

О НЕКОТОРЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Г. И. Баренблатт

(Москва)

При ламинарном движении газа в пористой среде с постоянной пористостью, если давление и плотность газа связаны между собой политропическим законом, плотность газа ρ удовлетворяет уравнению Л. С. Лейбензона ^[1]

$$c \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta \rho^k \quad (k = n + 1) \quad (0.1)$$

Здесь c — константа, определяемая пористостью и проницаемостью среды, вязкостью газа и показателем политропы n . В случае плоских волн или движений с цилиндрической или сферической симметрией это уравнение принимает вид:

$$c \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^s \frac{\partial \rho^k}{\partial x} \right] = \frac{1}{x^s} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^s k \rho^{k-1} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] \quad (k \geq 1, 0 \leq x \leq \infty) \quad (0.2)$$

где x — координата, $s = 0, 1$ или 2 , в зависимости от того, рассматриваются ли плоские волны или движения с цилиндрической или сферической симметрией.

При одномерном движении несжимаемой жидкости в пористой среде под действием силы тяжести для напора H имеет место уравнение Буссинеска ^[1],

$$c \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{x^s} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^s \frac{\partial H^2}{\partial x} \right] \quad \left(c = \frac{2m\nu}{kg} \right) \quad (0.3)$$

где m — пористость среды, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости, k — коэффициент проницаемости среды, g — ускорение силы тяжести, $s = 0$ или 1 в зависимости от того, имеют ли место плоские волны или движения с цилиндрической симметрией. Это же уравнение отвечает изотермическому движению газа.

В данной работе при помощи теории размерностей ^[2] строятся точные автомодельные решения уравнения движения газа в пористой среде при начальных и краевых условиях, представляющих практический интерес ¹.

§ 1.1°. В случае плоских волн уравнение (0.1) имеет вид:

$$c \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial^2 \rho^k}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

Построим решения этого уравнения при начальном условии

$$\rho(x, 0) \equiv 0 \quad (1.2)$$

и одном из краевых условий

$$\rho(0, t) = \sigma t^p \quad (p \geq 0) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \rho^k(0, t)}{\partial x} = -\tau t^q \quad (q \geq 0) \quad (1.4)$$

¹ После того как статья была сдана в печать, автору стала известна работа Я. Б. Зельдовича и А. С. Компанейца ^[4], в которой имеются некоторые из результатов, приводимых здесь.

где σ , τ — положительные константы. Эти краевые условия отвечают изменению плотности или потока газа в начальной плоскости по степенному закону, в частности постоянству их. Остановимся сперва на условии (1.3)¹. Отметим размерности следующих величин:

$$[c] = [\rho]^{k-1} L^{-2} T, \quad [\sigma] = [\rho] T^{-p}, \quad [x] = L, \quad [t] = T \quad (1.5)$$

величина ρ зависит от переменных c , σ , x , t . Так как $[\sigma t^p] = [\rho]$, то

$$\rho = \sigma t^p F(c, \sigma, x, t) \quad (1.6)$$

где F — безразмерная функция своих переменных, т. е. функция единственной безразмерной комбинации, которую можно из них составить, а именно величины

$$\xi = x (\sigma^{k-1} t^{1+p} c^{-1})^{-1/k} \quad (1.7)$$

Таким образом, $\rho = \sigma t^p f(\xi)$. Подстановка этого выражения в уравнение (1.1) дает для $f(\xi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 f^k}{d\xi^2} + \frac{1+p(k-1)}{2} \xi \frac{df}{d\xi} - pf = 0 \quad (1.8)$$

Из условия (1.3) имеем начальное условие для f :

$$f(0) = 1 \quad (1.9)$$

Вторым условием будет

$$f(\infty) = 0 \quad (1.10)$$

причем из сравнения с классическим уравнением теплопроводности ясно, что стремление к нулю должно быть очень быстрым.

Рассматривая уравнение (1.1) при условиях (1.2) и (1.4), получим

$$\rho = \left(\frac{\tau^2}{c} t^{2q+1} \right)^{\frac{1}{k+1}} f_1 \left(x \tau^{\frac{1-k}{k+1}} c^{\frac{k}{k+1}} t^{\frac{q(1-k)-k}{k+1}} \right) \quad (1.11)$$

где $f_1(\xi)$ удовлетворяет уравнению (1.8) при $p = (2q+1)/k+1$.

Из условия (1.4) имеем начальное условие

$$\frac{df^k(0)}{d\xi} = -1 \quad (1.12)$$

вторым условием попрежнему будет условие (1.10)

Заметим, что условие (1.10) можно представить для обеих задач в другом виде. Именно, интегрируя после умножения на ξ уравнение (1.8) от 0 до ∞ и учитывая быстрое стремление $f(\xi)$ к нулю на бесконечности, а также условие (1.9), получим

$$\int_0^\infty \xi f(\xi) d\xi = \frac{1}{1+pk} \quad (1.13)$$

¹ П. Я. Кочина впервые в работе [3] рассмотрела эту задачу при $k=2$ и условии $\varphi(x, 0) = \rho_0 = \text{const} \neq 0$ и $p=0$.

Точно так же, интегрируя (1.8) от 0 до ∞ , полагая $p = (2q + 1) / k + 1$ и используя условие (1.12), имеем

$$\int_0^{\infty} f_1(\xi) d\xi = \frac{1}{1+q} \quad (1.14)$$

2°. Перейдем к движениям с цилиндрической или сферической симметрией. В этом случае уравнение (0.1) запишется в виде

$$c \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{x^s} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^s \frac{\partial \rho^k}{\partial x} \right] \quad (1.15)$$

где $s = 1$ или 2. Задача решения этого уравнения при условиях (1.2) и (1.3) лишена физического смысла. Интерес представляет рассмотрение уравнения (1.15) при начальном условии (1.2) и краевом условии

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^s \frac{\partial \rho^k(x, t)}{\partial x} = -\tau t^q \quad (q \gg 0) \quad (1.16)$$

которое отвечает степенному росту (в частности, постоянству) выхода газа с единицы длины оси симметрии или, в случае сферической симметрии из центра симметрии. Вполне аналогично п. 1° получим:

в случае цилиндрической симметрии

$$\rho = \tau \frac{1}{k} \frac{q}{t^{1/k}} f \left(x \tau \frac{1-k}{2k} c^{1/2} t \frac{q(1-k)-k}{2k} \right) \quad (1.17)$$

где $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f^k}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{df^k}{d\xi} + \frac{k+q(k-1)}{2k} \xi \frac{df}{d\xi} - \frac{q}{k} f = 0 \quad (1.18)$$

в случае сферической симметрии

$$\rho = (\tau^2 c t^{2q-1})^{\frac{1}{3k-1}} f \left(x \tau \frac{1-k}{3k-1} c^{\frac{k}{3k-1}} t \frac{q(1-k)-k}{3k-1} \right) \quad (1.19)$$

где $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f^k}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{df^k}{d\xi} + \frac{k+q(k-1)}{3k-1} \xi \frac{df}{d\xi} - \frac{2q-1}{3k-1} f = 0 \quad (1.20)$$

Из условия (1.16) получаем для уравнений (1.18) и (1.20) начальное условие

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^s \frac{df^k(\xi)}{d\xi} = -1 \quad (1.21)$$

Вторым условием снова будет (1.10), которое и в этих случаях может быть приведено к иной форме. Именно, умножая уравнения (1.18) и (1.20) соответственно на ξ и ξ^2 и интегрируя от нуля до бесконечности, получим, используя условие (1.21), иную форму условия (1.10) для этих уравнений:

$$\int_0^{\infty} \xi^s f(\xi) d\xi = \frac{1}{1+q} \quad (1.22)$$

3°. Рассмотрим случай $k = 1$. Уравнение (1.8) принимает вид:

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{df}{d\xi} - pf = 0 \quad (1.23)$$

Нетрудно проверить, что интегралом этого уравнения при условиях (1.9) и (1.10) будет

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{1/2\xi}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{4z^2}\right)^q e^{-z^2} \frac{dz}{z^2}$$

Интегралом уравнения (1.23) при $q = p - \frac{1}{2}$ и при условиях (1.10) и (1.12) будет

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{1/2\xi}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{4z^2}\right)^p e^{-z^2} dz$$

Интегралом уравнения (1.18) при $k = 1$ и условиях (1.10) и (1.21) будет

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{1/2\xi}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{4z^2}\right)^q \frac{e^{-z^2} dz}{z}$$

Интегралом уравнения (1.20) при $k = 1$ и условиях (1.10) и (1.21) будет

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{\xi} \int_{1/2\xi}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{4z^2}\right)^q e^{-z^2} dz$$

При стремлении ξ к бесконечности кривая $f(\xi)$ во всех случаях асимптотически стремится к оси абсцисс. Переходя к выражениям для плотности $\rho(x, t)$, мы видим, что плотность газа отлична от нуля при сколь угодно малых t для сколь угодно больших x , т. е. скорость распространения газа в случае $k = 1$ бесконечно велика. Далее мы увидим, что при k , отличных от единицы, это свойство не имеет места.

§ 2. Задача построения рассматриваемых решений в случае $k > 1$ привелась к интегрированию уравнения

$$\frac{d^2 f^k}{d\xi^2} + \frac{s}{\xi} \frac{df^k}{d\xi} + \beta \xi \frac{df}{d\xi} - \alpha f = 0 \quad (2.1)$$

где α и β — некоторые положительные константы при условиях (1.2) и (1.10). Нетрудно проверить, что так как $q < \infty$, то во всех трех случаях $s = 0, 1, 2$ справедливо неравенство

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{2}{k-1} \quad (2.2)$$

Имеют физический смысл решения $f(\xi)$, непрерывные с непрерывной производной $df^k/d\xi$. Первое требование объясняется необходимостью иметь непрерывную плотность, второе — непрерывный поток газа. При $f \neq 0$ последнее требование сводится к требованию непрерывности производной $df/d\xi$; для нас существенно то, что при $f = 0$ $df/d\xi$ может претерпевать конечный или даже бесконечный скачок при сохранении непрерывности $df^k/d\xi$.

Далее, решения $f(\xi)$ должны удовлетворять соотношению

$$\int_0^{\infty} \xi^s f(\xi) d\xi < \infty$$

что соответствует конечности общей массы газа в пространстве в каждый момент времени. Отсюда, умножая уравнение (2.1) на ξ^s и интегрируя от нуля до бесконечности, находим, что для всех решений $\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^s df^k/d\xi$ при $\xi \rightarrow 0$ является конечным числом.

Если $f(\xi)$ есть интеграл уравнения (2.1), то, как нетрудно проверить,

$$\Phi(\xi) = \mu^{-\frac{2}{k-1}} f(\mu\xi) \tag{2.3}$$

также будет интегралом этого уравнения. Таким образом, уравнение (2.1) допускает группу преобразований, не изменяющих вида уравнения, т. е. допускает понижение порядка. Действительно, полагая

$$f(\xi) = \xi^{\frac{2}{k-1}} \varphi(\eta), \quad \eta = \ln \xi$$

имеем уравнение

$$\begin{aligned} \varphi^{k-1} \varphi'' + \frac{2}{k-1} \left[\frac{k+1}{k-1} + s \right] \varphi^k + \left[\frac{3k+1}{k-1} + s \right] \varphi^{k-1} \varphi' + \\ + (k-1) \varphi^{k-2} \varphi'^2 + \frac{1}{k} \left(\frac{2\beta}{k-1} - \alpha \right) \varphi + \frac{\beta}{k} \varphi' = 0 \end{aligned}$$

Это уравнение не содержит независимой переменной; полагая поэтому $d\varphi/d\eta = \psi$ и рассматривая φ как независимую переменную, получим уравнение первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{1}{\varphi^{k-1} \psi} \left\{ \frac{2}{k-1} \left[\frac{k+1}{k-1} + s \right] \varphi^k + \left[\frac{3k+1}{k-1} + s \right] \varphi^{k-1} \psi + \right. \\ \left. + (k-1) \varphi^{k-2} \psi^2 + \frac{1}{k} \left(\frac{2\beta}{k-1} - \alpha \right) \varphi + \frac{\beta}{k} \psi \right\} \tag{2.4} \end{aligned}$$

Можно проследить, что для рассмотрения интегральных кривых уравнения (2.1), представляющих интерес для нашей задачи, нужно исследовать уравнение (2.4) в четвертом координатном углу вблизи оси ординат. Рассмотрим с этой целью прямые $\psi = -m\varphi$. На этих прямых

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{1}{m\varphi^k} \left\{ \frac{2}{k-1} \left[\frac{k+1}{k-1} + s \right] \varphi^k - \left[\frac{3k+1}{k-1} + s \right] m\varphi^k + (k-1) \varphi^k m^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{k} \left(\frac{2\beta}{k-1} - \alpha \right) \varphi - \frac{\beta}{k} m\varphi \right\} = \frac{1}{m\varphi^{k-1}} \left\{ \frac{1}{k} \left(\frac{2\beta}{k-1} - \alpha \right) - \frac{\beta}{k} m \right\} + O(1) \\ (m > 0) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $m > m_0 = 2/(k-1) - \alpha/\beta$, то $d\psi/d\varphi$ в достаточно малой окрестности начала координат отрицательно и сколь угодно велико; если $m < m_0$, то $d\psi/d\varphi$ в этой окрестности положительно и сколь угодно велико. В силу условия (2.2) прямая $\psi = -m_0\varphi$ лежит в четвертом координатном углу.

Пусть теперь $\psi \gg \varphi$. Тогда уравнение (2.4) примет вид:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -(k-1) \frac{\psi}{\varphi} - \frac{\beta}{k\varphi^{k-1}} + O\left(\frac{1}{\varphi^{k-2}}\right) \quad (2.5)$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\psi = \frac{C}{\varphi^{k-1}} - \frac{\beta}{k\varphi^{k-2}} + O\left(\frac{1}{\varphi^{k-3}}\right)$$

Это показывает, что интегральные кривые, прилегающие к оси ординат, разбиваются на два класса, смотря по тому, положительно ли C (кривые класса 1) или отрицательно (кривые класса 2). Уравнение кривой Ω , отвечающей $C=0$ и разделяющей эти два класса, будет

$$\psi = -\frac{\beta}{k\varphi^{k-2}} + O\left(\frac{1}{\varphi^{k-3}}\right)$$

Ни одна из кривых класса 1 и класса 2 не пересекает ось ψ в конечной точке. Кривые класса 1 при $\varphi \rightarrow 0$ стремятся к совпадению с прямой $\psi = -m_0\varphi$, т. е. для этих кривых в окрестности начала

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = -m_0\varphi + O(\varphi^2)$$

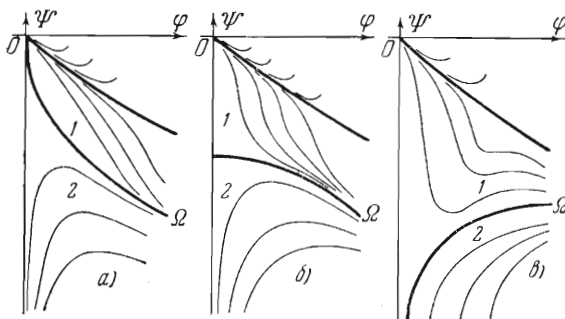
Отсюда, интегрируя это уравнение и переходя к f и ξ , получаем, что для кривых класса 1 при $\xi \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$f = D\xi^{\frac{\alpha}{\beta}} + o\left(\xi^{\frac{\alpha}{\beta}}\right) \quad (D \neq 0)$$

Кривые класса 2 имеют уравнение $\varphi^{k-1}\psi = C + O(\varphi)$ ($C < 0$). Но

$$\frac{df}{d\xi} = \xi^{\frac{3-k}{k-1}} \left[\frac{2}{k-1}\varphi + \psi \right] = \xi^{\frac{3-k}{k-1}} [\psi + O(\varphi)] \quad \text{при } \psi \gg \varphi$$

Отсюда следует, что для этих кривых при малых f имеет место



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \frac{df^k}{d\xi} &= kf^{k-1} \frac{df}{d\xi} = \\ &= kC\xi^{\frac{k+1}{k-1}} + O(f) \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{df^k}{d\xi} \rightarrow kC\xi_0^{\frac{k+1}{k-1}} \quad \text{при } f \rightarrow 0$$

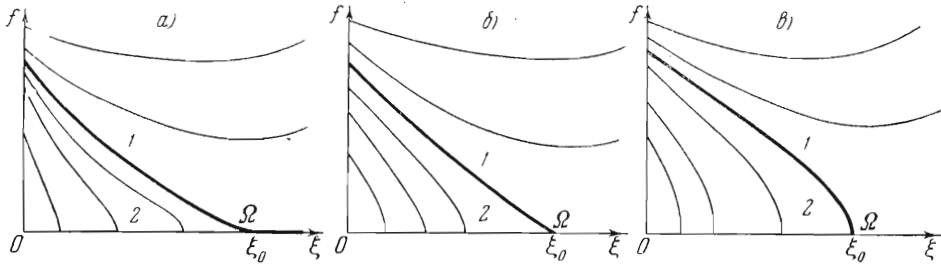
где ξ_0 — абсцисса точки встречи кривой $f(\xi)$ с осью абсцисс.

Расположение интегральных кривых уравнения (2.4) в интересующей нас области дано на фиг. 1. Перейдем к плоскости (ξ, f) и рассмотрим все интегральные кривые уравнения (2.1), удовлетворяющие условию (1.21). Кривые класса 1 ведут себя на бесконечности, как $f = D\xi^{\alpha/\beta}$, причем ни одна из них ни в какой точке не касается и не пересекает ось абсцисс.

Кривые класса 2 подходят к оси абсцисс под прямым углом, потому что при $f \rightarrow 0$ для этих кривых $f^{k-1}f'$ стремится к конечному пределу, отличному от нуля, т. е. $|f'| \rightarrow \infty$. Отделяющая кривая Ω при малых f удовлетворяет уравнению

$$f^{k-2}f' = -\frac{\beta}{k}\xi + O(f) \tag{2.6}$$

т. е. при $k < 2$ отделяющая кривая подходит к оси абсцисс, касаясь ее, при $k = 2$ — под углом ν , для которого $\text{tg } \nu = -\frac{1}{2}\beta\xi_0$, где ξ_0 — абсцисса



Фиг. 2

точки пересечения кривой Ω с осью абсцисс; при $k > 2$ отделяющая кривая подходит к оси абсцисс под прямым углом. Изображение интегральных кривых уравнения (2.1), удовлетворяющих условию (1.21), дано на фиг. 2. На этой фигуре изображен случай $s = 0$. Отличие в случаях $s = 1$ или 2 состоит в том, что при $\xi = 0$ все интегральные кривые, удовлетворяющие условию (1.21), будут уходить в бесконечность. На этой фигуре предполагается также, что $\alpha \neq 0$; в случае $\alpha = 0$ кривые класса 1 будут иметь горизонтальные асимптоты. Ни одна из кривых класса 1 не является искомым решением, так как $f(\infty) \neq 0$. Не подходит нам и решение, состоящее из отрезка любой кривой класса 2 до пересечения с осью абсцисс и далее оси абсцисс, так как это решение будет иметь разрыв величины $df^k/d\xi$ в точке пересечения. Действительно, подходя к точке пересечения по кривой класса 2, получим, что

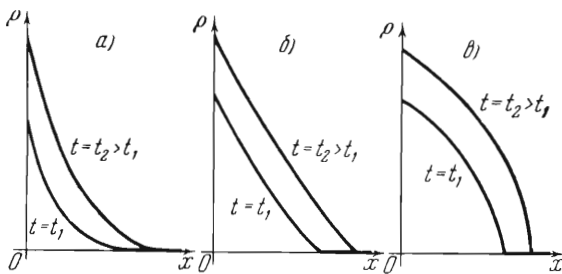
$$\frac{df^k}{d\xi} \rightarrow kC \xi_0^{\frac{k+1}{k-1}} \neq 0$$

где ξ_0 — абсцисса точки пересечения; подходя к точке пересечения по оси абсцисс, мы получим, что $df^k/d\xi \rightarrow 0$, так как $df^k/d\xi \equiv 0$ вдоль оси абсцисс. Единственной интегральной кривой, удовлетворяющей условиям (1.21) и (1.10), непрерывной и обладающей непрерывной величиной $df^k/d\xi$ будет кривая, состоящая из отрезка отделяющей кривой Ω до пересечения с осью абсцисс и далее оси абсцисс. Эта интегральная кривая и будет искомой функцией $f(\xi)$. Для ее определения можно поступить так. Построим решение уравнения второго порядка (2.1) так, чтобы для него $\xi_0 = 1$. Условие (1.21) при этом не будет выполнено. Для этого решения при $f \rightarrow 0$ имеет место (2.6). Отсюда следует, что

$$f(\xi) = (1 - \xi)^{\frac{1}{k-1}} \left[\frac{\beta}{k}(k-1) + c_1(1 - \xi) + c_2(1 - \xi)^2 + \dots \right]$$

Коэффициенты c_i этого ряда легко определяются последовательно из уравнения (2.1). Пользуясь этим рядом, составим ряд для $\xi^s df^k / d\xi$ по степеням $1 - \xi$. Сумма этого ряда при $\xi = 0$ по предыдущему конечна и может быть определена. Располагая этим решением, можно поэтому при помощи преобразования группы (2.3) найти $\Phi(\xi)$, удовлетворяющую также условию (1.21), выбирая надлежащим образом μ .

Заметим далее, что в случае плоских волн представляет интерес решение уравнения (2.1) при условиях (1.9) и (1.10). Зная решение $f(\xi)$ уравнения (2.1) при условиях (1.21) и (1.10), без труда получим и это решение. В самом деле, пусть $f(0) = \lambda$, где $\lambda > 0$ — некоторое число. Ищем решение уравнения (2.1) при условиях (1.9) и (1.10) в виде



Фиг. 3

$$\Phi(\xi) = \mu^{-\frac{2}{k-1}} f(\mu\xi)$$

По предыдущему $\Phi(\xi)$ удовлетворяет (2.1) и (1.10). Полагая

$$\mu = \lambda^{\frac{k-1}{2}},$$

получим, что $\Phi(\xi)$ удовлетворяет и условию (1.9).

Переходя от функции $f(\xi)$ к плотности $\rho(x, t)$, получим, что для некоторого момента времени график плотности будет иметь вид, изображенный на фиг. 3. Таким образом, для $k \neq 1$ характерным является то, что плотность газа в данной точке пространства становится отличной от нуля лишь по прошествии некоторого времени от начала процесса, т. е. скорость распространения газа конечна. Пусть ξ_0 — абсцисса точки, в которой $f(\xi)$ обращается в нуль. Тогда получим, что скорость распространения переднего фронта газа будет равна:

в случае плоских волн

$$v_0 = \xi_0 \sigma^{\frac{k-1}{2}} c^{-1/2} \frac{1+p(k-1)}{2} t^{\frac{p(k-1)-1}{2}}$$

если задана плотность в начальной плоскости;

$$v_1 = \xi_0 \tau^{\frac{k-1}{k+1}} c^{-\frac{k}{k+1}} \frac{k+q(k-1)}{k+1} t^{\frac{q(k-1)-1}{k+1}}$$

если задан поток газа в начальной плоскости;

в случае движений с цилиндрической симметрией

$$v_2 = \xi_0 \tau^{\frac{k-1}{2k}} c^{-1/2} \frac{k+q(k-1)}{2k} t^{\frac{q(k-1)-k}{2k}}$$

в случае движений со сферической симметрией

$$v_3 = \xi_0 \tau^{\frac{k-1}{3k-1}} c^{-\frac{k}{3k-1}} \frac{q(k-1)+k}{3k-1} t^{\frac{q(k-1)+1-2k}{3k-1}}$$

Как было указано выше, в случае $\alpha = 0$ интегральные кривые класса 1 имеют горизонтальные асимптоты. Это можно использовать для построения автомодельных решений уравнения (0.2), отвечающих условию $p(x, 0) = \rho_0 \equiv \text{const} \neq 0$ и краевым условиям рассмотренного вида при некоторых частных значениях q , приводящих к $\alpha = 0$, подобно тому, как это было сделано П. Я. Кочинной в случае $k = 2$, $q = -\frac{1}{2}$.

В заключение заметим, что указывались различные методы приближенного решения уравнения Лейбенсона (0.2)^{11, 31}, сводившие его к уравнению теплопроводности. Обычно это делалось так. В уравнении (0.2) выражение ρ^{k-1} в правой части заменялось на некоторое среднее $(\rho^*)^{k-1}$ и получалось уравнение теплопроводности $c_1 \partial \rho / \partial t = \partial^2 \rho / \partial x^2$.

Этот способ применим, если начальная плотность газа в пространстве отлична от нуля. В случае же, если начальная плотность газа в пространстве равна нулю, замена уравнения (0.2) уравнением теплопроводности ведет к тому, что утрачивается основная отличительная черта задачи — конечность скорости распространения газа.

§ 3. Рассмотрим частный пример: пусть газ распространяется изотермически плоскими волнами, пусть, далее, плотность газа в начальной плоскости растет по линейному закону, т. е. рассмотрим уравнение (0.2) при $k = 2$, $s = 0$ при условии (1.2) и условии (1.3) $p = 1$. Уравнение (1.8) для данного случая примет вид:

$$f f'' + f'^2 + \frac{1}{2} \xi f' - \frac{1}{2} f = 0 \tag{3.1}$$

Его решением при условиях (1.9) и (1.10) будет

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 - \xi/V\sqrt{2} & (0 \leq \xi \leq V\sqrt{2}) \\ 0 & (\xi \geq V\sqrt{2}) \end{cases} \tag{3.2}$$

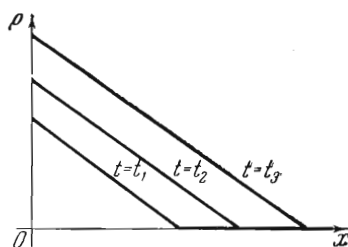
Поэтому

$$\rho(x, t) = \sigma t f\left(\frac{x}{V\sigma/c t}\right) = \begin{cases} \sigma \left(t - \frac{x}{V\sqrt{2\sigma/c}}\right) & 0 \leq x \leq V\sqrt{2\sigma/c} t \\ 0 & x \geq V\sqrt{2\sigma/c} t \end{cases}$$

Таким образом, график плотности представляет собой отрезок прямой перемещающийся параллельно самому себе (фиг. 4). Скорость распространения переднего фронта газа постоянна и равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\sigma}{c}} \tag{3.3}$$

Если линейной функцией времени является поток газа в начальной плоскости, т. е. если рассматриваемое уравнение Лейбенсона решается при условиях (1.2) и (1.4), $q = 1$, то, как легко видеть, для получения решения мы должны проинтегрировать уравнение (3.1) при условиях (1.12) и (1.10). По общему правилу строим искомое решение в виде



Фиг. 4

решения мы должны проинтегрировать уравнение (3.1) при условиях (1.12) и (1.10). По общему правилу строим искомое решение в виде

$\Phi(\xi) = \mu^{-2} f(\mu\xi)$, где $f(\xi)$ дается формулой (3.2). Выбирая $\mu = \sqrt[6]{2}$, получим, что соответствующее $\Phi(\xi)$ является искомым решением. Имеем, таким образом, для плотности газа

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \frac{\tau^{3/2}}{c^{3/2}} \left(\frac{t}{\sqrt[3]{2}} - \frac{x}{\sqrt[3]{4\tau/c^2}} \right) & 0 \leq x \leq \sqrt[3]{\frac{2\tau}{c^2}} t \\ 0 & x > \sqrt[3]{\frac{2\tau}{c^2}} t \end{cases}$$

и для скорости распространения переднего фронта газа

$$v_1 = \sqrt[3]{\frac{2\tau}{c^2}} \quad (3.4)$$

Этот же случай можно интерпретировать с точки зрения уравнения Буссинеска для движений несжимаемой жидкости. Подставляя поэтому в формулы (3.3) и (3.4) $c = 2m\nu/kg$ (см. ранее), получим

$$v_0 = \sqrt{\frac{\sigma kg}{m\nu}}, \quad v_1 = \sqrt[3]{\frac{\tau k^2 g^2}{2m^2 \nu^2}}$$

§ 4. Построим решения типа «мгновенного источника» для случая плоских волн, цилиндрической и сферической симметрии движения. Ищем решения уравнения (0.2) при условии (1.2) и условии

$$\int_0^{\infty} \rho x^s dx = C_s = \text{const} \quad (4.1)$$

которое отвечает постоянству общей массы газа в пространстве.

Замечая, что $[C_s] = [\rho] L^{s+1}$, в случаях плоских волн, цилиндрической и сферической симметрии соответственно получим:

$$\rho_0 = \left[\frac{c C_0^2}{t} \right]^{\frac{1}{k+1}} f_0 \left(x C_0^{-\frac{k-1}{k+1}} c^{\frac{1}{k+1}} t^{-\frac{1}{k+1}} \right) \quad (4.2)$$

$$\rho_1 = \left[\frac{c C_1}{t} \right]^{\frac{1}{k}} f_1 \left(x C_1^{-\frac{k-1}{k}} c^{\frac{1}{k}} t^{-\frac{1}{k}} \right) \quad (4.3)$$

$$\rho_2 = \left[\frac{c C_2^{3/2}}{t} \right]^{\frac{3}{3k-1}} f_2 \left(x C_2^{-\frac{k-1}{3k-1}} c^{\frac{1}{3k-1}} t^{-\frac{1}{3k-1}} \right) \quad (4.4)$$

где f_s удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_0^k}{d\xi^2} + \frac{1}{k+1} \xi \frac{df_0}{d\xi} + \frac{1}{k+1} f_0 &= 0 \\ \frac{d^2 f_1^k}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{df_1^k}{d\xi} + \frac{1}{2k} \xi \frac{df_1}{d\xi} + \frac{1}{k} f_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\frac{d^2 f_2^k}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{df_2^k}{d\xi} + \frac{1}{3k-1} \xi \frac{df_2}{d\xi} + \frac{3}{3k-1} f_2 = 0$$

и условиям

$$\int_0^{\infty} f_s(\xi) \xi^s d\xi = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^s \frac{df_s^k(\xi)}{d\xi} = 0 \quad (4.6)$$

Последнее условие получается из того, что источник является мгновенным. Левые части уравнений (4.5) с точностью до множителя точные производные, поэтому первые интегралы этих уравнений будут:

$$\frac{df_0^k}{d\xi} + \frac{1}{k+1} \xi f_0 = c_0, \quad \xi \frac{df_1^k}{d\xi} + \frac{1}{2k} \xi^2 f_1 = c_1, \quad \xi^2 \frac{df_2^k}{d\xi} + \frac{1}{3k-1} \xi^3 f_2 = c_2 \quad (4.7)$$

Из сходимости интеграла (4.6) следует, что $f_s(\xi) \xi^{s+1} \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$. Отсюда и из второго условия (4.6) имеем, что $c_0 = c_1 = c_2 = 0$.

Интегрируя соотношения (4.7) еще раз, получим:

$$f_s = \begin{cases} K_s (e_s - \xi^2)^{\frac{1}{k-1}} & (0 \leq \xi \leq \sqrt{e_s}) \\ 0 & (\xi \geq \sqrt{e_s}) \end{cases} \quad (s = 0, 1, 2) \quad (4.8)$$

Здесь

$$K_0 = \left[\frac{k-1}{2k(k+1)} \right]^{\frac{1}{k-1}}, \quad K_1 = \left[\frac{k-1}{4k^2} \right]^{\frac{1}{k-1}}, \quad K_2 = \left[\frac{k-1}{2k(3k-1)} \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (4.9)$$

Постоянные e_0, e_1, e_2 определятся из первого условия (4.6). Имеем:

$$\int_0^{\infty} f_s(\xi) \xi^s d\xi = K_s \int_0^{\sqrt{e_s}} (e_s - \xi^2)^{\frac{1}{k-1}} \xi^s d\xi = 1$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{e_s}} (e_s - \xi^2)^{\frac{1}{k-1}} \xi^s d\xi &= \frac{1}{2} e_s^{\frac{s+1}{2} + \frac{1}{k-1}} \int_0^1 \zeta^{\frac{s-1}{2}} (1 - \zeta)^{\frac{1}{k-1}} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2} e_s^{\frac{s+1}{2} + \frac{1}{k-1}} \Gamma\left(\frac{k}{k-1}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{s+1}{2} + \frac{k}{k-1}\right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} e_0 &= \left\{ 2 \left[\frac{2k(k+1)}{k-1} \right]^{\frac{1}{k-1}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{k-1}\right) \left[\Gamma\left(\frac{k}{k-1}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^{-1} \right\}^{\frac{2(k-1)}{k+1}} \\ e_1 &= \left\{ 2 \left[\frac{4k^2}{k-1} \right]^{\frac{1}{k-1}} \frac{k}{k-1} \right\}^{\frac{k-1}{k}} \\ e_2 &= \left\{ 2 \left[\frac{2k(3k-1)}{k-1} \right]^{\frac{1}{k-1}} \Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{k}{k-1}\right) \left[\Gamma\left(\frac{k}{k-1}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right]^{-1} \right\}^{\frac{2(k-1)}{3k+1}} \end{aligned}$$

Таким образом окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \left[\frac{cC_0^2}{t} \right]^{\frac{1}{k+1}} K_0 [e_0 - x^2 T_0^{-2}]^{\frac{1}{k-1}} & (0 \leq x \leq \sqrt{e_0} T_0) \\ \rho_1 &= \left[\frac{cC_1}{t} \right]^{\frac{1}{k}} K_1 [e_1 - x^2 T_1^{-2}]^{\frac{1}{k+1}} & (0 \leq x \leq \sqrt{e_1} T_1) \\ \rho_2 &= \left[\frac{cC_2^{2/3}}{t} \right]^{\frac{1}{3k-1}} K_2 [e_2 - x^2 T_2^{-2}]^{\frac{1}{k-1}} & (0 \leq x \leq \sqrt{e_2} T_2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

где K_0, K_1, K_2 даны формулами (4.9) и

$$T_0 = (C_0^{k-1} c^{-1} t)^{\frac{1}{k+1}}, \quad T_1 = (C_1^{k-1} c^{-1} t)^{\frac{1}{k}}, \quad T_2 = (C_2^{k-1} c^{-1} t)^{\frac{1}{3k-1}}$$

Для $x \geq \sqrt{e_s T_s}$ плотности ρ_0, ρ_1, ρ_2 тождественно равны нулю. В случае единичного источника

$$C_0 = 1, \quad C_1 = \frac{1}{2\pi}, \quad C_2 = \frac{1}{4\pi}$$

В частности при $k = 2$ имеем

$$e_0 = 18^{3/4}, \quad e_1 = 8, \quad e_2 = 150^{2/5}, \quad K_0 = \frac{1}{12}, \quad K_1 = \frac{1}{16}, \quad K_2 = \frac{1}{20}$$

Поэтому в этом случае единичными источниками будут

$$\rho_0 = \frac{18^{2/3}}{12} \left(\frac{c}{t}\right)^{1/3} [1 - x^2 \tau_0^{-2}] \quad (0 \leq x \leq \tau_0)$$

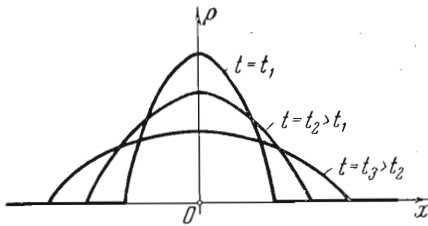
$$\rho_1 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{c}{t}\right)^{1/2} [1 - x^2 \tau_1^{-2}] \quad (0 \leq x \leq \tau_1)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{20} \left(\frac{75}{2\pi}\right)^{2/5} \left(\frac{c}{t}\right)^{3/5} [1 - x^2 \tau_2^{-2}] \quad (0 \leq x \leq \tau_2)$$

где

$$\tau_0 = \left(18 \frac{t}{c}\right)^{1/3}, \quad \tau_1 = \left(\frac{4}{\pi} \frac{t}{c}\right)^{1/2}, \quad \tau_2 = \left(\frac{75}{2\pi} \frac{t}{c}\right)^{1/5}$$

При $x > \tau_s$ плотность ρ_s тождественно равна нулю. На фиг. 5 изображен единичный источник для $k = 2$ и $s = 0$ в разные моменты времени. Можно показать, что при $k < 2$ кривая $\rho(x, t)$ при фиксированном t будет подходить к оси абсцисс, касаясь ее, а при $k > 2$ — под прямым углом. Легко заметить далее, что при $k \rightarrow 1$ выражения (4.10) для ρ_0, ρ_1, ρ_2 стремятся к известным выражениям для линейных источников.



Фиг. 5

Автор пользуется случаем принести искреннюю благодарность своему научному руководителю Л. И. Седову. Автор приносит также благодарность И. Н. Кочинной и А. М. Молчанову за ценное обсуждение.

Поступила 22 X 1951.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.—Л. 1947.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат. М. 1951.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении в частных производных, встречающемся в теории фильтрации. ДАН СССР. 1948. Т. 63. Вып. 6.
4. Зельдович Я. Б. и Компанеев А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М. 1950.