Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

К ТЕОРИИ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

С. Н. Шиманов

(Свердловск)

В настоящей статье рассматривается метод вспомогательных систем отыскания периодических решений для линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, мало отличающимися от постоянных величин. Этот метод применяется для интегрирования и отыскания характеристических показателей линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, мало отличающимися от постоянных величин.

§ 1. Постановка задачи. Будем искать периодическое решение (или решения) следующей системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (a_{si} + \mu p_{si}(t, \mu))\, x_i + f_s(t, \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь a_{si} — постоянные, p_{si} и f_i — периодические и непрерывные функции t с периодом 2π, разлагающиеся в ряды Фурье. По отношению к μ функции p_{si} и f_s предполагаются аналитическими в области $|\mu| \leqslant \mu^*$, где μ^* — положительное число.

Задача такого рода встречается как при изучении колебаний некоторых физических систем (колебания в спарниках ведущей системы электровоза, крутильные колебания коленчатых валов [1, 2]), так и при отыскании периодических решений методом малого параметра для нелинейных систем [3]. Наконец, к этой задаче приводится задача отыскания характеристических показателей.

Действительно, из общей теории однородных уравнений с периодическими коэффициентами хорошо известно, что каждому характеристическому показателю α всегда соответствует решение вида

$$x_s = e^{\alpha t} \varphi_s(t, \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

где $\varphi_s(t, \mu)$ — периодические функции t периода 2π. Сделаем замену переменных:

$$x_s = e^{\alpha t} z_s$$

где α — неопределенная постоянная, z_s — новые переменные. Чтобы найти частное решение (1.2), надо найти периодическое решение уравнений в новых переменных z. Из условия существования периодического решения найдется характеристический показатель.

Уравнения (1.1) являются частным случаем так называемых квазилинейных систем. Однако, к сожалению, теория, разработанная для отыскания периодических решений таких систем [3], не всегда может быть применена к уравнениям (1.1) в наиболее интересном случае резонанса.

Будем искать периодическое решение уравнений (1.1), следуя упомянутой выше теории. При этом могут представиться два случая.

1. Первый случай, когда корни характеристического уравнения системы (1.1) при $\mu = 0$

$$\| a_{si} - \delta_{si}\lambda \| = 0 \tag{1.3}$$

отличны от критических (корни отличны от нуля и чисел типа $\pm N\sqrt{-1}$. где N — целое число). Этот случай называется нерезонансным. В этом случае теория отыскания периодических решений, развитая для квазилинейных систем, применима без всяких ограничений.

Периодическое решение согласно этой теории ищем в виде рядов

$$x_s(t, \mu) = x_s^{(0)}(t) + \mu x_s^{(1)}(t) + \mu^2 x_s^{(2)}(t) + \cdots \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

расположенных по целым положительным степеням параметра μ. Эти ряды будут определены единственным образом. Они будут сходиться при достаточно малой величине $|\mu|$.

2. Второй случай, когда среди корней характеристического уравнения (1.3) имеются критические. Этот случай называется резонансным. При рассмотрении этого случая вводятся по сути дела два условия: (а) система (1.1) при $\mu = 0$ имеет периодические решения или решение, так называемое порождающее, (б) особый определитель отличен от нуля [3].

Ясно, что условие (а) не является ограничением для линейных уравнений (1.1). В уравнениях (1.1) всегда можно заменить функции $f_s(t, \mu)$ на $\mu f_s(t, \mu)$. Полученная система при наличии критических корней и при $\mu = 0$ будет иметь периодические решения. Если при этом условие (б) окажется выполненным, то периодическое решение найдем в виде рядов

$$x_s(t, \mu) = x_s^{(0)}(t) + \mu x_s^{(1)}(t) + \cdots,$$

коэффициенты которых будут периодическими функциями t. Ряды будут сходиться при достаточно малой величине $|\mu|$. Поделив на μ найденные функции, составляющие периодическое решение новой системы, получим периодическое решение исходных уравнений (1.1).

Таким образом, если можно воспользоваться квазилинейной теорией отыскания периодических решений, то разложения в ряд функций, составляющих периодическое решение уравнений (1.1), будет иметь полюсы не выше первого порядка.

Но можно привести сколько угодно примеров, когда периодическое решение системы типа (1.1) имеет полюсы выше первого порядка.

Возьмем уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \mu\, x \cos t + a \cos t \tag{1.4}$$

Это уравнение типа (1.1) в случае резонанса. Покажем, что оно не имеет периодического решения, которое бы разлагалось в ряды по целым степеням параметра μ, с полюсом не выше первого порядка. Допустим противное. Допустим, что существует такое решение. Тогда уравнение (1.4) можно удовлетворить рядом вида

$$x(t,\mu) = x_{-1}\frac{1}{\mu} + x_0 + x_1\mu + \cdots$$

где x_{-1}, x_0, $x_1, \ldots,$ — периодические функции t с периодом 2π. Подставив этот ряд в (1.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ, получим уравнения для отыскания периодических функций x_{-1}, $x_0, x_1, \ldots$

$$\frac{d^2x_{-1}}{dt^2} + x_{-1} = 0, \quad \frac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 = x_{-1}\cos t + a\cos t, \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = x_0\cos t, \ldots$$

Из первого уравнения находим $x_{-1} = A\cos t + B\sin t$, где A, B — произвольные постоянные. Вставив во второе уравнение, получаем уравнение для определения периодической функции x_0:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 = \frac{1}{2}A(1+\cos 2t) + \frac{1}{2}B\sin 2t + a\cos t$$

Полученное уравнение никогда не имеет периодического решения, каковы бы ни были постоянные A и B. Таким образом, очевидно, что условие (б) не имеет места для уравнения (1.3). Однако, как мы покажем ниже, это уравнение имеет периодическое решение с полюсом не первого, а второго порядка. Число подобных примеров может быть неограниченно увеличено. Можно привести примеры уравнений типа (1.1), которые имеют периодические решения с полюсами третьего четвертого и более высоких порядков. Эти примеры показывают, что уравнения (1.1) нуждаются в дополнительном исследовании.

В настоящей работе для изучения вопроса о существовании и отыскании периодических решений (или решения) уравнений (1.1) применяем новый метод, идея которого состоит в следующем.

Допустим, что уравнение (1.2) имеет k корней, равных нулю (с простыми элементарными делителями), и что остальные l корней некритические[1]. Тогда наша система (1.1) при помощи некоторого линейного неособого преобразования с постоянными коэффициентами может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} &= \mu(p_{s1}u_1 + \cdots + p_{sk}u_k + p_{s,k+1}v_1 + \cdots + p_{s,k+l}v_l) + F_s(t,\mu) \\ \frac{dv_j}{dt} &= c_{j1}v_1 + \cdots + c_{jl}v_l + \mu(p_{k+j1}u_1 + \cdots + p_{k+j,k+l}v_l) + F_{j+k}(t,\mu) \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$(s = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, l;\ k + l = n)$$

Здесь $c_{j1}, \ldots, c_{jl}$ — постоянные, p, F — линейные комбинации соответствующих функций в системе (1.1), т. е. они являются непрерывными и периодическими функциями t с периодом 2π и аналитическими функциями параметра μ в той же области $|\mu| \leqslant \mu^*$. Корни характеристического уравнения

$$\| c_{j\sigma} - \delta_{j\sigma}\lambda \| = 0$$

отличны от критических.

---

[1] Как показано в § 4 этой статьи, случай простых корней $\pm N\sqrt{-1}$ (N — целое число) приводится к рассматриваемому случаю.

Добавим к правым частям первых k уравнений (1.5) постоянные $W_1, \ldots, W_k$ и постараемся подобрать их так, чтобы система (1.5) с добавленными постоянными имела аналитическое относительно μ периодическое решение с произвольными, наперед заданными начальными значениями $\beta_1, \ldots, \beta_k$ величин $u_1, \ldots, u_k$. При этом получим семейство периодических решений, зависящее от $\beta_1, \ldots, \beta_k$, μ, и соответствующие ему постоянные $W_1, \ldots, W_k$, которые будут зависеть также от $\beta_1, \ldots, \beta_k, \mu$.

Постараемся подобрать $\beta_1, \ldots, \beta_k$ так, чтобы были выполнены условия

$$W_s(\beta_1, \ldots, \beta_k, \mu) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{1.6}$$

Периодические решения найденного нами семейства, соответствующие значениям $\beta_1, \ldots, \beta_k$, определенным из уравнений (1.6), будут периодическими решениями исходной системы.

Ниже в § 2—3 показано, что условия (1.6) будут необходимыми и достаточными условиями существования периодического решения системы (1.5). Далее в § 4 показано, что постоянные $W_1, \ldots, W_k$ могут быть вычислены с любой степенью точности вместе с соответствующим им семейством периодических решений. Наконец, в последнем параграфе рассмотрен вопрос об интегрировании однородных уравнений (1.1), о вычислении для них характеристических показателей.

§ 2. Метод вспомогательных систем. Пусть имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} &= \mu\,(p_{s1}u_1 + \cdots + p_{sk}u_k + p_{s,\,k+1}v_1 + \cdots + p_{s,\,k+l}v_l) + f_s(t, \mu) \\ \frac{dv_j}{dt} &= c_{j1}v_1 + \cdots + c_{jl}v_l + \mu\,(p_{j+k,1}u_1 + \cdots + p_{j+k,\,k}u_k + p_{j+k,\,k+1}v_1 + \\ &\quad + \cdots + p_{j+k,\,k+l}v_l) + f_{j+k}(t, \mu) \qquad (s = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, l) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь функции p_{si} и f_s — периодические и непрерывные функции t с периодом 2π, разлагающиеся в ряд Фурье, и аналитические функции μ в области $|\mu| < \mu^*$, где μ^* — положительное число; c_{jh} $(j, h = 1, \ldots, l)$ — постоянные величины такие, что характеристическое уравнение

$$\| c_{jh} - \delta_{jh}\lambda \| = 0 \tag{2.2}$$

не имеет ни корней, равных нулю, ни корней вида $\pm\sqrt{-1}$ (где N — целое число). Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dz_s}{dt} &= \mu\Big(\sum_{r=1}^{k} p_{sr}z_r + \sum_{r=k+1}^{k+l} p_{sr}y_{r-k}\Big) + f_s(t, \mu) + W_s \\ \frac{dy_j}{dt} &= \sum_{\sigma=1}^{l} (c_{j\sigma} + \mu p_{k+j,\,k+\sigma})\,y_\sigma + \sum_{r=1}^{k} p_{k+j,\,r}z_r + f_{j+k}(t, \mu) \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, k \\ j = 1, \ldots, l \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

которую будем называть вспомогательной системой. Новая система (2.3) отличается от первоначальной системы (2.1) тем, что к первым k уравнениям последней добавлены k постоянных величин $W_1, \ldots, W_k$.

Выберем решение системы (2.3), определенное начальными условиями

$$z_s\big|_{t=0} = \beta_s, \qquad y_j\big|_{t=0} = \beta_{k+j} \qquad (s = 1, \ldots, k;\; j = 1, \ldots, l) \tag{2.4}$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \beta_{k+1}, \ldots \beta_{k+l}$ — произвольные постоянные.

Теорема. Задав произвольно значения величин $\beta_1, \ldots, \beta_k$ в начальных условиях (2.4), можно подобрать единственным образом значения остальных величин $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_{k+l}$ в этих условиях и значения постоянных $W_1, \ldots, W_k$ системы (2.3) так, что соответствующее частное решение будет периодическим с периодом 2π.

Это периодическое решение будет линейной функцией $\beta_1, \ldots, \beta_k$. Коэффициенты при $\beta_1, \ldots, \beta_k$ будут аналитическими функциями μ во всей области $|\mu| \leqslant \mu^*$, за исключением некоторого числа точек. В частности, они будут аналитическими в точке $\mu = 0$. Свободные члены будут тоже аналитическими функциями во всей области $|\mu| \leqslant \mu^*$.

Если рассматриваемое частное решение системы (2.3) будет $z_1^*, \ldots, z_k^*$, $y_1^*, \ldots, y_l^*$, то постоянные $W_1, \ldots, W_k$ определяются формулами

$$W_s = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{\mu\,(p_{s1}z_1^* + \cdots + p_{s,\,k+l}y_l^*) + f_s(t, \mu)\}\,dt$$

Доказательство. Так как система (2.3) линейна, то частное решение, определенное начальными условиями (2.4), будет являться линейной функцией $\beta_1, \ldots, \beta_{k+l}$.

Это решение мы можем представить в виде

$$z_s = \sum_{r=1}^{k+l} A_{s,\,r}\beta_r + \sum_{r=1}^{k} B_{sr}W_r + D_s,\quad y_j = \sum_{r=1}^{k+l} C_{jr}\beta_r + \sum_{r=1}^{k} B_{k+jr}W_r + D_{j+k} \tag{2.5}$$
$$(s = 1, \ldots, l;\; j = 1, \ldots, k)$$

Здесь:

1) функции A и C образуют фундаментальную систему решений однородных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{dA_{sh}}{dt} = \mu\,(p_{s1}A_{1h} + \cdots + p_{sk}A_{kh} + p_{s,\,k+1}C_{1h} + \cdots + p_{s,\,k+l}C_{lh})\\ \frac{dC_{jh}}{dt} = \sum_{r=1}^{l} c_{jr}C_{rh} + \mu\,(p_{k+j1}A_{1h} + \cdots + p_{k+j,\,k+l}C_{lh})\\ (s = 1, \ldots, k;\; j = 1, \ldots, l;\; h = 1, \ldots, k+l)\end{gathered} \tag{2.6}$$

определяемую начальными условиями

$$A_{sh}\big|_{t=0} = \delta_{sh}, \qquad C_{jh}\big|_{t=0} = \delta_{j+k,\,h} \tag{2.7}$$

где δ_{sh} — символ Кронекера ($\delta_{sh} = 0$ при $s \neq h$ и $\delta_{sh} = 1$ при $s = h$);

2) функции

$$\sum_{r=1}^{k} B_{sr}W_r + D_s, \qquad \sum_{r=1}^{k} B_{k+j,\,r}W_r + D_{k+j} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, k\\ j = 1, \ldots, l\end{pmatrix}$$

образуют частное решение системы (2.3). Они при $t=0$ обращаются в нуль. При этом D_s, D_{j+k} удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dD_s}{dt}=\mu\sum_{r=1}^{k+l}p_{sr}D_r+f_s(t,\mu)$$

$$\frac{dD_{k+j}}{dt}=c_{j1}D_{k+1}+\cdots+c_{jl}D_{k+l}+\mu\sum_{r=1}^{k+l}p_{k+j,\,r}D_r+f_{k+j}(t,\mu) \qquad \begin{pmatrix} s=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,l \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

и начальным условиям

$$D_r\Big|_{t=0}=0 \qquad (r=1,\ldots,k+l) \qquad (2.9)$$

а функции B_{sg} и $B_{j+k,\,g}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dB_{sg}}{dt}=\mu\sum_{r=1}^{k+l}p_{sr}B_{rg}+\delta_{sg}, \qquad \frac{dB_{k+j,\,g}}{dt}=\sum_{\sigma=1}^{l}c_{j\sigma}B_{k+\sigma,\,g}+\mu\sum_{r=1}^{k+l}p_{k+j,\,r}B_{rg} \qquad (2.10)$$

$$(s=1,\ldots,k;\ \ j=1,\ldots,l;\ \ g=1,\ldots,k)$$

и начальным условиям

$$B_{rg}\Big|_{t=0}=0 \qquad (r=1,\ldots k+l;\ \ g=1,\ldots,k) \qquad (2.11)$$

Функции A, B, C, D определяются интегрированием уравнений (2.6)—(2.10). Так как коэффициенты уравнений (2.6),(2.8) и (2.10) — аналитические функции относительно параметра μ в области $|\mu|\leqslant\mu^*$, то в силу известных свойств линейных дифференциальных уравнений такими же будут и функции A, B, C и D.

Для того чтобы частное решение системы (2.3), определяемое начальными условиями (2.4), было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены равенства

$$\begin{aligned} &z_s(2\pi\beta,\mu,w)-z_s(0,\beta,\mu,w)=0 \\ &y_j(2\pi,\beta,\mu,w)-y_j(0,\beta,\mu,w)=0 \end{aligned} \qquad (2.12)$$

Подставив в формулы (2.12) выражения (2.5) для функций z_s и y_s при $t=0$ и $t=2\pi$, получим

$$\sum_{r=1}^{k+l}A_{sr}(2\pi)\beta_r+\sum_{\sigma=1}^{k}B_{s\sigma}(2\pi)W_\sigma-\beta_s+D_s(2\pi)=0$$

$$\sum_{r=1}^{k+l}C_{jr}(2\pi)\beta_r+\sum_{\sigma=1}^{k}B_{k+j,\,\sigma}(2\pi)W_\sigma-\beta_{k+j}+D_{j+k}(2\pi)=0 \qquad \begin{pmatrix} s=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,l \end{pmatrix} \qquad (2.13)$$

Не налагая никаких ограничений на выбор постоянных величин $\beta_1,\ldots,\beta_k$, найдем $\beta_{k+1},\ldots,\beta_{k+l}$, $W_1,\ldots,W_k$ как функции $\beta_1,\ldots,\beta_k$, рассматривая уравнения (2.13) как систему линейных неоднородных уравнений относительно $\beta_{k+1},\ldots,\beta_{k+l}$, $W_1,\ldots,W_k$.

Определитель этой системы будет

$$\Delta = \begin{vmatrix} |A_{i,\,k+j}(2\pi)| & |B_{ij}(2\pi)| \\ |C_{\sigma,\,k+j}(2\pi) - \delta_{\sigma j}| & |B_{k+\sigma,\,j}(2\pi)| \end{vmatrix} \tag{2.14}$$

Определитель Δ, составленный из функций A, B, C (при $t = 2\pi$)' будет аналитической функцией μ в области $|\mu| \leqslant \mu^*$.

Рассмотрим подробнее определитель Δ и покажем, что он отличен от нуля в точке $\mu = 0$. Будем искать функции A и C в виде формальных рядов, удовлетворяющих уравнениям (2.6) и соответствующих начальным условиям (2.7).

Положим

$$A_{sh} = A_{sh}^{(0)} + \mu A_{sh}^{(1)} + \ldots, \qquad C_{jh} = C_{jh}^{(0)} + \mu C_{jh}^{(1)} + \ldots$$
$$(s = 1, \ldots, k; \ \ j = 1, \ldots, l; \ \ h = 1, \ldots, k + l)$$

Согласно (2.7) имеем начальные условия для функций

$$A_{sh}^{(0)}\big|_{t=0} = \delta_{sh}, \quad C_{jh}^{(0)}\big|_{t=0} = \delta_{j+k,\,h}, \quad A_{sh}^{(r)}\big|_{t=0} = 0, \quad C_{jh}^{(r)}\big|_{t=0} = 0 \tag{2.15}$$
$$(r = 1, 2, \ldots; \ \ s = 1, \ldots, k; \ \ j = 1, \ldots, l)$$

Подставив эти ряды в уравнения (2.6) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим, в частности, систему, которой удовлетворяют первые приближения — функции $A_{sh}^{(0)}$ и $C_{jh}^{(0)}$:

$$\frac{dA_{sh}^{(0)}}{dt} = 0, \qquad \frac{dC_{jh}^{(0)}}{dt} = c_{j1}C_{1h}^{(0)} + c_{j2}C_{2h}^{(0)} + \cdots + c_{jl}C_{lh}^{(0)}$$

Отсюда, принимая во внимание условия (2.15), найдем $A_{sh}^{(0)} = 0$.

Из известного свойства системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами следует равенство

$$|C_{j,\,k+\sigma}^{(0)}(2\pi) - \delta_{j\sigma}| = \prod_{j=1}^{l}(e^{2\pi\lambda_j} - 1)$$

где λ_j — корни характеристического уравнения (2.2).

Так же будем искать функции B. Положим

$$B_{gs} = B_{gs}^{(0)} + \mu B_{gs}^{(1)} + \cdots \qquad (g = 1, \ldots, k + l; \ \ s = 1, \ldots, k) \tag{2.16}$$

Согласно (2.11) имеем

$$B_{gs}^{(0)}\big|_{t=0} = B_{gs}^{(1)}\big|_{t=0} = \cdots = B_{gs}^{(r)}\big|_{t=0} = \cdots = 0$$

Подставив ряды (2.16) в уравнения (2.10) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ, найдем, в частности, уравнения, которым удовлетворяют первые приближения:

$$\frac{dB_{gh}^{(0)}}{dt} = \delta_{gh}, \quad \frac{dB_{k+j,\,h}^{(0)}}{dt}\ c_{j1}B_{k+1,\,h}^{(0)} + c_{j2}B_{k+2,\,h}^{(0)} + \cdots + c_{jl}B_{k+l,\,h}^{(0)} \begin{pmatrix} h = 1, \ldots, k \\ j = 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

Интегрируя эти уравнения и принимая во внимание начальные условия для функций $B_{sh}^{(0)}$, $B_{j+k,\,h}^{(0)}$, получим $B_{sh}^{(0)} = \delta_{sh} t$, $B_{j+k,\,h}^{(0)} = 0$.

Отсюда найдем, что

$$\left| B_{rs}^{(0)}(2\pi) \right| = (2\pi)^k$$

Рассмотрим выражение (2.14) для определителя Δ при $\mu = 0$ и подставим в него значения функций $A^{(0)}$, $B^{(0)}$, $C^{(0)}$. Тогда, принимая во внимание условия, наложенные на уравнение (2.2):

$$\Delta\big|_{\mu=0} = \begin{vmatrix} A_{r,\,k+j}^{(0)}(2\pi) & B_{r,\,j}^{(0)}(2\pi) \\ C_{i,\,k+j}^{(0)}(2\pi) - \delta_{ji} & B_{k+i,\,j}^{(0)}(2\pi) \end{vmatrix} = (2\pi)^k \prod_{j=1}^{l} \left(e^{2\pi\lambda_j} - 1\right) \neq 0$$

где λ_j — корни характеристического уравнения (2.2).

Разрешая систему уравнений (2.13), найдем, что $W_1, \ldots, W_k$, $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_{k+l}$ будут иметь вид:

$$W_s \equiv W_s^{(1)}(\mu)\beta_1 + W_s^{(2)}(\mu)\beta_2 + \cdots + W_s^{(k)}(\mu)\beta_k + W_s^{(0)}(\mu) \qquad (2.17)$$

$$\beta_{k+j} \equiv \beta_{k+j}^{(1)}(\mu)\beta_1 + \beta_{k+j}^{(2)}(\mu)\beta_2 + \cdots + \beta_{k+j}^{(k)}(\mu)\beta_k + \beta_{k+j}^{(0)}(\mu) \qquad (2.18)$$

Здесь функции $W_s^{(1)}(\mu), \ldots, \beta_{k+j}^{(0)}(\mu)$ — аналитические во всей области $|\mu| \leqslant \mu^*$ и, в частности, в точке $\mu = 0$, за исключением нескольких точек — нулей функции $\Delta(\mu)$. В них они имеют полюсы такого же порядка, что и нули функции $\Delta(\mu)$.

Полученные условия (2.17) и (2.18) равносильны необходимым и достаточным условиям (2.12) существования периодического решения системы (2.3). Поэтому частное решение системы (2.3) будет тогда и только тогда периодическим, когда постоянные W_s этой системы выбраны по формулам (2.17) и когда начальные условия для этого частного решения (2.4) выбраны по формулам (2.18) при произвольных значениях параметров $\beta_1, \ldots, \beta_k$ и μ в области $|\mu| \leqslant \mu^*$.

При этом периодическое решение системы (2.3) будет иметь вид:

$$z_s = z_s^{(1)}(t)\beta_1 + z_s^{(2)}(t)\beta_2 + \cdots + z_s^{(k)}(t)\beta_k + z_s^{(0)}(t)$$
$$y_j = y_j^{(1)}(t)\beta_1 + y_j^{(2)}(t)\beta_2 + \cdots + y_j^{(k)}(t)\beta_k + y_j^{(0)}(t)$$

Здесь $z_s^{(1)}, \ldots, z_s^{(k)}$, $y_j^{(1)}, \ldots, y_j^{(k)}$ будут аналитическими в области $|\mu| \leqslant \mu^*$, за исключением некоторого числа точек, в которых они будут иметь полюсы. В точке $\mu = 0$ эти функции будут аналитическими.

Таким образом, доказана первая часть нашего утверждения. Докажем вторую его часть.

Допустим, что периодическое решение $\{z_s^*(t),\ y_j^*(t)\}$ системы (2.3) найдено. Подставив это решение в уравнение (2.3), получим тождества, которые можно проинтегрировать в пределах от нуля до 2π. В результате получим

$$z_s^*(2\pi) - z_s^*(0) = \int_0^{2\pi} \{\mu\,(p_{s1} z_1^*(t) + \cdots + p_{sk+l}\, y_l^*(t)) + f_s(t,\ \mu)\}\, dt + 2\pi W_s$$

Так как $z_s^*(t)$ — периодические функции t, то $z_s^*(2\pi) - z_s(0) = 0$. Следовательно,

$$W_s = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{\mu (p_{s1}z_1^* + p_{s2}z_2^* + \cdots + p_{s,\,k+l}\,y_l^*) + f_s(t,\ \mu)\}\,dt$$

§ 3. Периодические решения исходной системы. Полученный результат можно истолковать следующим образом. Только те вспомогательные системы имеют периодическое решение, значения величин W_s, для которых определены по формулам (2.17), т. е. являются функциями параметра μ и начальных значений $\beta_1, \ldots, \beta_k$ для первых k переменных z_s. Для таких вспомогательных систем и только для таких периодическое решение существует и определяется начальными условиями (2.4), в которых β_{k+j} заданы по формулам (2.18).

Исходная система (2.1) является частным случаем вспомогательных систем, для которых параметры $W_s = 0$. Поэтому, чтобы исходная система имела периодическое решение, необходимо и достаточно выполнения равенств

$$W_s \equiv W_s^{(1)}\beta_1 + W_s^{(2)}\beta_2 + \cdots + W_s^{(k)}\beta_k + W_s^{(0)} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

Из только что сказанного следует, что задачу отыскания периодического решения исходной системы (2.1) можно естественным образом разбить на две:

1) найти периодические решения вспомогательных систем, а вместе с тем и добавочные постоянные $W_s(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \mu)$;

2) приравняв найденные постоянные W_s нулю, решить полученную таким образом систему линейных алгебраических уравнений относительно $\beta_1, \ldots, \beta_k$.

Вторая задача элементарна.

Поэтому, чтобы найти периодическое решение исходной системы или выяснить вопрос о его существовании, надо найти периодические решения вспомогательной системы. В следующем параграфе покажем, что эта задача может быть решена с какой угодно степенью точности во всех случаях, какие только могут представиться на практике.

§ 4. Практический способ вычисления периодического решения вспомогательной системы. Периодическое решение вспомогательной системы, определенное условиями (2.4), будет аналитическим в окрестности точки $\mu = 0$. Будем искать это периодическое решение в виде

$$\begin{aligned} z_s &= z_s^{(0)}(t) + \mu z_s^{(1)}(t) + \mu^2 z_s^{(2)}(t) + \cdots \\ y_j &= y_j^{(0)}(t) + \mu y_j^{(1)}(t) + \mu^2 y_j^{(2)}(t) + \cdots \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, k \\ j = 1, \ldots, l \end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

Здесь $z_s^{(0)}, z_s^{(1)}, \ldots, y_j^{(0)}, y_j^{(1)}, \ldots$ — неизвестные периодические функции t с периодом 2π. Положим постоянные $W_1, \ldots, W_k$ в виде

$$W_s = W_s^{(0)} + \mu W_s^{(1)} + \mu^2 W_s^{(2)} + \cdots \qquad (s = 1, \ldots, k) \qquad (4.2)$$

Здесь $W_s^{(0)}$, $W_s^{(1)}$, ... — неизвестные постоянные. Согласно условиям (2.4) функции $z_s^{(0)}$, $z_s^{(1)}$, $z_s^{(2)}$, ... имеют начальные значения:

$$z_s^{(0)}\big|_{t=0} = \beta_s, \qquad z_s^{(r)}\big|_{t=0} = 0 \qquad (r = 1,\ 2, \ldots) \tag{4.3}$$

Что же касается начальных значений для функций $y_j^{(0)}$, $y_j^{(1)}$, ..., то они заранее нам неизвестны, так же, как заранее нам неизвестны и постоянные W_1, W_2, ..., W_k. Оказывается, что как первые, так и последние найдутся однозначно из условия периодичности искомого решения уравнений (2.3). Подставив (4.1) и (4.2) в уравнения (2.3) и сравнивая коэффициенты при степенях μ, получим уравнения, которым удовлетворяют неизвестные периодические функции $z_s^{(i)}(t)$ и $y_j^{(i)}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dz_s^{(i)}}{dt} &= Z_s^{(i)} + W_s^{(i)} \\ \frac{dy_j^{(i)}}{dt} &= c_{j1}y_1^{(i)} + c_{j2}y_2^{(i)} + \cdots + b_{jl}y_2^{(i)} + Y_l^{(i)} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, k \\ j = 1, \ldots, l \\ i = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Здесь $Z_s^{(i)}$, $Y_j^{(i)}$ — непрерывные периодические функции t с периодом 2π и линейные функции всех $z_s^{(\nu)}$, $y_j^{(\nu)}$, для которых $\nu < i$.

Допустим, что все $z_s^{(\nu)}$, $y_j^{(\nu)}$, для которых $\nu < i$, уже найдены и вышли периодическими. Подставив функции $z_s^{(\nu)}$ и $y_j^{(\nu)}$ в систему, которой удовлетворяют функции $z_s^{(i)}$ и $y_j^{(i)}$, получим, что $Z_s^{(i)}$, $Y_j^{(i)}$ будут известными периодическими функциями t с периодом 2π.

Для периодичности $z_s^{(i)}$ необходимо и достаточно, чтобы имели место равенства

$$-W_s^{(i)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Z_s^{(i)}\,dt$$

Таким образом, постоянные величины $W_s^{(i)}$ определяются однозначно из условия периодичности функций $z_s^{(i)}$.

Интегрируя систему первых k уравнений (4.4) и принимая во внимание начальные условия (4.3), найдем

$$z_s^{(i)} = \delta_{1,\,1+i}\,\beta_s + \int_0^t Z_s^{(i)}\,dt - \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} Z_s^{(i)}\,dt \tag{4.5}$$

Последние l уравнений относительно неизвестных периодических функций $y_j^{(i)}$ имеют единственное периодическое решение, так как среди корней характеристического уравнения (2.2) по предположению нет корней ни равных нулю, ни корней вида $\pm N\sqrt{-1}$ (где N — целое число). Это решение можем вычислить методом неопределенных коэффициентов.

В частности, при $i = 0$ получим систему уравнений

$$\frac{dz_s^{(0)}}{dt} = f_s^{(0)}(t) + W_s^{(0)}, \qquad \frac{dy_j^{(0)}}{dt} = c_{j1}y_1^{(0)} + c_{j2}y_2^{(0)} + \cdots + c_{jl}y_l^{(0)} + f_{j+k}^{(0)}(t)$$
$$(s = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, l)$$

которая при

$$-W_s^{(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_s^{(0)}(t)\,dt$$

и при условиях (4.3) имеет единственное периодическое решение В частности,

$$z_s^{(0)} = \beta_s + \int_0^t f_s^{(0)}(t)\,dt - \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_s^{(0)}(t)\,dt \tag{4.6}$$

Поэтому, вычисляя последовательно функции $z_s^{(i)}$, $y_j^{(i)}$ и постоянные $W_s^{(i)}$, начиная с тех, для которых $i = 0$, и принимая во внимание начальные условия (4.3), найдем единственную систему рядов (4.1) с периодическими коэффициентами, удовлетворяющих формально системе (4.3). При этом значения для параметров $W_1, \ldots, W_k$ найдутся единственным образом в виде формальных рядов (4.2).

Из единственности этих рядов следует, что они будут сходиться и будут совпадать с рядами, которыми может быть представлено периодическое решение системы (2.3) вблизи точки $\mu = 0$. Эти ряды будут сходиться во всяком случае при достаточно малых по модулю значениях параметра μ. Точнее, они будут сходиться в области, определенной неравенством $|\mu| \leqslant d$, где d — расстояние от точки $\mu = 0$ до ближайшего нуля определителя $\Delta(\mu)$.

§ 5. Об отыскании периодического решения для систем одного вида. Изложенный метод отыскания периодических решений может быть применен к системам, которые имеют критические корни типа $\pm n\sqrt{-1}$ (n — целое число). Ради простоты остановимся на следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ny + \mu p_{11}(t,\mu)x + \mu p_{12}(t,\mu)y + f_1(t,\mu) \\ \frac{dy}{dt} &= nx + \mu p_{21}(t,\mu)x + \mu p_{22}(t,\mu)y + f_2(t,\mu) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь n — целое число, $f_1(t,\mu)$, $f_2(t,\mu)$ и p коэффициенты того же рода, что и соответствующие функции в уравнениях (1.1).

Найдем периодическое решение системы (5.1). Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ny + \mu p_{11}(t,\mu)x + \mu p_{12}(t,\mu)y + f_1(t,\mu) + W_1\cos nt + W_2\sin nt \\ \frac{dy}{dt} &= nx + \mu p_{21}(t,\mu)x + \mu p_{22}(t,\mu)y + f_2(t,\mu) + W_1\sin nt - W_2\cos nt \end{aligned} \tag{5.2}$$

Сделаем замену переменных:

$$x = b_1\cos nt + b_2\sin nt, \qquad y = b_1\sin nt - b_2\cos nt \tag{5.3}$$

В новых переменных система (5.1) будет иметь вид системы (2.1) (при $k = 2$, $l = 0$), а система (5.2) — вспомогательной системы (2.3). Поэтому задача отыскания периодического решения для (5.1) сводится к отысканию периодического решения системы (5.2) с соответствующими W_1 и W_2. Но для того чтобы отыскивать периодическое решение последней системы, нет необходимости делать замену переменных. Можно это периодическое решение искать сразу в переменных x и y при помощи метода формальных разложений. В силу того что преобразование переменных взаимнооднозначно, формальные ряды будут единственны, будут сходиться, действительно представляя искомое периодическое решение и соответствующие постоянные.

Покажем, как вычислять периодическое решение системы (5.2) на практике. Мы будем искать периодическое решение с произвольно заданными начальными условиями

$$x(0) = \beta_1, \qquad y(0) = \beta_2 \tag{5.4}$$

где β_1, β_2 — произвольные постоянные. Ищем решение в виде формальных рядов

$$x = x_0 + \mu x_1 + \cdots, \qquad y = y_0 + \mu y_1 + \cdots \tag{5.5}$$

с неизвестными периодическими коэффициентами. Согласно условиям (5.4) функции x_0, y_0, x_1, y_1, ... имеют следующие начальные условия:

$$x_0(0) = \beta_1, \quad y_0(0) = \beta_2, \quad x_l(0) = y_l(0) = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots)$$

Постоянные W_1 и W_2 полагаем в виде рядов

$$W_1 = W_1^{(0)} + \mu W_1^{(1)} + \cdots, \qquad W_2 = W_2^{(0)} + \mu W_2^{(1)} + \cdots \tag{5.6}$$

с неизвестными постоянными коэффициентами, которые следует найти из условия периодичности соответствующих коэффициентов в рядах (5.5).

Пусть после подстановки рядов (5.5) и 5.6) в уравнения (5.2) мы нашли все периодические функции x_j и y_j, для которых $j < i$ (j, i — целые числа, $i > 0$), и соответствующие им постоянные $W_1^{(j)}$, $W_2^{(j)}$. Тогда для вычисления x_i и y_i имеем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= -ny_i + F_i^{(1)} + W_1^{(i)}\cos nt + W_2^{(i)}\sin nt, \\ \frac{dy_i}{dt} &= nx_i + F_i^{(2)} + W_1^{(i)}\sin nt - W_2^{(i)}\cos nt \end{aligned} \tag{5.7}$$

где $F_i^{(1)}$, $F_i^{(2)}$ — известные функции t и тех x_j, y_j, для которых $j < i$.

Чтобы x_i и y_i вышли периодическими, должны выполняться условия

$$-2W_1^{(i)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi 2} F_i^{(1)}\cos nt\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_i^{(2)}\sin nt\,dt$$

$$-2W_2^{(i)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_i^{(1)}\sin nt\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_i^{(2)}\cos nt\,dt$$

Эти условия определяют однозначно $W_1^{(i)}$ и $W_2^{(i)}$. Уравнения же (5.7) определяют при этом периодические функции x_i и y_i. Продолжая последовательно вычислять, переходя от i к $i+1$, видим, что вычисления можно произвести с любой степенью точности. С той же степенью точности находим и постоянные W_1 и W_2.

Чтобы теперь найти периодическое решение исходной системы (5.1), надо решить систему уравнений $W_1 = 0$, $W_2 = 0$ относительно β_1 и β_2, а найденные β_1 и β_2 подставить в ряды (5.5). При этом мы найдем нужное нам периодическое решение (или решения) системы (5.1).

Пример. Вычислим периодическое решение для уравнения (1.4).

Найдем прежде всего периодическое решение вспомогательной системы, которую в данном случае можем записать следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - \mu x \cos t - \mu a \cos t = W_1 \cos t + W_2 \sin t \tag{5.8}$$

Ищем периодическое решение и постоянные W_1 и W_2 в виде

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \cdots \tag{5.9}$$

$$W_1 = W_1^{(0)} + \mu W_1^{(1)} + \mu^2 W_1^{(2)} + \cdots, \quad W_2 = W_2^{(0)} + \mu W_2^{(1)} + \mu^2 W_2^{(2)} + \cdots$$

Начальные условия для искомых периодических функций x_0, $x_1 \ldots$ зададим следующим образом:

$$x_0(0) = \beta_1, \qquad x_0'(0) = \beta_2, \qquad x_i(0) = x_i'(0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{5.10}$$

Подставив ряды (5.9) в уравнения (5.8), найдем

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 = W_1^{(0)} \cos t + W_2^{(0)} \sin t \\ &\frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = a \cos t + x_0 \cos t + W_1^{(1)} \cos t + W_2^{(1)} \sin t \\ &\frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2 = x_1 \cos t + W_1^{(2)} \cos t + W_2^{(2)} \sin t \end{aligned} \tag{5.11}$$

Чтобы первое уравнение допускало периодическое решение, должны быть выполнены равенства $W_1^{(0)} = 0$, $W_2^{(0)} = 0$. Тогда получим, принимая во внимание условия (5.10):

$$x_0 = \beta_1 \cos t + \beta_2 \sin t \tag{5.12}$$

Подставив (5.12) во второе уравнение (5.11), получим

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = a \cos t + \frac{1}{2} \beta_1 (1 + \cos 2t) + \frac{1}{2} \beta_2 \sin 2t + W_1^{(1)} \cos t + W_2^{(1)} \sin t \tag{5.13}$$

Это уравнение имеет периодическое решение, если выполнены условия

$$W_1^{(1)} = -a, \qquad W_2^{(1)} = 0$$

Из уравнения (5.13) при начальных условиях (5.10) найдем

$$x_1 = -\frac{1}{3} \beta_1 \cos t + \frac{1}{2} \beta_1 + \frac{1}{3} \beta_2 \sin t - \frac{1}{6} \beta_2 \cos 2t - \frac{1}{6} \beta_2 \sin 2t \tag{5.14}$$

Подставив (5.14) в третье уравнение (5.11), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2 = &-\frac{1}{6} \beta_1 (1 + \cos 2t) + \frac{1}{2} \beta_1 \cos t - \frac{1}{12} \beta_1 (\cos t + \cos 3t) + \\ &+ \frac{1}{6} \beta_2 \sin 2t - \frac{1}{12} \beta_2 (\sin 3t + \sin t) + W_1^{(2)} \cos t + W_2^{(2)} \sin t \end{aligned}$$

Чтобы функция x_2 вышла периодической, должны быть выполнены условия

$$W_1^{(2)} = -\frac{5}{12} \beta_1, \qquad W_2^{(2)} = \frac{1}{12} \beta_2$$

Функцию x_2 находим периодической:

$$\begin{aligned} x_2 = &-\frac{29}{288} \beta_1 \cos t - \frac{23}{288} \beta_2 \sin t - \frac{1}{6} \beta_2 + \frac{1}{18} \beta_1 \cos 2t + \\ &+ \frac{1}{96} \beta_1 \cos 3t + \frac{1}{96} \beta_2 \sin 3t - \frac{1}{18} \beta_2 \sin 2t \end{aligned}$$

Так же найдем

$$x_3 = -\frac{29}{576}\beta_1 + \frac{169}{4320}\beta_1\cos t - \frac{139}{4320}\beta_2\sin t + \frac{13}{864}\beta_1\cos 2t + \frac{5}{432}\beta_2\sin 2t +$$
$$+\frac{1}{288}\beta_2\sin 3t - \frac{1}{288}\beta_1\cos 3t - \frac{1}{2880}\beta_1\cos 4t - \frac{1}{2880}\beta_2\sin 4t,$$

$$W_1^{(3)} = \frac{5}{36}\beta_1, \qquad W_2^{(3)} = \frac{1}{36}\beta_2$$

и т. д. Функции W_1 и W_2 будут

$$W_1 = -a\mu - \left(\frac{5}{12}\mu^2 - \frac{5}{36}\mu^3 - \cdots\right)\beta_1, \qquad W_2 = \left(\frac{1}{12}\mu^2 + \frac{1}{36}\mu^3 + \cdots\right)\beta_2$$

Условия $W_1 = 0$, $W_2 = 0$ выполнены, когда $\beta_2 = 0$, а

$$\beta_1 = -a\left(\frac{5}{12}\mu + \frac{5}{36}\mu^2 + \cdots\right)^{-1}$$

Подставив найденные β_1 и β_2 в функции $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots,$ и поделив полученный ряд на μ, получим искомое периодическое решение.

§ 6. Применение метода вспомогательных систем к задаче интегрирования однородной системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1.1). Пусть λ — корень характеристического уравнения, составленного для системы (1.1). Из общей теории уравнений с периодическими коэффициентами известно, что этому корню соответствует по крайней мере одно решение системы (1.1) вида

$$x_s = e^{\lambda t} z_s(t, \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{6.1}$$

где $z_s(t, \mu)$ — периодические функции t с периодом 2π. Учитывая то обстоятельство, что функции $z_s(t, \mu)$, входящие в частное решение (6.1), будут непременно периодическими с периодом 2π, сделаем в уравнениях (1.1) замену переменных, положив

$$x_s = e^{(\alpha_0 + \mu\alpha_1)t} z_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{6.2}$$

где z_s — новые переменные, а α_0 и α_1 — неопределенные постоянные.

Вместо того чтобы искать частное решение для системы уравнений (1.1), будем искать периодическое решение для системы

$$\frac{dz_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left[a_{si} + \mu p_{si}(t, \mu)\right] z_i - (\alpha_0 + \mu\alpha_1) z_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{6.3}$$

которое в силу сделанной замены переменных всегда существует. Это периодическое решение найдем при определенных значениях постоянных α_0 и α_1, полученных из условия существования периодического решения. Подставив в (6.1) периодические функции, которые составляют найденное периодическое решение и соответствуют значениям постоянных α_0 и α_1, мы получим искомое частное решение системы (1.1). Величина же $\alpha_0 + \mu\alpha_1$ будет характеристическим показателем.

Таким образом, задачу отыскания частных решений уравнений (1.1) сводим к задаче отыскания периодических решений уравнений (6.3), полученных из первых при помощи замены переменных (6.2).

Будем искать периодическое решение, отличное от тривиального ($z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$) для уравнений (6.3). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — корни уравнения

$$\| a_{ik} - \lambda\delta_{ik} \| = 0 \tag{6.4}$$

Тогда корнями характеристического уравнения системы уравнений с постоянными коэффициентами, в которую обращается система (6.3) при $\mu = 0$, будут величины $\lambda_1 - \alpha_0, \lambda_2 - \alpha_0, \ldots, \lambda_n - \alpha_0$.

Если бы оказалось, что ни одна из этих разностей не равна нулю или не равна числу вида $\pm N\sqrt{-1}$ (N — целое число), то система (6.3) вблизи точки $\mu = 0$ имела бы единственным периодическим решением тривиальное решение ($z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$).

Действительно, в этом случае систему (6.3) можно рассматривать как квазилинейную вдали от резонанса. Согласно хорошо известной теории таких систем система (6.3) будет иметь единственное периодическое решение, и это решение, очевидно, для системы (6.3) будет тривиальное.

Так как заранее известно, что система (6.3) имеет периодическое решение, отличное от тривиального, то величина α_0 должна быть равна одному из корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Выберем ее равной одному из них, например, равной λ_1.

Допустим ради простоты, что λ_1 — простой корень уравнения (6.4) и что ни один из остальных корней не отличается от него на числа вида $\pm N\sqrt{-1}$ (N — целое число).

Тогда согласно общей теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами систему (6.3) при $\mu = 0$ можно при помощи линейного неособого преобразования с постоянными коэффициентами привести к виду

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv_i}{dt} = c_{i1}v_1 + c_{i2}v_2 + \cdots + c_{in-1}v_{n-1} \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

Подвергая тому же преобразованию систему (6.3), получим

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt} = \mu U(t, u, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, \mu) - \mu\alpha_1 u \\ \frac{dv_i}{dt} = c_{i1}v_1 + c_{i2}v_2 + \cdots + c_{in-1}v_{n-1} + V_i(t, u, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, \mu)\mu - \mu\alpha_1 v_i \\ (i = 1, \ldots, n-1)\end{gathered} \tag{6.5}$$

Здесь $U, V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$ — линейные функции $u, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ с коэффициентами того же рода, что и функции p в уравнениях (1.1), $c_{i\sigma}$ — постоянные. Так как $\alpha_0 = \lambda_1$, то в силу инвариантности корней характеристического уравнения при линейном неособом преобразовании корнями уравнения

$$\| c_{i\sigma} - \lambda\delta_{i\sigma} \| = 0$$

будут $\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_1, \ldots, \lambda_n - \lambda_1$. По предположению эти величины отличны от нуля и чисел вида $\pm\sqrt{-1}$, где N — целое число.

Полученная таким образом система (6.5) будет частным случаем системы (2.1). Поэтому для нее можно записать вспомогательную систему

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \mu U(t, z, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \mu) - \alpha_1\mu z + W \\ \frac{dy_j}{dt} &= c_{j1}y_1 + \cdots + c_{jn-1}y_{n-1} + \mu V_j(t, z, y_1, \ldots, y_{n-1}, \mu) - \alpha_1\mu y_j \\ & (j = 1, \ldots, n-1) \end{aligned} \tag{6.6}$$

Согласно изложенному в предыдущих параграфах с любой степенью точности легко вычислить периодическое решение для вспомогательной системы (6.6) и соответствующую постоянную W.

Так как однородная система (6.3) и система (6.5) допускают тривиальное решение, которое можно рассматривать как периодическое, то W обращается в нуль при $\beta = 0$ ($\beta \equiv z(0)$). Поэтому W имеет вид:

$$W = \mu\beta(Q(\mu) + \alpha_1 R(\mu))$$

где

$$\beta R(\mu) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z^*(t, \beta, \mu)\,dt, \quad \beta Q(\mu) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(t, z^*, y_1^*, \ldots, y_{n-1}^*, \mu)\,dt$$

а $z^*, y_1^*, \ldots, y_{n-1}^*$ — найденное периодическое решение вспомогательной системы (6.6).

Система (6.6) имеет периодическое нетривиальное решение при выполнении условия

$$Q(\mu) + \alpha_1 R(\mu) = 0 \tag{6.7}$$

Это условие представляет собой линейное уравнение, которое всегда можно разрешить относительно α_1 (в окрестности точки $\mu = 0$), так как $R(0) = \beta^{-1}z^{(0)}(0) = 1$ при $\mu = 0$ (согласно (4.6) при $s = 1$ $f_s = 0$). Из уравнения (6.7) получим α_1 как аналитическую функцию μ.

Таким образом, если λ_1 — простой корень и все разности $\lambda_i - \lambda_1$ ($i = 2, \ldots, n$) отличны от чисел вида $\pm N\sqrt{-1}$, то характеристический показатель $\lambda_1 + \alpha_1(\mu)$ будет аналитической функцией в точке $\mu = 0$.

Вычисление характеристических показателей можно проводить, придерживаясь хода рассуждений в настоящем параграфе. Сначала полезно привести систему уравнений к каноническому виду, а затем сделать подстановку (6.2). Потом, записав вспомогательную систему, вычислить ее периодическое решение и соответствующую ему постоянную W. Приравнивая последнюю нулю, найдем α_1, а стало быть, и характеристический показатель.

Допустим теперь, что λ_1 — не простой, а кратный корень характеристического уравнения (6.4). В этом случае, если он имеет простые элементарные делители, систему (6.3) при $\mu = 0$ можно привести к виду

$$\frac{du_j}{dt} = 0, \qquad \frac{dv_j}{dt} = c_{i1}v_1 + c_{i2}v_2 + \cdots + c_{in-r}v_{n-r} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, r \\ i = 1, \ldots, n-r \end{pmatrix}$$

где r — кратность корня λ_1.

Если допустим теперь, что все разности $\lambda_{r+1}-\lambda_1, \lambda_{r+2}-\lambda_1, \ldots, \lambda_n-\lambda_1$ отличны от чисел $\pm N\sqrt{-1}$ (N — целое число), то мы, подвергнув тому же преобразованию систему (6.3), получим систему уравнений, к которой можно применить метод вспомогательных систем. Только теперь будем иметь уже не одну добавочную постоянную, а r, и не одно условие существования периодического решения, а систему условий

$$W_1 = W_2 = \cdots = W_r = 0,$$

которая будет представлять собой систему однородных уравнений относительно произвольных постоянных $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$. Чтобы эта система была совместной и допускала по крайней мере одно нетривиальное решение, определитель ее должен быть равным нулю. Это дает нам уравнение степени r относительно α_1. Разрешая его, найдем r корней $\alpha_1^{(1)}(\mu), \alpha_1^{(2)}(\mu), \ldots, \alpha_1^{(r)}(\mu)$, которые вместе с λ_1 образуют r характеристических показателей:

$$\lambda_1 + \alpha_1^{(j)}(\mu) \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

Рассмотрим пример. Пусть предложена система

$$\frac{dx}{dt} = ax + \mu(x\cos t + y\sin t)$$
$$\frac{dy}{dt} = by + \mu(cx\sin t + dy\cos t) \qquad (6.8)$$

где a, b, c, d $(a \neq b)$ — некоторые постоянные.

Найдем один из характеристических показателей, например тот, который при $\mu = 0$ принимает значение a. С этой целью заменим переменные x и y в уравнениях (6.7) переменными u, v при помощи подстановки

$$x = e^{(a+\mu\alpha)t}u, \qquad y = e^{(a+\mu\alpha)t}v$$

где α — неопределенная постоянная, а a — один из корней характеристического уравнения системы (6.8) при $\mu = 0$.

Преобразованная система имеет вид:

$$\frac{du}{dt} = \mu(u\cos t - \alpha u + v\sin t)$$
$$\frac{dv}{dt} = (b-a)v + \mu(cu\sin t + dv\cos t - \alpha v)$$

Вспомогательная система будет

$$\frac{du}{dt} = \mu(u\cos t - \alpha u + v\sin t) + W$$
$$\frac{dv}{dt} = (b-a)v + \mu(cu\sin t + dv\cos t - \alpha v) \qquad (6.9)$$

Будем искать периодическое решение и постоянную W в виде рядов:

$$u = u_0 + \mu u_1 + \cdots, \qquad v = v_0 + \mu v_1 + \cdots, \qquad W = W_0 + \mu W_1 + \cdots \qquad (6.10)$$

где $u_0, u_1, \ldots, v_0, v_1 \ldots$ — неизвестные периодические коэффициенты, а $W_0, W_1 \ldots$ — неизвестные постоянные коэффициенты, которые следует определить из условия существования периодического решения.

Подставив эти ряды (6.10) в уравнения (6.9) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в левых и правых частях уравнений, получаем уравнения, определяющие периодические функции u_i, v_i:

$$\frac{du_0}{dt} = W_0, \quad \frac{dv_0}{dt} = (b-a)\, v_0$$
$$\frac{du_1}{dt} = -\alpha u_0 + v_0 \sin t + W_1$$
$$\frac{dv_1}{dt} = (b-a)\, v_1 + cu_0 \sin t + dv_0 \cos t - \alpha v_0 \qquad (6.11)$$
$$\frac{du_2}{dt} = u_1 \cos t + v_1 \sin t - \alpha u_1 + W_2$$
$$\frac{dv_2}{dt} = (b-a)\, v_2 + cu_1 \sin t + dv_1 \cos t - \alpha v_1$$

Функции u_i удовлетворяют начальным условиям

$$u_0(0) = \beta, \quad u_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots) \; (\beta \text{ — произвольная постоянная}) \qquad (6.12)$$

Постоянные W_i находим из условия существования периодического решения для каждой из систем (6.11). Из первой системы (6.11) находим

$$W_0 = 0, \qquad u_0 = \beta, \qquad v_0 = 0$$

Подставив найденные u_0 и v_0 во вторую систему (6.11), имеем

$$\frac{du_1}{dt} = \beta \cos t - \alpha\beta + W_1 \qquad \frac{dv_1}{dt} = (b-a)\, v_1 + c\beta \sin t$$

При $W_1 = \alpha\beta$ эта система имеет периодическое решение. Интегрируя первое уравнение и принимая во внимание начальные условия (6.12), находим

$$u_1 = -\beta \sin t$$

Периодическую функцию v_1 ищем методом неопределенных коэффициентов в виде

$$v_1 = A \cos t + B \sin t$$

Имеем после подстановки во второе уравнение системы

$$-A - (b-a)\, B = c\beta, \qquad B - (b-a)\, A = 0$$

Отсюда

$$A = \frac{-c\beta}{1 + (b-a)^2}, \qquad B = \frac{-c\beta\,(b-a)}{1 + (b-a)^2}$$

Продолжая так вычисления, найдем

$$W = \alpha\beta\mu + \frac{-c\,(b-a)\,\beta}{2\,[1 + (b-a)^2]}\,\mu^2 + \frac{\alpha\,[-c\,(b-a)^2\,\beta + c\beta]}{2\,[1 + (b-a)^2]^2}\,\mu^3 + \cdots$$

Приравнивая W нулю и разрешая полученное таким образом уравнение относительно α, находим

$$\alpha = \mu\,\frac{c\,(a-b)}{2\,[1 + (b-a)^2]} + \mu^2\,(\;) + \cdots$$

Поступила 22 VI 1951

Уральский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле. ОГИЗ. 1935.
2. Кочин Н. Е. О крутильных колебаниях коленчатых валов. ПММ. 1934. Т. II. Вып. 1.
3. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. ОГИЗ. 1949. § 5 и § 9—10.