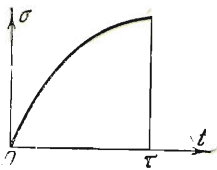


РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН
 ВДОЛЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Д. Ф. Лазуткин
 (Курск)

В работе рассматривается случай распространения упруго-пластических волн в цилиндрическом однородном стержне, когда давление на левом конце стержня возрастает по любому закону и затем мгновенно падает до нуля. Упрочнение нелинейное и изображается некоторой выпуклой кривой. Считается, что отражение волн от правого конца стержня можно не рассматривать вследствие его достаточно большой длины.

§ 1. Пусть имеется цилиндрический однородный стержень, давление на конце которого возрастало по закону $\sigma = F(t)$ и затем в момент времени $t = \tau$ мгновенно упало до нуля (фиг. 1). Зависимость между напряжением и деформацией $\sigma = f(\epsilon)$ для материала предполагаем определенной и представленной в виде некоторой вы-



Фиг. 1

пуклой кривой (фиг. 2).

Обозначим деформацию стержня, соответствующую пределу упругости, через ϵ_0 , а максимальную деформацию — через ϵ_n .

Разобьем отрезок оси деформаций на некоторое достаточно большое количество n частей.

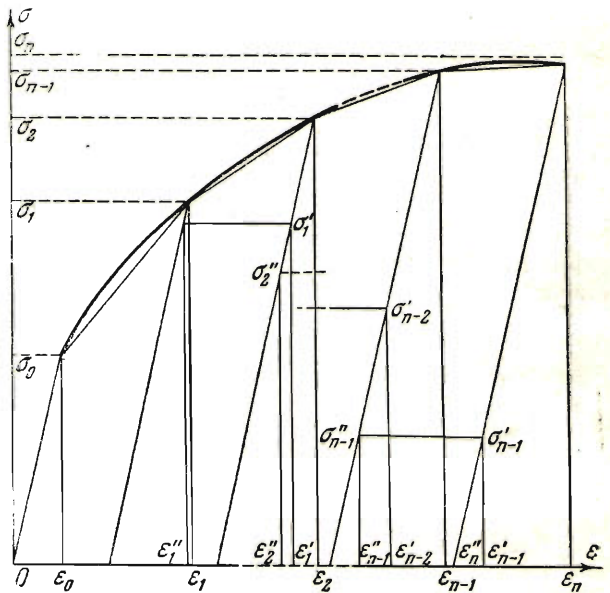
Пусть $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}$ — точки деления.

Каждому приращению деформации $\epsilon_i - \epsilon_{i-1} = \Delta\epsilon_i$ со-

ответствует приращение напряжения $\Delta\sigma_i$. Участки кривой между точками деления заменим хордами. Будем считать, что каждый участок деформаций движется вдоль стержня со своей вполне определенной скоростью:

$$a_i = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\epsilon_i}} = \sqrt{\frac{1}{\rho} E_i} \quad (1.1)$$

Приближенная картина распространения деформаций вдоль стержня следующая. Впереди с наибольшей скоростью a_0 движется волна, соответствующая пре-



Фиг. 2

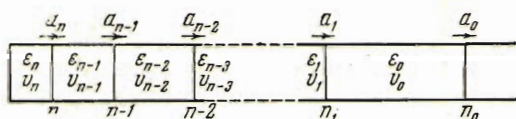
делу упругости. Каждая последующая волна имеет скорость a_i меньше предыдущей a_{i-1} (фиг. 3).

Зависимость между деформацией стержня ϵ_i и скоростью частиц v_i определяется из уравнения количества движения

$$\rho a_i (v_i - v_{i-1}) = \sigma_{i-1} - \sigma_i \quad (1.2)$$

следующим образом:

$$v_n = -a_0 \epsilon_0 - \sum_{i=1}^n a_i \Delta \epsilon_i \quad (1.3)$$



Фиг. 3

Изменением поперечного сечения стержня при прохождении волны пренебрегаем. В момент времени $t = \tau$ напряжение на конце стержня $\sigma_n'' = 0$.

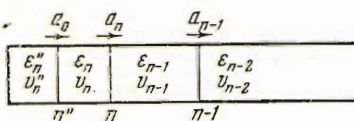
Деформация конца стержня определяется по известной формуле $\epsilon_n'' = \epsilon_n - \sigma_n / E$, где E — модуль Юнга (фиг. 2).

Мы видим, что на конце стержня возник новый фронт волны, скорость которой, как известно, a_0 . В самом деле, материал предполагается пластичным и уравнение количества движения для этого фронта волны будет иметь вид:

$$\rho a (v_n'' - v_n) = E (\epsilon_n - \epsilon_n'') \quad (1.4)$$

где a — неизвестная скорость распространения волны. Кроме того, если скорость частиц мала по сравнению со скоростью волны, то из уравнения неразрывности

$$\frac{a - v_n}{1 + \epsilon_n} = \frac{a - v_n''}{1 + \epsilon_n''} \quad (1.5)$$



имеем

$$v_n'' - v_n = a (\epsilon_n - \epsilon_n'') \quad (1.6)$$

Подставив (1.6) в (1.4), получим

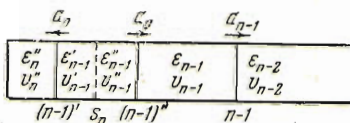
$$a^2 = \frac{E}{\rho} \quad \text{или} \quad a = a_0 \quad (1.7)$$

Фиг. 4

Эта вновь возникшая волна и называется волной разгрузки^[1] (фиг. 5).

Как известно^[2], когда фронт возникшей волны n'' со скоростью a_0 догонит фронт волны n со скоростью a_n , образуется стационарный фронт сильного разрыва по деформациям ϵ_n . Влево от этого фронта может распространяться только упругая волна^[3].

Пусть вправо распространяется также упругая волна, т. е. разгрузка продолжается (фиг. 4).



Фиг. 5

Вновь возникшие деформации и скорости частиц ϵ_{n-1}' , v_{n-1}' , ϵ_{n-1}'' , v_{n-1}'' найдем из условий равенства напряжений и скоростей частиц правее и левее стационарного фронта, а также из условий сохранения количества движения на фронтах волн $(n-1)'$ и $(n-1)''$. Подсчеты приводят к результатам:

$$\epsilon_{n-1}' = -\epsilon_0 + \epsilon_n + \frac{1}{2E} (\sqrt{EE_n} - E_n) \Delta \epsilon_n - \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{E} \Delta \epsilon_i \quad (1.8)$$

$$\epsilon_{n-1}'' = -\epsilon_0 + \epsilon_n + \frac{1}{2E} (\sqrt{EE_n} - 2E + E_n) \Delta \epsilon_n - \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{E} \Delta \epsilon_i \quad (1.9)$$

$$v_{n-1}' = v_{n-1}'' = \frac{1}{2\sqrt{\rho E}} (E_n - \sqrt{EE_n}) \Delta \epsilon_n + a_0 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{E_i}{E} \Delta \epsilon_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \Delta \epsilon_i \quad (1.10)$$

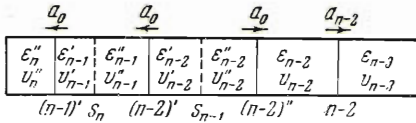
Совершенно так же, когда фронт волны $(n-1)''$ с деформациями ε_{n-1}'' догонит фронт $(n-1)$ с деформациями ε_{n-1} , образуется стационарный фронт сильного разрыва s_{n-1} (фиг. 6). Продолжая подсчеты и дальше, мы подметим закон образования наших величин и сможем написать для любого m

$$\varepsilon_{n-m}' = -\varepsilon_0 + \varepsilon_{n-m+1} + \frac{1}{2E} \sum_{i=n-m+1}^n (\sqrt{EE_i} - E_i) \Delta\varepsilon_i - \sum_{i=1}^{n-m+1} \frac{E_i}{E} \Delta\varepsilon_i \quad (1.11)$$

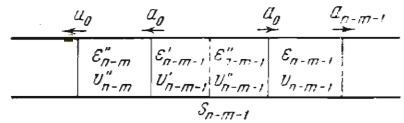
$$\varepsilon_{n-m}'' = -\varepsilon_0 + \varepsilon_{n-m+1} + \frac{1}{2E} \sum_{i=n-m+2}^n (\sqrt{EE_i} - E_i) \Delta\varepsilon_i + \frac{1}{2E} (\sqrt{EE_{n-m+1}} - 2E + E_{n-m+1}) \Delta\varepsilon_{n-m+1} - \sum_{i=1}^{n-m+1} \frac{E_i}{E} \Delta\varepsilon_i \quad (1.12)$$

$$v_{n-m}' = v_{n-m}'' = \frac{1}{2V\rho E} \sum_{i=n-m+1}^n (E_i - \sqrt{EE_i}) \Delta\varepsilon_i + a_0 \sum_{i=1}^{n-m} \frac{E_i}{E} \Delta\varepsilon_i - \sum_{i=1}^{n-m} a_i \Delta\varepsilon_i \quad (1.13)$$

Считая (1.11) — (1.13) справедливым для $n-m$, покажем, что закон образования искомым величин справедлив и для $n-m-1$ (фиг. 7).



Фиг. 6



Фиг. 7

Значения ε_{n-m-1}' , v_{n-m-1}' , ε_{n-m-1}'' , v_{n-m-1}'' определим из уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{n-m-1}' &= \sigma_{n-m-1}'', & -\rho a_0 (v_{n-m-1}' - v_{n-m}'') &= \tau_{n-m}'' - \tau_{n-m-1}' \\ v_{n-m-1}' &= v_{n-m-1}'', & \rho a_0 (v_{n-m-1}'' - v_{n-m-1}) &= \tau_{n-m-1} - \tau_{n-m-1}'' \end{aligned} \quad (1.14)$$

Решая совместно систему уравнений (1.14), найдем

$$\varepsilon_{n-m-1}' = -\varepsilon_0 + \varepsilon_{n-m} + \frac{1}{2E} \sum_{i=n-m}^n (\sqrt{EE_i} - E_i) \Delta\varepsilon_i - \sum_{i=1}^{n-m} \frac{E_i}{E} \Delta\varepsilon_i \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n-m-1}'' &= -\varepsilon_0 + \varepsilon_{n-m} + \frac{1}{2E} \sum_{i=n-m+1}^n (\sqrt{EE_i} - E_i) \Delta\varepsilon_i + \frac{1}{2E} (\sqrt{EE_{n-m}} - 2E + E_{n-m}) \Delta\varepsilon_{n-m} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-m} \frac{E_i}{E} \Delta\varepsilon_i \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} v_{n-m-1}' = v_{n-m-1}'' &= \frac{1}{2V\rho E} \sum_{i=n-m}^n (E_i - \sqrt{EE_i}) \Delta\varepsilon_i + \\ &\quad + a_0 \sum_{i=1}^{n-m-1} \frac{E_i}{E} \Delta\varepsilon_i - \sum_{i=1}^{n-m-1} a_i \Delta\varepsilon_i \end{aligned} \quad (1.17)$$

Справедливость формул (1.11) — (1.13) доказана методом полной индукции. Сравнивая найденные величины (1.9) — (1.12) и (1.16), легко найдем

$$\frac{\varepsilon_{n-m}'' - \varepsilon_{n-m-1}''}{\Delta\varepsilon_{n-m}} = \frac{1}{2E} (2E - \sqrt{EE_{n-m}} - E_{n-m}) \quad (1.18)$$

Если неограниченно увеличивать количество отрезков (фиг. 2), в пределе при $n \rightarrow \infty$ ломаная перейдет в дугу кривой $\sigma = f(\epsilon)$, также имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta \epsilon_i} = \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_{n-m}'' - \epsilon_{n-m-1}''}{\Delta \epsilon_{n-m}} = \frac{d\epsilon_m''}{d\epsilon_m}$$

Равенство (1.18) в пределе переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{d\epsilon''}{d\epsilon} = \frac{1}{2E} \left(2E - \sqrt{E \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}} - \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} \right) \tag{1.19}$$

Значок m опущен, так как уравнение (1.19) справедливо для любой точки кривой. Решая уравнение (1.19), найдем

$$\epsilon'' = \epsilon - \frac{1}{2VE} \int \sqrt{\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}} d\epsilon - \frac{1}{2E} f(\epsilon) + C \tag{1.20}$$

Формула (1.20) связывает на волне разгрузки значение деформаций в области разгрузки ϵ'' с деформациями в области нагружения ϵ .

Тем же методом найдем связь между скоростями частиц на волне разгрузки $v' = v''$ с деформациями частиц в области нагружения ϵ :

$$v' = v'' = \frac{1}{2V\rho E} f(\epsilon) - \frac{1}{2V\rho} \int \sqrt{\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}} d\epsilon + C_1 \tag{1.21}$$

Заметим, что в пределе $\epsilon' = \epsilon''$. Картина явления такова. Остаточные скорость частиц v' имеют различные значения вдоль длины стержня. Вследствие этого образуется вторичная волна с деформациями ϵ'' .

Если значение ϵ'' достигнет ϵ_0 , то на этом исследование можно закончить. Остаточные деформации будут убывать от $\epsilon_{\max} - \sigma_{\max}/E$ до ϵ_0 .

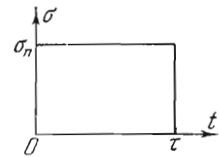
Из фиг. 2 видно, что может случиться так, что ϵ'' будет равняться ϵ , которое больше ϵ_0 , т. е. $\sigma' = \sigma > \sigma_0$. Тогда разгрузка прекратится. Вправо будет продолжаться движение начальных деформаций.

Влево пойдет образовавшаяся вновь вторичная волна с деформациями ϵ'' . Разгрузка начнется вновь, когда эта волна, отраженная от левого конца стержня, догонит волну первичную. В этом случае в стержне появится участок постоянных пластических деформаций.

§ 2. Рассмотрим случай, когда давление на конце стержня мгновенно возникает в момент времени $t = 0$, некоторое время остается постоянным и затем мгновенно падает до нуля в момент времени $t = \tau$ (фиг. 8). Деформации предполагаем упруго пластическими.

В формулах (1.20) и (1.21) определим произвольные постоянные из условия появления остаточных деформаций на конце стержня в момент $t = \tau$. Имеем

$$\begin{aligned} \epsilon_n'' &= \epsilon_n - \frac{\sigma_n}{E} && \text{при } \epsilon = \epsilon_n = \epsilon_{\max} \\ v_n' &= v_n + \frac{\sigma_n}{V\rho E} && \text{при } \epsilon = \epsilon_n \end{aligned}$$



Фиг. 8

В результате вычислений для постоянных C и C_1 получим следующие значения

$$C = \left[\frac{1}{2V\rho E} \int \sqrt{\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}} d\epsilon \right]_{\epsilon=\epsilon_n} - \frac{\sigma_n}{2E} \tag{2.1}$$

$$C_1 = v_n + \frac{\sigma_n}{2V\rho E} + \left[\frac{1}{2V\rho} \int \sqrt{\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}} d\epsilon \right]_{\epsilon=\epsilon_n} \tag{2.2}$$

Таким образом, будем иметь

$$\varepsilon'' = \varepsilon + \frac{1}{2\sqrt{E}} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_n} \sqrt{\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}} d\varepsilon - \frac{1}{2E} (f(\varepsilon) + \sigma_n) \quad (2.3)$$

$$v' = v'' = v_n + \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_n} \sqrt{\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}} d\varepsilon + \frac{1}{2\sqrt{\rho E}} [f(\varepsilon) + \sigma_n] \quad (2.4)$$

Приведем также значение скорости частиц на волне разгрузки в области разгрузки:

$$v'' = v - \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_n} \sqrt{\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}} d\varepsilon + \frac{1}{2\sqrt{\rho E}} [f(\varepsilon) + \sigma_n] \quad (2.5)$$

где v — значение скорости частиц в области нагружения.

Из фиг. 2 видно, что значение напряжения после разгрузки

$$\sigma'' = E\varepsilon'' - E\varepsilon + f(\varepsilon) \quad (2.6)$$

Подставив (2.3) в (2.6), найдем

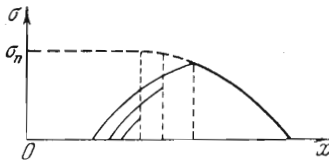
$$\sigma'' = \frac{\sqrt{E}}{2} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_n} \sqrt{\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}} d\varepsilon + \frac{1}{2} [f(\varepsilon) - \sigma_n] \quad (2.7)$$

Если здесь деформации выразить через напряжения и скорости распространения волн, то получится известная формула [4]

$$\sigma'' = \frac{1}{2} \int_{\sigma}^{\sigma_n} \left(\frac{a_0}{a} - 1 \right) d\sigma \quad (2.8)$$

Мы видим, что, в то время как интенсивность первичного напряжения $\sigma = f(\varepsilon)$ падает, интенсивность вторичного напряжения σ'' возрастает (фиг. 9).

Когда интенсивность первичного фронта волны σ станет равной интенсивности вторичного фронта волны σ'' , разгрузка прекратится. В самом деле, если в (2.7) положить $\sigma = \sigma''$, то получим



Фиг. 9

$$\sigma'' = \sqrt{E} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_n} \sqrt{\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}} d\varepsilon - \sigma_n \quad (2.9)$$

Подставив сюда σ_n из (2.5), найдем

$$\sigma'' + 2\sqrt{\rho E} v' = \sigma + 2\sqrt{\rho E} v, \quad \text{или} \quad v' = v$$

так как $\sigma'' = \sigma$. Скорости частиц правее и левее фронта сильного разрыва равны. Разгрузка начнется вновь, когда отраженная от левого конца стержня волна σ'' догонит тыл первичной волны.

Заметим, что этого явления не может получиться на участке постоянных остаточных деформаций, так как там равны между собой остаточные скорости.

Картина разгрузки представлена на фиг. 10. По оси x отложена длина стержня, по оси t время. Расходящиеся из начала координат прямые суть мгновенно возникшие волны Римана [1], параллельные прямые — волны, соответствующие участку постоянных максимальных деформаций.

Разгрузка представлена отрезками прямых $\tau a, ab, b_2c, cd, d_2e, ef$ и т. д.

Участок стержня Oa_1 имеет постоянные остаточные деформации, значение которых

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_n - \frac{F(\tau)}{E} \quad (2.11)$$

Длина этой зоны, как видно из чертежа, равна

$$l_1 = Oa_1 = \frac{a_0 a_n}{a_0 - a_n} \tau \quad (2.12)$$

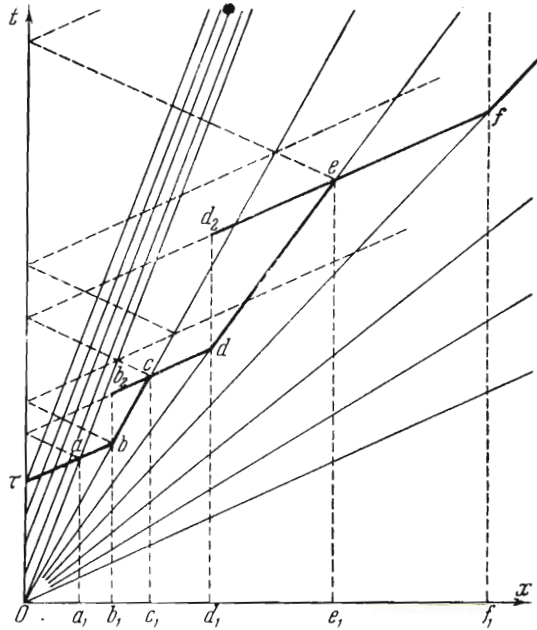
Точка b стержня, где впервые прекратилась разгрузка, определяется из уравнения

$$\sqrt{E} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_n} \sqrt{\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}} d\varepsilon - f(\varepsilon) = \sigma_n \quad (2.13)$$

которое получилось из (2.5) в предположении, что $v'' = v$.

Пусть решение уравнения (2.13) будет $\varepsilon = \varepsilon_{n-1}$, тогда остаточные деформации на участке $a_1 b_1$ стержня убывают до

$$\varepsilon_2^* = \varepsilon_{n-1} - \frac{f(\varepsilon_{n-1})}{E} \quad (2.14)$$



Фиг. 10

Длина этой зоны будет определяться следующим выражением:

$$l_2 = a_1 b_1 = \frac{\tau a_0 a_{n-1} + l_1 a_{n-1} - l_1 a_0}{a_0 - a_{n-1}} = \frac{a_0^2 (a_{n-1} - a_n)}{(a_0 - a_n)(a_0 - a_{n-1})} \tau \quad (2.15)$$

Отрезок стержня $b_1 c_1$ — вторая зона постоянных остаточных деформаций, значение которых уже известно; оно равно ε_2^* . Длина этой зоны

$$\begin{aligned} l_3 = b_1 c_1 &= \frac{\tau a_0 a_{n-1} + (3l_1 + l_2) a_{n-1} - (l_1 + l_2) a_0}{a_0 - a_{n-1}} = \\ &= \frac{2a_0 a_{n-1} a_n}{(a_0 - a_{n-1})(a_0 - a_n)} \tau \end{aligned} \quad (2.16)$$

Точка d стержня определяется из уравнения (2.13), в котором следует положить $\sigma_n = f(\varepsilon_{n-1})$. Имеем

$$\sqrt{E} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_{n-1}} \sqrt{\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}} d\varepsilon - f(\varepsilon) = f(\varepsilon_{n-1}) \quad (2.17)$$

Пусть решение уравнения (2.17) будет $\varepsilon = \varepsilon_{n-2}$; тогда на участке $c_1 d_1$ остаточные деформации убывают от ε_2^* до

$$\varepsilon_3^* = \varepsilon_{n-2} - \frac{f(\varepsilon_{n-2})}{E} \quad (2.18)$$

Длина этой зоны остаточных деформаций

$$l_4 = c_1 d_1 = \frac{\tau a_0 a_{n-2} + (3l_1 + l_2 + l_3) a_{n-2} - (l_1 + l_2 + l_3) a_0}{a_0 - a_{n-2}} = \frac{a_0^2 (a_0 + a_n) (a_{n-2} - a_{n-1})}{(a_0 - a_n) (a_0 - a_{n-1}) (a_0 - a_{n-2})} \tau \quad (2.19)$$

Легко найдем дальше:

$$l_{2k} = \frac{\tau a_0 a_{n-k} + [(2k-1)l_1 + (2k-3)(l_2 + l_3) + \dots + 3(l_{2k-4} + l_{2k-3}) + l_{2k-2} + l_{2k-1}] a_{n-k}}{a_0 - a_{n-k}} - \frac{(l_1 + l_2 + \dots + l_{2k-2} + l_{2k-1}) a_0}{a_0 - a_{n-k}} \quad (2.20)$$

$$l_{2k+1} = \frac{\tau a_0 a_{n-k} + [(2k+1)l_1 + (2k-1)(l_2 + l_3) + \dots + 3(l_{2k-2} + l_{2k-1}) + l_{2k}] a_{n-k}}{a_0 - a_{n-k}} - \frac{(l_1 + l_2 + \dots + l_{2k-1} + l_{2k}) a_0}{a_0 - a_{n-k}} \quad (2.21)$$

Во всех формулах

$$a_i = \left(\sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}} \right)_{\varepsilon=\varepsilon_i} \quad (2.22)$$

Таким образом, имеется возможность определить как длины участков постоянных и переменных остаточных деформаций, так и их абсолютные значения.

Если давление на конце стержня возрастало и затем мгновенно ушло до нуля, участков постоянных остаточных деформаций в стержне не будет. Разгрузка представится прямой линией $x = a_0 t + \tau$ (фиг. 11).

Это ясно из того, что отраженная волна здесь будет следовать непосредственно с фронтом сильного разрыва. В этом случае формулой (1.20) можно воспользоваться для исследования распределения остаточных деформаций вдоль длины стержня. В самом деле, $\sigma = F(t)$ и $\sigma = f(\varepsilon)$; откуда

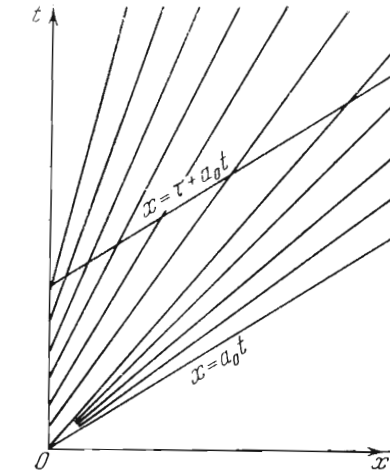
$$F(t) = f(\varepsilon) \quad (2.23)$$

С другой стороны,

$$\frac{dx}{dt} = a_n = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}}$$

или

$$x = \int_0^{\tau} \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}} d\varepsilon = F_1(\varepsilon, t, \tau) \quad (2.24)$$



Фиг. 11

Исключая из уравнений (2.23) и (2.24) время t , а также ε при помощи (1.20), можно определить расстояние x данной остаточной деформации от конца стержня.

Поступила 18 I 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматуллин Х. А. О распространении волны разгрузки. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 1.
2. Ленский В. С. Вестник Московского университета. 1949. № 3.
3. Рахматуллин Х. А., Шапиро Г. С. О распространении плоских упруго-пластических волн. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 4.
4. White and Le van Griffis. Journ. of mech. 1947. Vol. 14. No 4.