Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ОБ ОБЩЕЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Е. И. Ким

(Алма-Ата)

§ 1. Пусть S_0 — связная область, ограниченная гладкими, замкнутыми, не пересекающими друг друга контурами $L_0, L_1, \ldots, L_p$, из которых первый содержит внутри себя все остальные.

Положительным направлением на совокупности контуров $L_0, L_1, \ldots, L_p$ будет, как всегда, считаться то, которое оставляет S_0 слева. Обозначим через S_p область, заключенную внутри кривой L_q, через S — область $S_1 + \ldots + S_p$, через σ — область $(S_1 + \ldots + S_p) + (L_1 + \ldots + L_p)$. Часть плоскости, дополняющую $\sigma + L_0$ до полной плоскости, обозначим через σ^-. Выберем систему координат x, y так, чтобы их начало находилось в S_0.

Будем искать гармоническую функцию $u(x, y)$ в области S, непрерывную в σ и удовлетворяющую условиям

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = H_q \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e + f_q(s) \qquad \text{на } L_q \quad (q = 1, \ldots, p) \tag{1.1}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} a_{kj}(s) \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^{kj} \partial^{\nu j}}\right)_i = F(s) \qquad \text{на } L_0 \tag{1.2}$$

где H_q — заданные, бóльшие или равные нулю, постоянные числа, $f_q(s)$ $F(s)$ — заданные непрерывные функции дуги s, $a_{kj}(s)$ — известные функции, удовлетворяющие условию Липшица, и, кроме того,

$$\left| \sum_{j=0}^{k} (i)^j a_{mj}(s) \right| > 0 \tag{1.3}$$

Если $H_q = 1$, $f_q(s) \equiv 0$ $(q = 1, \ldots, p)$, то поставленная задача сводится к известной задаче, рассмотренной различными методами Ф. Д. Гаховым[1], И. Н. Векуа [2] и Д. И. Шерманом [3]. В данной работе будет применяться метод Д. И. Шермана.

Положим, что

$$\sum_{j=1}^{m} (i)^j a_{mj}(s) = a(s) + ib(s) \tag{1.4}$$

2*

Тогда, не уменьшая общности задачи, можно считать, что $a^2(s)+b^2(s)=1$ и, следовательно, существует вещественная функция $\omega(s)$ такая, что

$$a(s)=\cos\omega(s), \qquad b(s)=\sin\omega(s) \tag{1.5}$$

Предположим сначала, что при обходе L_0 функция $\omega(s)$ приобретает приращение $-2\pi n$, где n — целое положительное число или нуль.

В этом случае функцию $u(x, y)$ будем искать в следующем виде:

$$u(x, y)=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\mu(s)\operatorname{Re}\left\{i\,\frac{(t-z)^{m-1}}{a(s)+ib(s)}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)dt\right\}+$$
$$+\sum_{q=1}^{p}\frac{1}{\pi}\int_{L_q}\nu_q(s)\operatorname{Re}\left\{\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right\}ds+\operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{m+n}b_k z^k\right] \tag{1.6}$$

Под $\ln(1-z/t)$ условимся понимать ветвь, обращающуюся в нуль при $z=0$.

Если функция $u(x, y)$ — гармоническая в S, непрерывная в σ и если ее нормальная производная по внутренней нормали к кривой L_q относительно области S_0 претерпевает разрыв при переходе точки $M(x; y)$ через L_q, а ее производная порядка m непрерывна в S_0+L_0, то она представима в формуле (1.6), т. е. если такая функция известна в области σ, то в формуле (1.6) функции $\mu(s)$, $\nu_q(s)$ $(q=1,\ldots,p)$ и постоянные b_k $(k=0, 1,\ldots, m+n)$ (причем b_0 — вещественная постоянная) определяются однозначно.

В самом деле, на основании известной формулы имеем [4]

$$\nu_q(s)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i-\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e\right] \qquad \text{на } L_q \tag{1.7}$$

Таким образом, все функции $\nu_q(s)$ $(q=1,\ldots,p)$ определяются через известную функцию $u(x, y)$ по формуле (1.7).

Для определения функции $\mu(s)$ и постоянных b_q построим аналитическую функцию:

$$\varphi(z)=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{i}{\pi}\int_{L_0}\mu(s)\,\frac{(t-z)^{m-1}}{a(s)+ib(s)}\ln\left(1-\frac{z}{z}\right)dt+ \tag{1.8}$$
$$+\sum_{q=1}^{p}\frac{1}{\pi}\int_{L_q}\nu_q(s)\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\sum_{k=0}^{m+n}b_k z^k+ic$$

действительная часть которой равна $u(x, y)$.

В области σ^- построим вспомогательную функцию:

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\mu(s)}{a(s)+ib(s)}\,\frac{dt}{t-z} \tag{1.9}$$

Функция $\Phi(z)$ — голоморфна в области σ^- и обращается в нуль в бесконечности.

На основании формулы Племеля имеем

$$\mu(s) = (a(s) + ib(s))\left[-\frac{\Phi_e(t_0)}{2} + \frac{\varphi_i^{(m)}(t_0)}{2} + \right. \tag{1.10}$$

$$\left. + \frac{(-1)^m (m-2)!}{2\pi} \sum_{q=1}^{p} \int_{L_q} \frac{\nu_q(s)\, ds}{(t-t_0)^{m-1}} - \sum b_k'\, t_0^{k-m}\right]$$

где $b_k' = \frac{1}{2} k(k-1)\ldots(k-m+1)\, b_k$. Функция $\mu(s)$ еще не определяется по формуле (1.10), так как правая часть формулы (1.10) содержит функцию $\Phi_e(t_0)$, которая в свою очередь содержит искомую функцию $\mu(s)$ и неизвестные постоянные b_k' $(k = m, \ldots, m+n)$.

Обозначим через $\chi(z)$ функцию, регулярную в σ^-, действительная часть которой непрерывна на L_0 и равна $\omega(s) + \pi\theta$, где θ — полярный угол. Для определения функции $\Phi(z)$ имеем следующее граничное условие:

$$\operatorname{Im}\left\{e^{i\chi(t_0)}\left[-\frac{\Phi_e(t_0)}{2} - \sum_{k=m}^{m+n} b_k' t_0^{k-m-n}\right]\right\} + \tag{1.11}$$

$$+ \operatorname{Im}\left\{\frac{e^{i\chi(t_0)}}{2t_0^n}\left[\varphi_i^{(m)} - \frac{(-1)^m (m-2)!}{\pi} \sum_{q=1}^{p} \int_{L_q} \frac{\nu_q(s)\, ds}{(t-t_0)^{m-1}}\right]\right\} = 0$$

Через $\delta(z)$ обозначим регулярную функцию в σ^-, мнимая часть которой равна второму слагаемому и $\operatorname{Re}\{\delta(\infty)\} = 0$. Тогда

$$-\frac{\Phi(z)}{2} = \sum_{k=m}^{m+n} b_k' z^{k-m} - e^{-i\chi(z)} z^n [\delta(z) + c_0] \tag{1.12}$$

Все комплексные коэффициенты b_k' $(k = m, \ldots m+n)$ и c_0 определяются из условия [1], что $\Phi(\infty) = 0$.

Таким образом, функция $\mu(s)$ полностью определяется.

Для определения всех остальных постоянных b_k' и c_0 подставим найденную по формуле (1.10) функцию в (1.18) и разложим обе части в окрестности начала координат. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(k)}(0)\, z^k}{k!} = 2 \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{l} (-1)^{l+m} \frac{c_{(m-l)}}{(m-l)!\, l!\, (m-k)} z^l +$$

$$+ \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(k)}(0)\, z^k}{k!} + \sum_{k=0}^{m-1} b_k z^k + ic \tag{1.13}$$

---

[1] При этом b_{m+n} — действительное число или чисто мнимое в зависимости от того, отличается ли $\sin\{\operatorname{Re}\chi(\infty)\}$ от нуля или равен ему. Таким образом, в формуле (1.6) последняя сумма $b_0 + b_1 z + \cdots + b_{m+n} z^{m+n}$ содержит $2(m+n)$ постоянных.

где c_{m-e} — коэффициенты разложения функции $-\frac{1}{2}\Phi(z)$, а функция $\varphi_1(z)$ определяется формулой

$$\varphi_1(z)=\varphi(z)-\sum_{q=1}^{p}\frac{1}{\pi}\int_{L_q}\nu_q(s)\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковой степени z, можно определить все остальные коэффициенты b_k' $(k=0,1,\ldots,m-1)$ и c.

Этим самым доказана представимость искомой функции в виде (1.6).

Совокупность контуров $L_1,\ldots,L_p$ обозначим через L. Построим функции $f(s)$, $\nu(s)$ и $H(s)$, соответственно равные $f_q(s)$, $\nu_q(s)$ и $H_q(s)$ на контуре L_q. Тогда согласно (1.6)

$$u(x,y)=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{1}{\pi}\int_{L^0}\mu(s)\operatorname{Re}\left\{i\,\frac{(t-z)^{m-1}}{a(s)+ib(s)}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)dt\right\}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{L}\nu(s)\operatorname{Re}\left\{\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right\}ds+\operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{m+n}b_kz^k\right] \tag{1.14}$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i=\nu(s_0)+\frac{1}{\pi}\int_{L}\nu(s)\,\frac{\cos(n_{t_0}r_{t_0t})}{r_{t_0t}}\,ds_t+$$

$$+\frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!}\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\mu(s)\operatorname{Re}\left[\frac{N_m(t,t_0)\,e^{i\psi_0}\,dt}{a(s)+ib(s)}\right]+\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{m+n}kb_kt_0^{k-1}e^{i\psi_0}\right]$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e=-\nu(s_0)+\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\nu(s)\,\frac{\cos(n_{t_0}r_{t_0t})}{r_{t_0t}}\,ds_t+$$

$$+\frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!}\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\mu(s)\operatorname{Re}\left[\frac{N_m(t,t_0)\,e^{i\psi_0}\,dt}{a(s)+ib(s)}\right]+\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{m+n}kb_kt_0^{k-1}e^{i\psi_0}\right]$$

Здесь ψ_0 — угол касательной к кривой L_0 в точке t_0 и с положительным направлением оси x, r_{t_0t} — расстояние от точки t_0 до t; функция $N_m(t,t_0)$ определяется так:

$$N_m(t,t_0)=\begin{cases}t\,(t-t_0)^{m-2}\left[\ln(1-t_0/t)+1/(m+1)\right] & \text{для } m>1\\ i\,(t-t_0)^{-1} & \text{для } m=1\end{cases}$$

На основании условий (1.1) имеем интегральное уравнение

$$\nu(s_0)=\frac{H(s_0)-1}{H(s_0)+1}\,\frac{1}{\pi}\int_{L}\nu(s)\,\frac{\cos(n_{t_0}r_{t_0t})}{r_{t_0t}}\,ds_t+ \tag{1.15}$$

$$+\frac{H(s_0)-1}{H(s_0)+1}\,\frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!}\,\frac{1}{\pi}\int\mu(s)\operatorname{Re}\left[\frac{N_m(t,t_0)\,e^{i\psi_0}}{a(s)+ib(s)}\,dt\right]+$$

$$+\frac{H(S_0)-1}{H(S_0)+1}\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{m+n}kb_kt_0^{k-1}e^{i\psi_0}\right]+\frac{H(s_0)-1}{H(s_0)+1}f(s_0) \qquad (s_0 \text{ на } L)$$

Подставляя функцию $u(x, y)$ в граничное условие (1.2), получаем

$$\mu(\sigma_0) + \int\limits_{L_0} K(\sigma_0, s)\,\mu(s)\,ds + \int\limits_{L} K_1(\sigma_0, s)\,\nu(s)\,ds = F(\sigma_0) + \Omega(\sigma_0) \quad (\sigma_0 \text{ на } L) \tag{1.16}$$

Здесь

$$K(\sigma_0, s) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial \ln r}{\partial n_s} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{a(s) + ib(s)}\left[\sum_{j=1}^{m}(i)^{j+1}\frac{a_{mj}(s) - a_{mj}(\sigma_0)}{t - t_0}\right]\frac{dt}{ds} + \ldots\right\}$$

$$\Omega(\sigma_0) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} a_{kj}(\sigma_0)\frac{\partial^k g}{\partial\xi^{kj}\,\partial\eta^j}$$

$$g(\xi_0, \eta_0) = \mathrm{R}\left[\sum_{k=0}^{m+n} b_k\, t_0^{\,k}\right], \qquad r = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2} \qquad \begin{pmatrix} t \text{ на } L \\ t \text{ на } L_0 \end{pmatrix}$$

$$K_1(\sigma_0, s) = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} a_{kj}(\sigma_0)\,\mathrm{Re}\left[\frac{(k-1)!\,(i)^j}{(t - t_0)^k}\right]$$

причем многоточие в выражении для $K_0(\sigma_0, s)$ обозначает слагаемые, абсолютно интегрируемые на L_0.

Теперь перейдем к решению системы интегральных уравнений (1.15) и (1.16). Рассмотрим однородное интегральное уравнение для (1.16):

$$\nu(s_0) = \frac{H(s_0) - 1}{H(s_0) + 1}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\nu(s)\,\frac{\cos(n_{t_0} r_{t_0 t})}{r_{t_0 t}}\,ds_t \tag{1.17}$$

Когда $H(s) \equiv 0$, это уравнение имеет нетривиальное решение $\nu_0(s_0)$, так как союзное интегральное уравнение имеет решение, равное единице.

Следовательно, чтобы интегральное уравнение (1.15) было разрешимо относительно $\nu(s_0)$, необходимо и достаточно

$$\int\limits_{L}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-2)!}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_0}\mu(s)\,\mathrm{Re}\left[\frac{N_m(t, t_0)\,e^{i\psi_0}\,dt}{a(s) + ib(s)}\right]ds_{t_0} -$$

$$- \int\limits_{L}\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{m+n} k b_k t^{k-1} e^{i\psi_0}\right]ds_{t_0} - \int\limits_{L} f(s)\,ds = 0$$

Переставляя интегралы в первом слагаемом, имеем

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-2)!}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_0}\mu(s)\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{a + ib}\left(\int\limits_{L} N_m(t, t_0)\,dt_0\right)dt\right] -$$

$$- \mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{m+n} k b_k\int\limits_{L} t_0^{\,k-1}\,dt_0\right] - \int\limits_{L} f(s)\,ds = 0$$

Первые два слагаемые обращаются в нуль, так как t лежит вне $L_1, \ldots, L_p$, т. е. на L_0. Следовательно, в случае $H \equiv 0$ условием разрешимости уравнения (1.15) является

$$\int\limits_{L} f(s)\,ds = 0 \tag{1.18}$$

Резольвенту ядра $r_{t_0 t}^{-1}\cos(n_{t_0} r_{t_0 t})$ обозначим через $R(s_0, s)$. Тогда при соблюдении условия (1.18)

$$\nu(t_0) = \frac{1}{\pi}\int_L R(s_0, s)\left\{\frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!}\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\mu(s)\operatorname{Re}\left[\frac{N_m(t, t_1)e^{i\psi_1}dt}{a(s)+ib(s)}\right]+\right.$$

$$\left.+\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{m+n} kb_k t_1^{k-1}e^{i\psi_1}\right]+f(s_1)\right\}ds_1 + \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!}\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\mu(s)\operatorname{Re}\left[\frac{N_m(t, t_0)e^{i\psi_0}}{a(s)+ib(s)}dt\right]+$$

$$+\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{m+n} kb_k t_0^{k-1}e^{i\psi_0}\right]+f(s_0)+c\nu_0(s_0) \qquad (1.19)$$

Подставляя $\nu(s)$ в правую часть (1.16) и проделав преобразование интегралов, имеем для $\mu(s)$ окончательно интегральное уравнение:

$$\mu(\sigma_0)+\int_{L_0} K_2(\sigma_0, s)\mu(s)\,ds = F(\sigma_0)+\Omega_1(\sigma_0) \qquad (1.20)$$

Здесь

$$K_2(\sigma_0, s) = K(\sigma_0, s)+\operatorname{Re}\left\{\frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!\,\pi}\frac{1}{a(s)+ib(s)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{\pi}\int_L K_1(\sigma_0, s_2)\int_L R(s, s_1)N_m(t, t_1)dt_1\,dt_2+\int_L K(\sigma_0, s_2)N_m(t, t_2)\,dt_2\right]t'\right\}$$

$$\Omega_1(\sigma_0) = \Omega(\sigma_0)+\frac{1}{\pi}\int_L K_1(\sigma_0, s_2)\int_L R(s_2, s_1)\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{m+n} kb_k t_1^{k-1}\,dt_1\right]ds_2+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_L K_1(\sigma_0, s_2)\int_L R(t_2, t_1)f(s_1)\,ds_1, ds_2+\int_L K_1(\sigma_0, s_2)\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{m+n} kb_k t_2^{k-1}dt_2\right]+$$

$$+\int_L K(\sigma, s_2)f(s_2)\,ds_2+c\int_L K_1(\sigma_0, s_2)\nu_0(s_2)\,ds_2$$

Очевидно, что ядро $K_2(\sigma_0, s)$ регулярно, а функция $\Omega_1(\sigma_0)$ непрерывна.

Если однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (1.20), имеет r решений и если решения союзного однородного уравнения $\psi_1(\sigma_0), \ldots, \psi_r(\sigma_0)$, то уравнение (1.18) разрешимо только в случае, когда

$$\int_{L_0}[F(\sigma)+\Omega_1(\sigma)]\,\psi_q(\sigma)\,d\sigma = 0 \qquad (q = 1, \ldots, r) \qquad (1.21)$$

Система (1.21) является линейной относительно $b_k\ (k = 0, 1, \ldots, m+n)$ и произвольной постоянной c, фигурирующей в (1.19).

Если ранг матрицы системы (1.21) равен r^* и $r^* < r$, то система уравнений (1.21) неразрешима. Следовательно, интегральное уравнение (1.20), вообще говоря, неразрешимо. Для однородной задачи ($F(s)\equiv 0$, $f(s)\equiv 0$) система (1.21) — однородная; следовательно, она разрешима. Таким образом, однородная задача всегда разрешима и имеет $2(m+n)+1+r-r^*$ решений. Но если $r \leqslant 2(m+n)+1$ и $r = r^*$, то система (1.21) разрешима; следовательно, и неоднородная задача ($F \not\equiv 0$, $f(s)\not\equiv 0$) разрешима только в том случае, когда $\int_L f(s)\,ds = 0$.

Если же $F(s) \equiv 0$, то система (1.21) разрешима. Следовательно, неоднородная задача ($F(s) \equiv 0$, $f(s) \not\equiv 0$) будет разрешима и имеет $2(m+n)+1+r-r^*$ решений только при условии (1.18).

Теорема 1. В тех случаях, когда $H(s) \equiv 0$, однородная задача ($F(s) \equiv 0$, $f(s) \equiv 0$) всегда разрешима и имеет $2(m+n)+1+r-r^*$ линейно независимых решений. Неоднородная задача ($F(s) \not\equiv 0$ или $f(s) \not\equiv 0$), вообще говоря, неразрешима. Для того чтобы неоднородная задача была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы алгебраической системы (1.21) был равен r^* и выполнялось условие (1.18). В этом случае неоднородная задача также имеет $2(m+n)+1+r-r^*$ линейно независимых решений.

Теперь перейдем к исследованию случая, когда $H(s) \not\equiv 0$. В этом случае уравнение (1.17) имеет только тривиальное решение.

В самом деле, для каждого решения $\nu(t)$ уравнения (1.17) построим логарифмический потенциал $v(x, s)$ с плотностью $\nu(s)$, т. е.

$$v(x, y) = \int_L \nu(s) \ln r \, ds \tag{1.22}$$

Тогда

$$\begin{gathered} \nu(s_0) = -\frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i - \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e\right] \\ \int_L \frac{\nu(s)\cos(n_{t_0} r_{t_0 t})}{r_{t_0 t}} ds_t = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i + \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e\right] \end{gathered} \tag{1.23}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1.17), имеем граничную задачу для потенциала $v(x, y)$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i = \frac{1}{H(s)}\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e \tag{1.24}$$

Функция $v(x, y)$ непрерывна при переходе контура L. Следовательно, $v_i(x, y) = v_e(x, y)$. Из (1.24) имеем

$$H(s)\, v_i \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i = v_e \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e \tag{1.25}$$

Интегрируя это равенство по контуру L, используя известные формулы Грина [5]

$$\begin{gathered} \int_{L_q} v_i \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i ds = \iint_{s_q} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \\ \int_L v_e \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e ds = -\iint_{s_0+\sigma^-} \left[\left(\frac{\partial v^2}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \end{gathered}$$

получим

$$\sum_{q=1}^{p} k_q \iint_{s_q} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = -\iint_{s_0+\sigma^-} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \tag{1.26}$$

Последнее равенство противоречиво, если $v(x, y) \not\equiv \text{const}$. Следовательно, на основании (1.23) имеем $\nu(s_0) \equiv 0$.

Таким образом, неоднородное интегральное уравнение (1.15) разрешимо относительно $\nu(s_0)$ без дополнительного условия (1.18). Подставляя в (1.16) найденную функцию $\nu(s_0)$, получим снова уравнение (1.20), но только без последнего слагаемого, содержащего постоянное c. Таким образом, получим следующую теорему

Теорема 2. В тех случаях, когда $H(s)\not\equiv 0$, однородная задача $(F(s)\equiv 0,\ f(s)\equiv 0$ всегда разрешима и имеет $2(m+n)+r-r^*$ линейно независимых решений. Неоднородная задача ($F(s)\not\equiv 0$ или $f(s)\not\equiv 0$), вообще говоря, неразрешима. Для того чтобы неоднородная задача была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы (1.19) был равен r^*. Тогда неоднородная задача также имеет $2(m+n)+r-r^*$ линейно независимых решений.

§ 2. Предположим теперь, что при обходе L_0 функция $\omega(s)$ приобретает приращение $2\pi n\,(n>0)$, причем $m\geqslant n$. В этом случае решение будем искать также в виде (1.14).

Докажем представимость функции $u(x, y)$ в виде (1.14). Если известна функция $u(x, y)$, то функция $\nu(s)$ определяется по формуле (1.7).

Функция $\varphi(z)$, действительная часть которой равна $u(x, y)$, определяется формулой

$$\varphi(z)=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_0}\mu(s)\frac{(t-z)^{m-1}}{a(s)+ib(s)}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\nu(s)\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\sum_{k=0}^{m-n}b_k z^k+ic \tag{2.1}$$

Очевидно, что

$$\mu(s_0)=(a(s)+ib(s)\left[-\frac{\Phi e(t_0)}{2}+\frac{\varphi_i^{(m)}(t_0)}{2}+\frac{(-1)^m(m-2)!}{2\pi}\int\limits_{L}\frac{\nu(s)\,ds}{(t-t_0)^{m-1}}\right] \tag{2.2}$$

где $\Phi(z)$ — регулярная в σ^- и обращается в нуль в бесконечности. Для определения функции $\Phi(z)$ имеем граничное условие

$$\mathrm{Im}\left\{e^{i\chi(t_1)}t_0^{\,n}\left[-\frac{\Phi_e(t_0)}{2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{c_k}{t_0^{\,k}}\right]\right\}+ \qquad (t_0 \text{ на } L_0)$$

$$+\mathrm{Im}\left\{e^{i\chi(t_0)}t_0^{\,n}\left[\frac{\varphi_i^{(m)}(t_0)}{2}+\frac{(-1)^m(m-2)!}{2\pi}\int\limits_{L}\frac{\nu(s)\,ds}{(t-t_0)^{m-1}}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{c_k}{t_0^{\,k}}\right]\right\}=0 \tag{2.3}$$

где $\chi(z)$ — регулярная в σ^- функция с равной $\omega(s)-n\theta$ на L_0 вещественной частью, c_k — пока произвольные постоянные, которые подлежат определению.

Через $\delta(z)$ обозначим функцию, регулярную в σ^-, мнимая часть которой равна второму слагаемому в (2.3) на L_0 и $\mathrm{Re}\{\delta(\infty)\}=0$. Тогда функция $\Phi(z)$ определяется формулой

$$-\frac{\Phi(z)}{2}=e^{-i\chi(z)}\frac{c_0-\delta(z)}{z^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{c_k}{z^k} \tag{2.4}$$

где c_0 — постоянное число, которое также подлежит определению.

Для определения неизвестных коэффициентов b_k, c_k, c и c_0 подставим функцию $\mu(s_0)$ в (2.1) и затем, разлагая функцию $\varphi_1(z)$ в окрестности начала координат, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(k)}(0)}{k!} z^k = \tag{2.5}$$

$$= 2 \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{l} (-1)^{l+m} \frac{c_{m-l}}{(m-l)!\, l!\, (m-k)} z + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(k)}(0)}{k!} z^k + \sum_{k=0}^{m-n} b_k z^k + ic$$

Из этого уравнения, считая b_0 вещественным, а b_{m-n} вещественным или чисто мнимым, смотря по тому, будет ли $\sin\{\operatorname{Re}\chi(\infty)\}$ отличен или равен нулю, найдем сначала $c_k\,(k=1, \ldots, n-1)$, а затем все остальные b_k, c и c_0. Этим самым мы доказали представимость функции $u(x, y)$ в форме (1.14).

Подставляя функцию $u(x, y)$, определенную по (1.14), в (1.1) и (1.2), получаем систему интегральных уравнений:

$$\nu(s_0) = \frac{H(s_0)-1}{H(s_0)+1} \frac{1}{\pi} \int_L \nu(s) \frac{\cos(n_{t_0} r_{t_0 t})}{r_{t_0 t}} ds_t +$$

$$+ \frac{H(s_0)-1}{H(s_0)+1} \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} \frac{1}{\pi} \int_{L_0} \mu(s_0) \operatorname{Re}\left[\frac{N_m(t, t_0)\, e^{i\psi_0} dt}{a(s)+ib(s)}\right] +$$

$$+ \frac{H(s_0)-1}{H(s_0)+1} \operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{m-n} k b_k t_0^{\,k-1} e^{i\psi_0}\right] + \frac{H(s_0)-1}{H(s_0)+1} f(s_0) \tag{2.6}$$

$$\mu(\sigma_0) + \int_{L_0} K(\sigma_0, s)\, \mu(s)\, ds + \int_L K_1(\sigma_0, s)\, \nu(s)\, ds = F(\sigma_0)$$

где $K(\sigma_0, s)$ и $K_1(\sigma_0, s)$ — ядра, аналогичные ядру предыдущего параграфа.

Повторяя рассуждения, изложенные в предыдущем параграфе, имеем следующие теоремы.

Теорема 3. В тех случаях, когда $H(s) \equiv 0$, однородная задача ($F(s) \equiv 0$, $f(s) \equiv 0$) всегда разрешима и она имеет $2(m-n)+1+r-r^*$ линейно независимых решений. Неоднородная задача ($F(s) \not\equiv 0$ или $f(s) \not\equiv 0$), вообще говоря, неразрешима. Для того чтобы неоднородная задача была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы алгебраической системы, аналогичной системе (1.21), равнялся r^* и выполнялось условие (1.18). В этом случае неоднородная задача также имеет $2(m-n)+r-r^*$ линейно независимых решений.

Теорема 4. В тех случаях, когда $H(s) \not\equiv 0$, однородная задача всегда разрешима и она имеет $2(m-n)+r-r^*$ линейно независимых решений, а неоднородная задача разрешима только в том случае, когда ранг расширенной матрицы равен r^* и выполнялось условие (1.18). При соблюдении этих условий неоднородная задача имеет $2(m-n)+r-r^*$ линейно независимых решений.

§ 3. Допустим, что при обходе контура L_0 функция $\omega(s)$ приобретает приращение $2\pi n$, но $n > m$. В этом случае будем искать решение в виде

$$u(x, y) = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{1}{\pi} \int_{L_0} \mu(s) \operatorname{Re}\left\{i \frac{(t-z)^{m-1}}{a(s)+ib(s)} \ln\left(1-\frac{z}{t}\right) dt\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{L} \nu(s) \operatorname{Re}\left\{\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right\} ds + A \tag{3.1}$$

При этом A равен $\operatorname{Re}(iB)$ или $\operatorname{Re}(B)$, где

$$B = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \mu(s) \frac{t^{n-1}}{a(s)+ib(s)} ds \tag{3.2}$$

в зависимости от того, будет ли $\sin\{\operatorname{Re}\chi(\infty)\}$ отличен или равен нулю.

Поступая, как выше, придем к равенству (2.4) и вместо соотношения (2.5) получим следующее:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(k)}(0) z^k}{k!} = 2 \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{l} (-1)^{l+m} \frac{c_{m-l} z^l}{(m-l)!\, l!\, (m-k)} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(k)}(0) z^k}{k!} + A + ic \tag{3.3}$$

Отсюда найдем постоянные c_k $(k = 1, \ldots, m-1)$, c и c_0. (Заметим, что c_0 — постоянная, фигурирующая в (2.4), и, следовательно, связана с A.)

Все остальные постоянные c_k $(k = m, m+1, \ldots, n-1)$ остаются произвольными и, следовательно, $\mu(s)$ зависит от $2(n-m)$ постоянных.

Далее, подставляя функцию $u(x, y)$, определяемую формулой (3.1), в (1.1) и (1.2), получаем систему интегральных уравнений:

$$\nu(s_0) = \frac{H(s_0)-1}{H(s_0)+1} \frac{1}{\pi} \int_{L} \nu(s) \frac{\cos(n_{t_0} r_{t_0 t})}{r_{t_0 t}} ds_t +$$

$$+ \frac{H(s_0)-1}{H(s_0)+1} \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} \frac{1}{\pi} \int_{L_0} \mu(s) \operatorname{Re}\left[\frac{N_m(t, t_0)\, e^{i\psi_0}\, dt}{a(s)+ib(s)}\right] + \frac{H(s_0)-1}{H(s_0)+1} f(s_0) \tag{3.4}$$

$$\mu(\sigma_0) + \int_{L_0} K(\sigma_0, s)\, \mu(s)\, ds + \int_{L} K_1(\sigma_0, s)\, \nu(s)\, ds = F(\sigma_0) \tag{3.5}$$

где $K(\sigma_0, s)$ и $K_1(\sigma_0, s)$ — ядро, аналогичное ядру в (1.16).

Если $H(s) \not\equiv 0$, то уравнение (3.4) разрешимо относительно $\nu(s_0)$ и решение принимает вид:

$$\nu(s_0) = \frac{1}{\pi} \int_{L} R(s_0, s_1) \left\{\frac{H(s_1)-1}{H(s_1)+1} \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} \frac{1}{\pi} \int_{L_0} \mu(s) \operatorname{Re}\left[\frac{N_m(t, t_1)\, e^{i\psi_0}}{a(s)+ib(s)} dt\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{H(s_1)-1}{H(s_1)+1} f(s_1)\right\} ds_1 + \frac{H(s_0)-1}{H(s_0)+1} \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} \frac{1}{\pi} \int_{L_0} \mu(s) \operatorname{Re}\left[\frac{N_m(t, t_0)\, e^{i\psi_0}}{a(s)+ib(s)} dt\right] +$$

$$+ \frac{H(s_0)-1}{H(s_0)+1} f(s_0) \tag{3.6}$$

где $R(s_0, s_1)$ — резольвента ядра

$$\frac{H(s_0)-1}{H(s_0)+1} \frac{\cos(n_t r_{t t_0})}{r_{t t_0}}$$

Подставляя найденную функцию $\nu(s_0)$ в (3.5), имеем

$$\mu(\sigma_0) + \int_{L_0} K_2(\sigma_0, s)\,\mu(s)\,ds = F(\sigma_0) + \Omega_1(\sigma_0) \tag{3.7}$$

где

$$K_2(\sigma_0, s) = K(\sigma_0, s) + \frac{H(s_1)-1}{H(s_1)+1}\,\frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{a(s)+ib(s)}\left[\frac{1}{\pi}\int_L K_1(\sigma_0, s_2)\,\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_L R(s_2, s_1)\,N_m(t, t_1)\,dt_1 dt_2 + \int_L K(\sigma_0, s_2)\,N_m(t, t_2)\,dt_2\right] t'\right\} \tag{3.8}$$

$$\Omega_1(\sigma_0) = \frac{1}{\pi}\int_L K_1(\sigma_0, s_2)\int_L R(t_2, t_1)\,\frac{H(s_1)-1}{H(s_1)+2}\,f(s_1)\,ds_1 ds_2 +$$

$$+\int_L K_1(\sigma_0, s_1)\,\frac{H(s_1)-1}{H(s_1)+1}\,f(s_1)\,ds_1 \tag{3.9}$$

Пусть однородное интегральное уравнение для (3.7), т. е. (3.7) с правой частью, равной нулю, имеет r решений $\mu_1(\sigma_0), \ldots, \mu_r(\sigma_0)$ и пусть $\psi_1(\sigma_0), \ldots, \psi_r(\sigma_0)$ есть решения союзного для однородного интегрального уравнения; тогда уравнение (3.7) разрешимо только при условиях

$$\int_{L_0} (F(\sigma) + \Omega_1(\sigma))\,\psi_k(\sigma)\,d\sigma = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{3.10}$$

При соблюдении последних условий уравнение (3.7) имеет решение

$$\nu(\sigma_0) = -\int_{L_0} R_2(\sigma_0, s)\,[F(s) + \Omega_1(s)]\,ds + F(\sigma_0) + \Omega_1(\sigma_0) +$$

$$+\gamma_1\mu_1(\sigma_0) + \gamma_2\mu_2(\sigma_0) + \ldots + \gamma_r\mu_r(\sigma_0)]\,d\sigma \tag{3.11}$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ — произвольные постоянные, $R_2(\sigma_0, s)$ — резольвента ядра $K_2(\sigma_0, s)$. Число производных постоянных в (3.11) не может быть меньше $2(n-m)$, следовательно, $r \geqslant 2(n-m)$.

Если бы функции μ_k не удовлетворяли уравнению

$$[\varphi_1^{(m)}(z)]_i = 0 \quad \text{на} \quad L_0 \tag{3.12}$$

где

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int_L \nu(s)\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds =$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\,\frac{i}{\pi}\int_{L_0}\mu(s)\,\frac{(t-z)^{m-1}}{a(s)+ib(s)}\,\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)dt + A$$

то функция $\varphi_1(z)$ зависела бы от r произвольных постоянных. Следовательно, функция $\mu(\sigma_0)$ на основании (2.2) зависела бы от $2(n-m)+r$ произвольных постоянных. Поэтому $2(n-m)$ функций из функций $\mu_1(\sigma_0), \ldots, \mu_r(\sigma_0)$ должны удовлетворять уравнению (3.12), т. е. должны иметь место следующие равенства:

$$\frac{\mu_k(s_0)}{a(s_0)+ib(s_0)} + \frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\mu_k(s)}{a(s)+ib(s)}\,\frac{dt}{t-t_0} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, 2(n-m)) \tag{3.13}$$

Таким образом, мы имеем следующую теорему.

Теорема 5. В случае, когда $n > m$ и $H(s_0) \not\equiv 0$, задача (однородная и неоднородная) вообще неразрешима, задача разрешима при соблюдении условий (3.10) и (3.13) и имеет решение, зависящее от r произвольных постоянных.

Если $H(s_0) \equiv 0$, то уравнение (3.4) разрешимо относительно $\nu(s_0)$ при условии (1.18) и решение принимает вид:

$$\nu(s_0) = \frac{1}{\pi}\int_L R(s_0, s_1)\left\{\frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!}\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\mu(s)\,\mathrm{Re}\left[\frac{N_m(t, t_1)e^{i\psi_1}dt}{a(s)+ib(s)}\right] + f(s_1)\right\}ds_1 + $$
$$+ \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!}\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\mu(s)\,\mathrm{Re}\left[\frac{N_m(t, t_0)\,e^{i\psi_0}dt}{a(s)+ib(s)}\right] + f(s_0) + \gamma_0\nu_0(s_0) \qquad (3.14)$$

где $\nu_0(s_0)$ — решение соответствующего однородного уравнения, γ_0 — произвольное постоянное.

Подставляя найденную функцию $\nu(s_0)$ в (3.5), имеем

$$\mu(\sigma_0) + \int_{L_0} K_2(\sigma_0, s)\,\mu(s)\,ds = F(\sigma_0) + \Omega_1(\sigma_0) + \gamma_0\int_L K_1(\sigma_0, s)\,\nu_0(s)\,ds \qquad (3.15)$$

Последнее уравнение разрешимо, если

$$\int_{L_0}\left[F(\sigma) + \Omega_1(\sigma) + \gamma_0\int_L K_1(\sigma, s)\,\nu_0(s)\,ds\right]\psi_k(\sigma)\,d\sigma = 0 \qquad (3.16)$$

Если равенство (3.16) имеет место при любом γ_0, то решение уравнения (3.15) зависит от $r+1$ произвольных постоянных, а если равенство (3.16) имеет место при выбранном γ_0, то решение зависит от r произвольных постоянных.

В этом случае выбором γ_0 можно уменьшить число условий. Таким образом, имеем следующую теорему.

Теорема 6. В случае, когда $n > m$ и $H(s_0) \equiv 0$, задача (однородная и неоднородная), вообще говоря, неразрешима. Задача разрешима только при соблюдении условий (1.18), (3.16) и (3.13) и имеет решение, зависящее от $r+1$ произвольных постоянных, если (3.16) имеет место при любом γ_0, а при выбранном γ_0 решение задачи зависит от r произвольных постоянных.

Поступила 3 IV 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Линейные кривые задачи теории функции комплексной переменной. Известия Казанского физико-математического общества. 1938. Т. X. Сер. 3.
2. Векуа И. Н. Об одной линейной граничной задаче Римана. Труды Тбилисского математического института. 1942. Т. XI.
3. Шерман Д. И. К общей задаче теории потенциала. Известия Академии Наук СССР, сер. математическая. 1946. Т. 10. № 2.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. ОГИЗ. 1946.
5. Гурса Э. Курс математического анализа. 1938. Т. III. Ч. 2.