Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

А. В. Драгилев

(Сыктывкар)

В последние годы в связи с развитием теории нелинейных колебаний большое внимание математиков и физиков привлекло нелинейное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \qquad (1)$$

Некоторые частные случаи этого уравнения были разобраны в работах Э. и А. Картана[1], А. Лиэнара[2], А. А. Андронова[3]. Весьма общий результат получил В. С. Иванов[4], и затем Н. Левинсон и О. К. Смит[5].

В настоящей работе дается аналитический критерий существования периодического решения уравнения (1), а также одна теорема сравнения.

Рассмотрим предварительно уравнение (1) в частном случае, когда $g(x) = x$.

Теорема I. Если уравнение

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0 \qquad (2)$$

имеет периодическое решение, то уравнение

$$\ddot{y} + F(\dot{y}) + y = 0, \qquad F(u) = \int_0^u f(x)\,dx \qquad (3)$$

также имеет периодическое решение.

Доказательство. Известно (см., например, [7]), что один из неопределенных интегралов решения уравнения (2) является решением уравнения (3). Если уравнение (2) обладает периодическим решением, то производная (а значит, и вторая производная) некоторого решения уравнения (3) будет периодической. Из уравнения (3) видно, что данное решение будет периодическим.

Следствие 1. Уравнение (3) обладает по крайней мере одним периодическим решением, если

1) функция $F(u)$ дифференцируема,

2) выполняется неравенство $uF(u) < 0$ при достаточно малых $|u| \neq 0$,

3) существуют числа $M > 0$, k, k' $(k' < k)$ такие, что $F(u) > k$ при $u > M$ и $F(u) < k'$ при $u < -M$.

Действительно, уравнение (2), соответствующее уравнению (3), в силу п. 1 существует и в силу пп. 2 и 3 обладает периодическим решением (см.[6]).

Следствие 2. Если $x(t)$ решение уравнения (2), обладающее периодом ω, то

$$J = \int_0^\omega x(t)\,dt = 0$$

Согласно теореме I по крайней мере один из неопределенных интегралов решения $x(t)$ уравнения (2) должен быть периодическим. При $J \neq 0$ все интегралы функции $x(t)$ были бы непериодическими.

В дальнейшем рассматривается вопрос о существовании периодических решений уравнения (1) или соответствующей системы

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = -f(x, v)\,v - g(x) \qquad (4)$$

Следующая теорема является усилением теоремы, доказанной Левинсоном и Смитом в[5].

Теорема II. Уравнение (1) имеет по крайней мере одно периодическое решение

1) если функция $g(x)$ такова, что $xg(x)>0$ для $|x|>0$ и

$$\int_0^{\pm\infty} g(x)\,dx=\infty$$

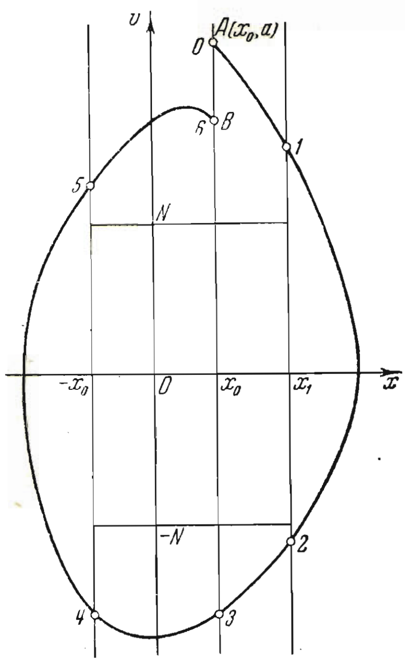
2) если $f(0, 0)<0$ и существует такое $x_0>0$, что $f(x, v)\geqslant 0$ для $|x|\geqslant x_0$; далее, если существует такое $M>0$, что для $|x|\leqslant x_0\ f(x, v)\geqslant -M$, и такое $x_1>x_0$, что

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, v)\,dx\geqslant 4Mx_0+\alpha \qquad (\alpha>0)$$

где $v(x)$ — произвольная убывающая функция (положительная) от x.

При этом $g(x)$ и $f(x, v)$ предполагаются удовлетворяющими условиям Липшица в любой ограниченной области.

Доказательство. Докажем существование предельного цикла у системы (4) в условиях теоремы II. Рассмотрим функцию



Фиг. 1

$$\lambda(x, v)=\frac{1}{2}v^2+G(x)$$

где

$$G(x)=\int_0^x g(x)\,dx$$

В силу системы (4)

$$\frac{d\lambda}{dt}=v\dot v+g(x)\dot x=-v^2f(x, v)$$

Следовательно, функция $\lambda(x, v)$ убывает вдоль интегральных кривых системы (4) при $|x|>x_0$, так как $f(x, v)\geqslant 0$ при $|x|>x_0$ и так как $f(0, 0)<0$ и $f(x, v)$ — непрерывная функция, возрастает вдоль интегральных кривых в окрестности начала координат; $\lambda(x, v)=c$ есть уравнение семейства вложенных одна в другую простых замкнутых кривых, окружающих начало координат, причем возрастанию c соответствует переход на внешние кривые семейства. Следовательно, ни одна интегральная кривая системы (4) не может примыкать к началу координат при возрастании t.

Известно, что интегральные кривые системы (4) являются спиралями, окружающими начало координат. В силу теорем Бендиксона[8], чтобы доказать теорему II, достаточно установить существование такой дуги AB интегральной кривой, начинающейся в точке $A(x_0, a)$, у которой ордината точки B следующего пересечения с прямой $x=x_0$ при $v>0$ меньше a (фиг. 1).

Очевидно, что, каково бы ни было число N, ординату a можно выбрать такой большой, что модули ординат всех тех точек дуги AB, для которых $-x_0\leqslant x\leqslant x_1$ будут больше N. Воспользуемся равенством

$$\frac{dv}{dx}=-f(x, v)-\frac{g(x)}{v} \tag{5}$$

Для участка 01, интегрируя по дуге AB, получим

$$v_1 - v_0 = -\int_{x_0}^{x_1} f(x, v)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} \frac{g(x)}{v}\,dx < -\int_{x_0}^{x_1} f(x, v)\,dx$$

Отсюда

$$v_1 - v_0 < -4Mx_0 - \alpha \tag{6}$$

Для участка 12, так как функция

$$\lambda(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + G(x)$$

убывает на участке *12* дуги AB, а значения функции $G(x)$ в точках *1* и *2* одинаковы, имеем

$$|v_2| - v_1 \leqslant 0 \tag{7}$$

Для участка 23, замечая, что функция $\lambda(x, v)$ убывает вдоль дуги AB, имеем

$$\frac{1}{2}v_3^2 + G(x_0) \leqslant \frac{1}{2}v_2^2 + G(x_1) \quad \text{или} \quad v_3^2 - v_2^2 \leqslant 2[G(x_1) - G(x_0)]$$

Отсюда

$$|v_3| - |v_2| \leqslant \frac{2[G(x_1) - G(x_0)]}{|v_3| + |v_2|} < \frac{G(x_1) - G(x_0)}{N} \tag{8}$$

Для участка 34 имеем

$$v_4 - v_3 = -\int_{x_0}^{-x_0} f(x, v)\,dx - \int_{x_0}^{-x_0} \frac{g(x)}{v}\,dx$$

Отсюда

$$|v_4| - |v_3| < \int_0^{x_0} \frac{g(x)}{N}\,dx + \int_{-x_0}^{x_0} M\,dx = 2Mx_0 + \frac{G(x_0)}{N} \tag{9}$$

Для участка 45, так как $\lambda(x, v)$ убывает вдоль дуги AB, получим

$$v_5 - |v_4| \leqslant 0 \tag{10}$$

Для участка 56 аналогичным путем находим

$$v_0 - v_5 = -\int_{-x_0}^{x_0} f(x, v)\,dx - \int_{-x_0}^{x_0} \frac{g(x)}{v}\,dx < \int_{-x_0}^{x_0} M\,dx + \int_0^{-x^0} \frac{g(x)}{N}\,dx =$$

$$= 2Mx_0 + \frac{G(-x_0)}{N} \tag{11}$$

Складывая полученные неравенства (6) — (11), имеем

$$v_6 - v_0 \leqslant -\alpha + \frac{G(x_1) + G(-x_0)}{N} \tag{12}$$

Правая часть отрицательна при $N > [G(x_1) + G(-x_6)] / \alpha$, что завершает доказательство теоремы II. Рассмотрим теперь наряду с системой (4) систему

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = -f^*(x, v)\,v - g(x) \tag{13}$$

Теорема III. Пусть для системы (4) и (13) выполняются условия.

1°. Функции $f(x, v)$ и $f^*(x, v)$ непрерывны всюду, кроме, быть может, оси x, и удовлетворяют условию Липшица в любой ограниченной области, не содержащей точек оси x.

2°. В окрестности начала координат $f(x, v) < 0$.

3°. Функция $g(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица на любом конечном интервале, причем $xg(x) > 0$ при $|x| > 0$.

4°. Функция $f(x, v) \geqslant f^*(x, v)$.

Тогда из существования периодического решения системы (13) вытекает существование периодического решения системы (4).

Эта теорема имеет простой физический смысл. Если автоколебательная система (13) обладает периодическим решением, то самовозбужденная автоколебательная система (4), отличающаяся от (13) большим затуханием, также обладает периодическим решением.

Доказательство. Будем опираться на два факта: 1) ни одна интегральная кривая (4) не примыкает к началу координат при возрастании t в силу условия 2. теоремы III (см. доказательство предыдущей теоремы); 2) решения системы (4) зависит от начальных условий непрерывно (так как направления поля системы (4) на оси x вертикальны независимо от $f(x, v)$, эту непрерывную зависимость можно «продолжить» через линию разрыва).

Пусть L — замкнутая интегральная кривая системы (13), а Γ — область, ею ограниченная. Из (13) следует, что x возрастает при $v > 0$ и убывает при $v < 0$; область Γ содержит начало координат и вертикаль, проходящая через любую точку из Γ, пересекает L в двух точках, одна из которых в полуплоскости $v > 0$, другая — в полуплоскости $v < 0$.

Из условия 4° теоремы III следует, что в точках, в которых направления полей (4) и (14) не совпадают, интегральная кривая системы (4) входит внутрь Γ. Следовательно, интегральная кривая системы (4) может a priori покидать $\bar{\Gamma}$ (замыкание Γ) при возрастании t лишь в точках, где направления полей (4) и (13) совпадают. Отвергнув последнюю возможность, мы в силу 1° и известных теорем Бендиксона[8] получим доказательство теоремы сравнения.

Пусть интегральная кривая, проходящая через точку A, покидает впервые $\bar{\Gamma}$ (при возрастании t) в точке B на L.

В силу 2° существует окрестность точки A, все интегральные кривые которой покидают $\bar{\Gamma}$ в окрестности точки B на кривой L. Из предыдущего следует, что в указанной окрестности точки B на кривой L направления полей (4) и (13) совпадают и в силу единственности участок интегральной кривой системы (4), проходящей через B, совпадает с участком L в окрестности точки B, что противоречит предположению о том, что интегральная кривая системы (4) покидает $\bar{\Gamma}$ в точке B.

Замечание. Незначительно изменив доказательство, можно убедиться, что теорема III остается справедливой, если $f(x, v)$ и $f^*(x, v)$ будут иметь разрывы также вдоль отдельных прямых, параллельных оси v, если только $f(x, v)$ и $f^*(x, v)$ удовлетворяет условию Липшица в любой ограниченной области, не содержащей линии разрыва.

Поступила 9 VII 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartan E. and H. Note sur la génération des oscillations entretenues, Annales des Postes Télégraphes et Téléphones. Déc. 1925.
2. Liénard A. Étude des oscillations entretenues, Revue Générale d'Électricité. 1928. Vol. 23.
3. Andronov A. A. Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues. Comptes Rendus. Paris. 1929. Vol. 189.
4. Иванов В. С. Обоснование одной гипотезы Ван-дер-Поля в теории автоколебаний. Ученые записки Ленинградского университета. 1940. № 10.
5. Levinson N. and Smith O. A general equation of relaxation oscillations Duke Mathem. Journ. 1942. Vol. 9.
6. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат. М.— Л. 1949. Изд. 2. Стр. 152—161.
7. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. Гостехиздат. 1948. Изд. 2.
8. Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Успехи математических наук. 1941. № 9.