\ln \rho$, а любая из величин $N_1^{(\nu)}$ и $N_2^{(\nu)}$ $(\nu \neq 3)$, если линия $\varphi / (\xi \pm \alpha) = \text{const}$ не является для нее особой, ведет себя, как $1/\rho$. Величины $N_1^{(\nu)}$ и $N_2^{(\nu)}$ $(\nu \neq 3)$ остаются, очевидно, ограниченными вдоль своих особых линий, отличных от линий $\xi \pm \alpha = 0$. Важно отметить, что *приведенные в настоящем параграфе асимптотические формулы соответствуют не только частному решению, с помощью которого они получены, но и полному решению задачи о действии на цилиндрическую оболочку нагрузки, равномерно распределенной вдоль отрезка образующей*[3] *поверхности S*.

[1] Мы вынуждены исключить из рассмотрения эти линии, поскольку равенство (4.21)* при $\beta \to 0$, $\alpha = \text{const}$ и $6 < k + m \leqslant 8$, а также равенство (3.7) были установлены при условии, что $\xi \neq \pm \alpha$.

[2] Как было уже сказано $N_1^{(5)}$ — единственная искомая величина, которая определяется с помощью оператора, содержащего производную $\partial^8/\partial\varphi^8$. Устанавливая асимптотическую формулу для $N_1^{(5)}$, мы вынуждены исключить из окрестностей точек $\xi = \pm \alpha$, $\varphi = 0$ те точки, которые принадлежат отрезку $|\xi| \leqslant \alpha$, $\varphi = 0$, поскольку используемое нами равенство (4.21)* при $k = 0$, $m = 8$ было доказано в точках, не принадлежащих указанному отрезку и линиям $\xi = \pm \alpha$.

[3] Считая, что точки $\xi = \pm \alpha$, $\varphi = 0$ не лежат на граничных контурах оболочки.

§ 4. Дополнение к решению при элементарной нагрузке. В статье[1] в § 3 было показано, что при $k+m<8$ и любых ξ и φ член ряда (3.3)* с индексом n меньше по модулю, чем Cn^{-2}, причем константа C не зависит от ξ и φ. Очевидно, то же самое можно сказать о членах ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{\nu}^{(t)}\left(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi\right) \tag{4.1}$$

если оператор $L_{\nu}^{(t)}$ ниже восьмого порядка. Таким образом, для любой компоненты элементарной нагрузки все искомые величины, кроме $N_1^{(\nu)}$ и $N_2^{(\nu)}$ $(\nu=1,2,4,5)$ [1], могут быть определены в любой точке (ξ,φ), как ряды (4.1), не прибегая к вычислению большого числа членов этих рядов, поскольку они сходятся достаточно быстро.

В силу указанной оценки ряд (3.3)* при $k+m<8$ сходится равномерно относительно ξ и φ, а так как члены этого ряда являются непрерывными функциями [2] ξ и φ, то все искомые величины, кроме $N_1^{(\nu)}$ и $N_2^{(\nu)}$ $(\nu=1, 2, 4, 5)$, не имеют особенностей. Что же касается величин $N_1^{(\nu)}$ и $N_2^{(\nu)}$ $(\nu=1,2,4,5)$, то они терпят разрыв на границе элемента s (нагруженной площадки), и можно только утверждать, что при непосредственном определении указанных величин, как рядов (4.1), не потребуется вычисления большого числа членов этих рядов, если значения $|\xi\pm\alpha|$ достаточно велики [см. формулы (3.12)* и (3.13)*]. При определении $N_1^{(\nu)}$ и $N_2^{(\nu)}$ $(\nu=1,2,4,5)$ в области недостаточно больших значений $|\xi\pm\alpha|$ целесообразно представить каждую из этих искомых величин в виде суммы из не имеющего особенностей функционального ряда и функции, выраженной в замкнутой форме. Покажем, как это сделать.

При $k+m=8$ всюду, за исключением точек $\xi=\pm\alpha$, $\varphi=\pm\beta$, если $0<k<8$, или за исключением отрезков $|\xi|\leqslant\alpha$, $\varphi=\pm\beta$, если $k=0$, или за исключением линий $\xi=\pm\alpha$, если $k=8$, можно написать [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^8}{\partial\xi^k\partial\varphi^m}\left(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi\right)=\frac{\partial^8}{\partial\xi^k\partial\varphi^m}\left(f_{\nu 0}(\xi)+f_{\nu 1}(\xi)\cos\varphi\right)+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^8}{\partial\xi^k\partial\varphi^m}\left(f_{\nu n1}(\xi)\cos n\varphi\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^8}{\partial\xi^k\partial\varphi^m}\left(f_{\nu n2}(\xi)\cos n\varphi\right) \tag{4.2}$$

---

[1] Поскольку эти величины определяются при помощи операторов $L_{(\nu)}^{(t)}$ восьмого порядка.

[2] Непрерывность по φ очевидна, а непрерывность по ξ следует из непрерывности функций $f_{\nu n1}^{(k)}(\xi)$ и $f_{\nu n2}^{(k)}(\xi)$ при $k=0,1,\ldots,7$ (см.[1], стр. 551—2).

[3] Устанавливая справедливость равенства (3.3)*, мы показали, что ряд из левой части равенства (4.2) всюду сходится за исключением либо точек $\xi=\pm\alpha$, $\varphi=\pm\beta$, если $0<k<8$, либо отрезков $|\xi|\leqslant\alpha$, $\varphi=\pm\beta$, если $k=0$, либо линий $\xi=\pm\alpha$, если $k=8$ (см. в статье[1] сноску на стр. 553). Было также доказано, что первый ряд из правой части равенства (4.2) сходится в любой точке (ξ,φ) (см.[1] курсив на стр. 550). Отсюда и из равенства (3.8)* следует, что второй ряд из правой части равенства (4.2) сходится одновременно с рядом из левой части этого равенства и что оно справедливо со сделанными оговорками.

Первый ряд из правой части равенства (4.2) является всюду непрерывной функцией ξ и φ, так как он равномерно сходится относительно этих переменных (см. [1] стр. 550) и члены его есть непрерывные функции ξ и φ [1]. Второй ряд из правой части (4.2) при $k+m=8$ может быть при помощи формул (3.12)* и (3.13)* или формулы (3.6) написан в виде

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^8}{\partial\xi^k\partial\varphi^m}(f_{\nu n2}(\xi)\cos n\varphi)=\frac{\pi\lambda_\nu}{192\alpha\beta}\Big[(1-\operatorname{sgn}|y|- \tag{4.3}$$

$$-\operatorname{sgn}y)^{k+1}\Big\{-e^{-|y|}(|y|^3+A_k'y^2+B_k'|y|+C_k')\cos(\varphi+\tfrac{1}{2}m\pi)\sin\beta+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n|y|}(|y|^3n^2+A_k'y^2n+B_k'|y|+C_k'n^{-1})\Big(\cos[n(\varphi+\beta)+$$

$$+\tfrac{1}{2}(m-1)\pi]-\cos[n(\varphi-\beta)+\tfrac{1}{2}(m-1)\pi]\Big)\Big\}+48\rho_k(\operatorname{sgn}|y|+$$

$$+\operatorname{sgn}y)\Big\{-\cos\varphi\sin\beta+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[\sin n(\varphi+\beta)-\sin n(\varphi-\beta)]\Big\}\Big]_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha}$$

$$(\rho_0=1,\ \rho_1=\rho_2=\dots=0)$$

Из равенств (4.2) и (4.3), вводя функции ψ_1 и ψ_2, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^8}{\partial\xi^k\partial\varphi^m}(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^8}{\partial\xi^k\partial\varphi^m}(f_{\nu n1}(\xi)\cos n\varphi)+S_{km}(\xi,\varphi) \tag{4.4}$$

где

$$S_{km}(\xi,\varphi)=\frac{\partial^8}{\partial\xi^k\partial\varphi^m}(f_{\nu0}(\xi)+f_{\nu1}(\xi)\cos\varphi)+\qquad(m\neq8) \tag{4.5}$$

$$+\frac{\pi\lambda_\nu}{192\alpha\beta}\Big[(1-\operatorname{sgn}|y|-\operatorname{sgn}y)^{k+1}\Big\{-e^{-|y|}(|y|^3+A_k'y^2+$$

$$+B_k'|y|+C_k')\cos(\varphi+\tfrac{1}{2}m\pi)\sin\beta+\tfrac{1}{2}(-1)^{m+[1/2(m+1)]}\Big[|y|^3\frac{\partial^3\psi(|y|,\zeta)}{\partial|y|^3}+$$

$$+A_k'y^2\frac{\partial^2\psi(|y|,\zeta)}{\partial|y|^2}+B_k'|y|\frac{\partial\psi(|y|,\zeta)}{\partial|y|}+C_k'\psi(|y|,\zeta)\Big]_{\zeta=\varphi-\beta}^{\zeta=\varphi+\beta}\Big\}\Big]_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha}$$

причем $\psi=\psi_1$, если m — нечетное, и $\psi=\psi_2$, если m — четное, а [2]

$$S_{08}(\xi,\varphi)=f_{\nu1}(\xi)\cos\varphi+\frac{\pi\lambda_\nu}{192\alpha\beta}\Big[\operatorname{sgn}y\Big\{[e^{-|y|}(|y|^3+9y^2+33|y|+$$

$$+48)-48]\cos\varphi\sin\beta+\frac{1}{2}\Big(|y|^3\frac{\partial^3\psi_2(|y|,\zeta)}{\partial|y|^3}-9y^2\frac{\partial^2\psi_2(|y|,\zeta)}{\partial|y|^2}+$$

$$+33|y|\frac{\partial\psi_2(|y|,\zeta)}{\partial|y|}+48\operatorname{arc\,tg}\frac{(e^{-|y|}-1)\sin\zeta}{(1+e^{-|y|})(1-\cos\zeta)}\Big)_{\zeta=\varphi-\beta}^{\zeta=\varphi+\beta}\Big\}\Big]_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha} \tag{4.6}$$

---

[1] Непрерывность по φ очевидна, а непрерывность по ξ следует из равномерной сходимости относительно ξ интеграла в формуле (3.9)* и из того, что подинтегральная функция в этом интеграле непрерывна по двум переменным η и ξ.

[2] В правой части (4.6) последний член получается на основании равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}(1-e^{-n|y|})\sin n\zeta=\operatorname{arc\,tg}\frac{(e^{-|y|}-1)\sin\zeta}{(1+e^{-|y|})(1-\cos\zeta)}\qquad(0<|\zeta|<2\pi)$$

которое легко получить при помощи формулы (1.16). При $\zeta=0$ член с acr tg в формуле (4.6) должен быть заменен нулем.

Установив равенства (4.4) — (4.6)[1], мы показали тем самым, как представить ряд (3.3)* при $k+m=8$ в виде суммы из достаточно быстро сходящегося ряда, являющегося всюду непрерывной функцией ξ и φ, и функции, выраженной в замкнутой форме.

Ясно, что в таком же виде будут представлены величины $N_1^{(\nu)}$ и $N_2^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, 4, 5$), если в соответствующих им выражениях (4.1) выделить ряды такого вида, как ряд в левой части равенства (4.4), и представить эти ряды в виде правой части равенства (4.4).

После этого определение указанных величин не будет встречать особых трудностей.

Из сказанного относительно ряда, стоящего в правой части равенства (4.4), формул (4.5), (4.6) и формул для операторов $D_{\nu\mu}$ ($\nu = 1, 2, 4, 5$; $\mu = 4,5$), ясно, что среди искомых величин, имеющих особенности, лишь величины $N_2^{(1)}$, $N_1^{(2)}$, $N_1^{(4)}$ и $N_2^{(5)}$ не ограничены, причем только в окрестностях угловых точек нагруженного элемента s, т. е. точек

$$\xi=\alpha,\ \varphi=\beta;\quad \xi=-\alpha,\ \ \varphi=\beta;\quad \xi=\alpha,\ \varphi=-\beta;\quad \xi=-\alpha,\ \ \varphi=-\beta.$$

Отбрасывая ряд из правой части равенства (4.4) как ограниченную в окрестностях указанных точек функцию и оставляя из состава функции[1] $S_{k2\mu+1}(\xi, \varphi)$ только неограниченную часть, получаем в окрестностях точек $\xi = \pm\alpha$, $\varphi = \pm\beta$ следующее асимптотическое равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^8}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^{2\mu+1}}\,(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi) \simeq \pm(-1)^{\mu}\,\frac{\pi\lambda_\nu}{384\,\alpha\beta}\,C_k'\,\psi_1(|\xi\pm\alpha|, \varphi\pm\beta) \qquad (4.7)$$

где знаки выбираются следующим образом: верхний знак в начале правой части берется для окрестностей точек $\xi=\alpha$, $\varphi=\beta$ и $\xi=-\alpha$, $\varphi=-\beta$, а нижний знак — для окрестностей точек $\xi=\alpha$, $\varphi=-\beta$ и $\xi=-\alpha$, $\varphi=\beta$; знаки же в выражениях $\xi\pm\alpha$ и $\varphi\pm\beta$ должны быть выбраны так, чтобы в точке, окрестность которой рассматривается, величина

$$\rho^2 = (\xi\pm\alpha)^2 + (\varphi\pm\beta)^2$$

обращалась в нуль.

Из равенства (4.7), формулы для C_k' (см. [1], стр. 551), асимптотического равенства (1.20) для ψ_1 и формул для операторов D_{15}, D_{24}, D_{44}, D_{55} (см. [1], стр. 539—541) легко устанавливаются в окрестностях угловых точек элемента s следующие асимптотические формулы:

$$(1+\sigma)^{-1}Q_1^{-1}N_2^{(1)} \simeq \mp(64\pi R^3\alpha\beta)^{-1}h^2\ln\rho$$

$$3\,(7-\sigma)^{-1}Q_2^{-1}N_1^{(2)} \simeq \mp(64\,\pi R^3\,\alpha\beta)^{-1}\,h^2\ln\rho$$

$$Q_4^{-1}N_1^{(4)} \simeq -Q_5^{-1}N_2^{(5)} \simeq \pm(8\pi R^2\alpha\beta)^{-1}\ln\rho$$

где знаки выбираются в соответствии с окрестностью рассматриваемой точки аналогичным образом, как в равенстве (4.7).

---

[1] Функция $S_{km}(\xi, \varphi)$ при четном m ограничена.

§ 5. **Частное решение уравнений цилиндрической оболочки при произвольно распределенной нагрузке конечной интенсивности.** Отправляясь от решения уравнений (1.3)* при элементарной или сосредоточенной нагрузке, можно получить решение этих уравнений при произвольно распределенной нагрузке конечной интенсивности.

Пусть на цилиндрическую оболочку действует нагрузка, составляющие которой $q_\nu(\xi, \varphi)$ — произвольные ограниченные интегрируемые функции. Положим, что длина оболочки равна $2l = 2Rl^\circ$ и что начало координат ξ, φ расположено посредине образующей. Разобьем поверхность S на бесконечно малые площадки со сторонами $2R\alpha$ и $2R\beta$. Рассмотрим какую-нибудь из этих площадок s. Обозначим координаты ее центра (в системе ξ, φ) через ξ' и φ'. Будем рассматривать нагрузку, которая действует на площадку s, как элементарную нагрузку с составляющими $4R^2\alpha\beta q_\nu$, где значения q_ν берутся в какой-нибудь точке площадки s. Этой нагрузке соответствуют[1] рассмотренные в [1] потенциальные функции $\Phi_\nu(\xi-\xi', \varphi-\varphi')$, которые определяются через функции $f_{\nu n}(\xi-\xi', \varphi-\varphi')$. Считая, что $\xi > \xi' + \alpha$ или $\xi < \xi' - \alpha$, имеем [согласно формулам (2.19)* и (2.18)]

$$2f_{\nu 0}(\xi-\xi') = \frac{\beta}{\sin\beta} f_{\nu 1}(\xi-\xi') = \frac{Ehk_\nu q_\nu}{8\pi(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2}\left[\left(\frac{1}{\varkappa^4}\cos\varkappa y e^{-\varkappa|y|} + \frac{1}{6}y^4\right)\operatorname{sgn} y\right]_{y=\xi-\xi'-\alpha}^{y=\xi-\xi'+\alpha}$$

$$\frac{\sin n\beta}{n\beta} \underset{(n>1)}{f_{\nu n}}(\xi-\xi') = \frac{3ER^2\beta k_\nu q_\nu}{2n^4(n^2-1)^2\pi(1-\sigma)(1-\sigma^2)h}\Big[\Big((R_{n1}\sin nA_{n1}|y| - R_n\cos nA_{n1}y)e^{-nB_{n1}|y|} + \\ + [R_{n2}\sin nA_{n2}|y| - (1-R_n)\cos nA_{n2}y]e^{-nB_{n2}|y|}\Big)\operatorname{sgn} y\Big]_{y=\xi-\xi'-\alpha}^{y=\xi-\xi'+\alpha}$$

Применяя к правым частям этих равенств теорему о среднем и используя введенные на стр. 160—161 обозначения $R_{n1}^{(1)}$, $R_{n2}^{(1)}$, $R_{n1}^{(2)}$, $R_{n2}^{(2)}$, можно представить написанные равенства в виде

$$2f_{\nu 0}(\xi-\xi') = \frac{\beta}{\sin\beta} f_{\nu 1}(\xi-\xi') = \frac{Eh\alpha\beta k_\nu q_\nu(\xi'', \varphi')}{2\pi(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2}\Big\{-\frac{1}{2\varkappa^3}[\sin\varkappa|\xi-\xi''| + \\ + \cos\varkappa(\xi-\xi'')]e^{-\varkappa|\xi-\xi''|} + \frac{|\xi-\xi''|^3}{3}\Big\} \tag{5.1}$$

$$\frac{\sin n\beta}{n\beta} \underset{(n>1)}{f_{\nu n}}(\xi-\xi') = \frac{3ER^2\alpha\beta k_\nu q_\nu(\xi'', \varphi')}{n^3(n^2-1)^2\pi(1-\sigma)(1-\sigma^2)h}\Big\{[R_{n1}^{(1)}\cos nA_{n1}(\xi-\xi'') + \\ + R_{n2}^{(1)}\sin nA_{n1}|\xi-\xi''|]e^{-nB_{n1}|\xi-\xi''|} + [R_{n1}^{(2)}\cos nA_{n2}(\xi-\xi'') + \\ + R_{n2}^{(2)}\sin nA_{n2}|\xi-\xi''|]e^{-nB_{n2}|\xi-\xi''|}\Big\} \tag{5.2}$$

---

[1] Принимая во внимание, что в § 2 статьи [1] начало координат было расположено в центре нагруженного элемента.

где

$$\xi' - \alpha < \xi'' < \xi' + \alpha$$

Рассматривая нагрузку, действующую на элемент s, как сосредоточенную (в точке (ξ', φ') этого элемента) нагрузку, придем к потенциальным функциям

$$\Phi_\nu(\xi - \xi', \varphi - \varphi') = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\nu n}^{00}(\xi - \xi') \cos n(\varphi - \varphi')$$

где на основании формул (1.1) — (1.4)

$$2f_{\nu 0}^{00}(\xi - \xi') = f_{\nu 1}^{00}(\xi - \xi') = \frac{Eh\alpha\beta k_\nu q_\nu(\xi', \varphi')}{2\pi(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2}\left\{-\frac{1}{2\varkappa^3}[\sin\varkappa|\xi - \xi'| + \right.$$

$$\left. + \cos\varkappa(\xi - \xi')] e^{-\varkappa|\xi - \xi'|} + \frac{|\xi - \xi'|^3}{3}\right\} \tag{5.3}$$

$$\underset{(n>1)}{f_\nu^{00}}(\xi - \xi') = \frac{3ER^2\alpha\beta k_\nu q_\nu(\xi', \varphi')}{n^3(n^2-1)^2\pi(1-\sigma)(1-\sigma^2)h}\left\{[R_{n1}^{(1)}\cos nA_{n1}(\xi - \xi') + \right.$$

$$+ R_{n2}^{(1)}\sin nA_{n1}|\xi - \xi''|] e^{-nB_{n1}|\xi - \xi'|} + [R_{n1}^{(2)}\cos nA_{n2}(\xi - \xi') +$$

$$\left. + R_{n2}^{(2)}\sin nA_{n2}|\xi - \xi'|] e^{-nB_{n2}|\xi - \xi'|}\right\} \tag{5.4}$$

Просуммируем при каждом фиксированном значении n величины $f_{\nu n}(\xi - \xi')\cos n(\varphi - \varphi')$ или величины $f_{\nu n}^{00}(\xi - \xi')\cos n(\varphi - \varphi')$, соответствующие всем бесконечно малым элементам s, полагая $2\alpha = d\xi'$, $2\beta = d\varphi'$.

Так как при этом суммировании формулы (5.1) и (5.2) отождествляются с формулами (5.3) и (5.4), то и в том и в другом случае получаем потенциальные функции $\Phi_\nu^\circ(\xi, \varphi)$ при распределенной нагрузке в виде

$$\Phi_\nu^\circ(\xi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{\nu n}^\circ(\xi, \varphi) \tag{5.5}$$

где

$$\Phi_{\nu 0}^\circ(\xi, \varphi) = \frac{Ehk_\nu}{16\pi(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-l^\circ}^{l^\circ} q_\nu(\xi', \varphi')\Psi(\xi, \xi')\,d\xi' \tag{5.6}$$

$$\Phi_{\nu 1}^\circ(\xi, \varphi) = \frac{Ehk_\nu}{8\pi(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2}\int_0^{2\pi}\cos(\varphi - \varphi')\,d\varphi' \int_{-l^\circ}^{l^\circ} q_\nu(\xi', \varphi')\Psi(\xi, \xi')\,d\xi' \tag{5.7}$$

$$\underset{(n>1)}{\Phi_{\nu n}^\circ}(\xi, \varphi) = \tag{5.8}$$

$$= \frac{3ER^2k_\nu}{4n^3(n^2-1)^2\pi(1-\sigma)(1-\sigma^2)h}\int_0^{2\pi}\cos n(\varphi - \varphi')\,d\varphi' \int_{-l^\circ}^{l^\circ} q_\nu(\xi', \varphi')\Psi_n(\xi, \xi')\,d\xi'$$

причем функции $\Psi(\xi,\xi')$ $\Psi_n(\xi,\xi')$ определяются равенствами

$$\Psi(\xi,\xi') = -\frac{1}{2\varkappa^3}\left[\sin\varkappa\,|\xi-\xi'| + \cos\varkappa(\xi-\xi')\right]e^{-\varkappa|\xi-\xi'|} + \frac{|\xi-\xi'|^3}{3}$$

$$\Psi_n(\xi,\xi') = \left[R_{n1}^{(1)}\cos nA_{n1}(\xi-\xi') + R_{n2}^{(1)}\sin nA_{n1}|\xi-\xi'|\right]e^{-nB_{n1}|\xi-\xi'|} +$$
$$+\left[R_{n1}^{(2)}\cos nA_{n2}(\xi-\xi') + R_{n2}^{(2)}\sin nA_{n2}|\xi-\xi'|\right]e^{-nB_{n2}|\xi-\xi'|}$$

Формулы (5.5) — (5.8) вместе с равенствами (2.1)* (после замены в них функций Φ_ν на Φ_ν°) определяют частное решение уравнений (1.3)* при произвольно распределенной нагрузке. Мы не будем обосновывать переход от конечных сумм к интегралам, совершенный при установлении формул (5.5) — (5.8) оставив тем самым полученное решение при произвольно распределенной нагрузке эвристическим.

Поступила 18 V 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Даревский В. М. К вопросу о действии на цилиндрическую оболочку некоторых нагрузок. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 5.
2. Работнов Ю. Н. Изгиб цилиндрической оболочки сосредоточенной силой. ДАН СССР. 1946. Т. 11. № 4.
3. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат. 1949. Стр. 333.
4. Shao Wen Juan. The cylindrical Shalls subjected to concentrated loods. Quarterly of applied Mathematics. 1946. Vol. IV. No 1.
5. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат. 1948. Стр. 403.
6. Лурье А. Н. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат. 1947.
7. Даревский В. М. К вопросу о действии на цилиндрическую оболочку сосредоточенной нагрузки. ДАН СССР. 1950. Т. XXV. № 1.
8. Даревский В. М. К вопросу о действии на цилиндрическую оболочку некоторых нагрузок. ДАН СССР. 1950. Т. XXV. № 2.
9. Лявв А. Математическая теория упругости. ОНТИ. НКТП СССР. 1935.