Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ В НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ, КОГДА ФУНКЦИЯ СИЛ НЕ ЕСТЬ МАКСИМУМ

Н. Г. Четаев

(Москва)

Вопрос, поставленный Ляпуновым [1] о характере положений равновесия, в которых функция сил не имеет максимума, разрешен для наиболее широкого класса случаев в статье [2].

Однако элементарное доказательство в этой статье было предложено только для одного случая, когда функция сил представляет однородную функцию степени m

$$U = U_m$$

которая вблизи изучаемого положения равновесия материальной системы для численно сколь угодно малых значений переменных q_s может принимать положительные значения, или когда $U = U_m + U_{m+1} + \cdots$, а положительный знак функций $U_m + U_{m+1} + \cdots$ и $mU_m + (m+1)\,U_{m+1} + \cdots$ определяется по членам наименее высокого порядка U_m без необходимости рассматривать члены высших порядков.

Случай этот включает доказанный Ляпуновым [1] случай, когда функция сил в рассматриваемом положении равновесия имеет минимум и этот минимум узнается по членам наименее высокого порядка, которые действительно имеются в разложении этой функции. В настоящей заметке излагаются элементарные доказательства для других, более сложных случаев.

1. Пусть даны дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где X_s представляют заданные функции от переменных $t, x_1, \ldots, x_n$. Функции X_s будем предполагать разлагающимися в степенные ряды по x_i, когда $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ не превосходит некоторого предела, с коэффициентами, являющимися ограниченными, непрерывными функциями t. Будем предполагать также, что все функции X_s обращаются в нуль при

$$x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$$

Назовем невозмущенное (тривиальное решение $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ *устойчивым*, если для всякого положительного числа A, как бы мало оно ни было, можно указать другое положительное число λ такое, что при любых начальных вещественных значениях $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ $(t_0 = 0)$, удовлетворяющих неравенству

$$x_{10}^2 + \cdots + x_{n0}^2 \leqslant \lambda$$

будет иметь место неравенство

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 < A$$

для всех положительных значений t.

В противном случае решение будет неустойчивым.

2. Для доказательства неустойчивости можно пользоваться теоремой с двумя функциями [2]. Во избежание недоразумений напомним условные понятия, принятые в формулировке теоремы.

«При решении вопросов о неустойчивости целесообразно рассматривать интервал изменения времени (t_0, ∞) закрытым.

Если некоторая область $V > 0$ не является пустой ни для какого t на рассматриваемом закрытом интервале изменения времени, условимся говорить, что эта область существует».

При этих определениях интервала времени и смысла существования области $V > 0$ имеет место следующая теорема:

Теорема. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что

1) для некоторой допускающей бесконечно малый высший предел функции V существует[1] область, где $V'V > 0$,

2) и если для некоторых значений величин x_s, численно сколь угодно малых, в этой области $(VV' > 0)$ возможно выделить область[2], где некоторая функция $W > 0$, на границе которой $W = 0$ значения полной производной по времени W' суть одного какого-либо определенного знака,

то невозмущенное движение неустойчиво.

3. Если интервал изменения времени считать открытым и не вводить условного смысла существования области $V > 0$, то можно пользоваться следующей теоремой о неустойчивости [3].

Функцию $W(t, x_1, \ldots, x_n)$ условимся называть *определенно положительной* в области $V > 0$, если она может обращаться в нуль в этой области лишь на границе $V = 0$ и если для произвольного положительного ε, как бы мало оно ни было выбрано, найдется такое отличное от нуля положительное число l, что при x_s, удовлетворяющих условию $V > \varepsilon$, и для всякого $t \geqslant t_0$ имеет место неравенство

$$W \geqslant l$$

Теорема. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию V, ограниченную в области $V > 0$, существующей при всяком $t \geqslant t_0$ и для сколь угодно малых по абсолютной величине значений переменных x_s, производная которой V' в силу этих уравнений была бы определенно положительной в области $V > 0$,— то невозмущенное движение неустойчиво.

4. Пусть некоторая материальная система стеснена не зависящими от времени t голономными связями; пусть n обозначает число степеней свободы, а $q_1, \ldots, q_n$ обозначают голономные лагранжевы координаты системы.

Живая сила такой системы T представит определенно-положительную квадратичную форму от импульсов p_s, сопряженных с координатами. Не уменьшая общности в исследовании, допустим для упрощений вида рассматриваемых в дальнейшем формул, что переменные q_s выбраны так, чтобы живая сила в отвечающих импульсах имела вид:

$$T = \frac{1}{2} \sum (\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta})\, p_\alpha p_\beta$$

где $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ обозначают функции переменных $q_1, \ldots, q_n$, уничтожающиеся, когда последние все делаются нулями; $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, т. е. $\delta_{\alpha\beta}$ равны нулю, когда α и β различны между собой, и $\delta_{\alpha\beta}$ равно 1, когда $\alpha = \beta$.

Пусть на материальную систему действуют некоторые консервативные силы с функцией сил $U(q_1, \ldots, q_n)$ и пусть положение $q_1 = 0, \ldots, q_n = 0$ является положением равновесия материальной системы.

---

[1] Существует в принятом смысле, т. е. существует никогда на замкнутом интервале времени (t_0, ∞) не пустая область $VV' > 0$.

[2] Возможно выделить существующую в принятом смысле область $W > 0$.

Уравнения статики дают для положения равновесия

$$\frac{\partial U}{\partial q_s} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Нас будет интересовать случай, когда в области $q_1^2 + \cdots + q_n^2 \leqslant l$ значения функции сил U при соответствующем выборе переменных $q_1, \ldots, q_n$, численно как угодно малых, всегда могут быть сделаны положительными.

Дифференциальными уравнениями возмущенных движений системы вблизи рассматриваемого невозмущенного ее положения равновесия будут уравнения динамики, которые возьмем в канонической форме Гамильтона

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где функция Гамильтона

$$H = T - U$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

5. Пусть функция сил имеет вид:

$$U = U_m + U_{m+1} + \cdots + U_{k-1} + U_k + U_{k+1} + \cdots$$

в котором все однородные формы $U_m, \ldots, U_{k-1}$ постоянно отрицательны, формы $U_{k+1}, U_{k+2}, \ldots$ постоянно положительны, а форма U_k знакопеременная, причем функция

$$U_m + U_{m+1} + \cdots + U_{k-1} + U_k$$

для численно достаточно малых значений переменных $q_1, \ldots, q_n$ может быть сделана положительной.

Вопрос разрешается функцией

$$V = -H \sum p_s q_s$$

Ее полная производная по времени

$$V' = -H\Big[2T - \frac{1}{2}\sum_{s,\alpha,\beta} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_s} q_s p_\alpha p_\beta + kU + (m-k)\, U_m +$$
$$+ (m+1-k) U_{m+1} + \cdots - U_{k-1} + U_{k+1} + 2U_{k+2} + \cdots\Big]$$

в не пустой по условиям области $V > 0$, определенной совместными неравенствами

$$-H > 0, \qquad \sum p_s q_s > 0$$

для численно достаточно малых значений переменных q_s, будет определенно-положительной в указанной области $V > 0$. В силу теоремы п. 3 мы должны заключить о неустойчивости равновесия.

6. Пусть функция сил имеет вид:

$$U = -abq_1^2 + (a+b)\, q_1 q_2^2 - q_2^4 \qquad (b > a)$$

где a, b — некоторые положительные постоянные.

В этом случае вопрос о неустойчивости изучаемого положения равновесия $q_1 = 0, \ldots, q_n = 0$ разрешается рассмотрением функции

$$V = -H\left(q_1 p_1 + \frac{1}{2} q_2 p_2 + q_3 p_3 + \cdots + q_n p_n\right)$$

Полная производная по времени от этой функции в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения есть

$$V' = -H\left(p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + p_3^2 + \cdots + p_n^2 + \sum Q_{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + 2U\right)$$

где $Q_{\alpha\beta}$ — голоморфные функции переменных $q_1, \ldots, q_n$, обращающиеся в нуль при $q_1 = 0, \ldots, q_n = 0$.

В не пустой области $V > 0$, определенной совместными неравенствами

$$-H > 0, \qquad q_1p_1 + \frac{1}{2}q_2p_2 + q_3p_3 + \cdots + q_np_n > 0$$

в достаточной близости от начала координат

$$\sum q_s^2 + \sum p_s < \varepsilon$$

значения производной V' будут положительными. А так как V и V' не зависят явно от времени, то V' будет определенно-положительной в указанной области $V > 0$. В силу теоремы о неустойчивости п. 3 мы должны заключить о неуйстойчивости равновесия $q_1 = 0, \ldots, q_n = 0$.

7. Пусть силовая функция имеет вид:

$$U = -abq_1^2 + (a+b)\,q_1q_2^2 - q_2^5$$

где a, b — некоторые поинжительные постоянные, $b > a$, При $q_2 = 0$ силовая функция представляет постоянно отрицательную функцию — abq_1^2; следовательно, существует расположенная в области $q_2 < 0$ область $U > 0$.

Вопрос о неустойчивости отвечающего этой функции U положения равновесия $q_1 = 0, \ldots, q_n = 0$ разрешается рассмотрением функции

$$V = -H\sum p_sq_s$$

Ее полная производная по времени есть

$$V' = -H\left(2T - \frac{1}{2}\sum_{s,\alpha,\beta}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_s}\,q_sp_\alpha p_\beta + 3U + abq_1^2 - 2q_2^5\right)$$

В не пустой области C, определенной совместными неравенствами

$$-H > 0, \qquad \sum p_sq_s > 0, \qquad q_2 < 0$$

и расположенной согласно первому из неравенств в области $U > 0$, функция V положительна; в достаточной близости от начала координат

$$\sum q_s^2 + \sum p_s^2 < \varepsilon$$

значения производной V' также будут положительны. По теореме п. 3 исследуемое положение равновесия неустойчиво.

8. Рассмотрим более общий случай; пусть:

1) для численно сколь угодно малых значений q_s таких, что

$$q_1^2 + \cdots + q_n^2 \leqslant l$$

существует некоторая область C, в которой функция сил

$$U > 0$$

2) существуют некоторые непрерывные в C вместе со своими частными производными первого порядка функции f_s переменных $q_1, \ldots, q_n$, обладающие свойствами: все они уничтожаются, когда все переменные q_s равны нулю; все главные диагональные миноры функционального определителя

$$\frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (q_1, \ldots, q_n)}$$

ограничены снизу положительными числами в области C; функция

$$\sum \frac{\partial U}{\partial x_s} f_s$$

определенно положительна в области C.

Очевидно, согласно условию 2, что в области C, где $U > 0$, не существует никаких положений равновесия рассматриваемой материальной системы, а внутри области C неравенства

$$U > U_0 > 0$$

определяют собой n-мерные, непустые и открытые на $q_1^2 + \cdots + q_n^2 = l$ многообразия для любого U_0, отвечающего произвольной точке C и для достаточно малого положительного числа l.

Рассмотрим функцию

$$V = -H \sum p_s f_s$$

Ее полная производная по времени есть

$$V' = -H\left(\sum \frac{\partial f_s}{\partial q_j} \frac{\partial T}{\partial p_j} p_s - \sum \frac{\partial T}{\partial q_s} f_s + \sum \frac{\partial U}{\partial q_s} f_s\right)$$

В не пустой и расположенной в C области D, определенной дополнительными неравенствами

$$-H > 0, \qquad \sum p_s f_s > 0$$

функция V положительна; в достаточной близости от изучаемого положения равновесия

$$\sum p_s^2 + \sum q_s^2 < \varepsilon$$

значения производной V' согласно условию 2 будут определенно-положительны в области D.

Согласно теореме п. 3 это доказывает, что в этом случае положение равновесия $q_1 = 0, \ldots\ldots, q_n = 0$ неустойчиво.

Поступила 1 XI 1951

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Journal de Mathématiques. 1897. Т. 3.
2. Четаев Н. Г. О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум. Ученые записки Казанского университета. 1938.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат. 1946.