

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

В. К. Прокопов

(Ленинград)

Простые решения плоской задачи теории упругости в прямоугольных координатах получаются, если за функцию напряжений принимать алгебраические полиномы различных степеней. Таковы задачи о простом растяжении, чистом сдвиге и чистом изгибе прямоугольной полосы; более сложным нагрузкам соответствуют полиномы высоких степеней или тригонометрические ряды. При этом для поперечных кромок полосы ставятся смягченные граничные условия.

В работах П. Ф. Папковича^[1] и А. И. Лурье^[2] были построены решения, позволяющие более точно удовлетворять граничным условиям на поперечных кромках плиты или полосы. В работе автора^[3] решения Папковича—Лурье были применены к задаче изгиба круглой плиты осесимметричной нагрузкой. В настоящей работе тот же метод распространен на плоскую задачу для прямоугольной полосы, на поперечных кромках которой отсутствуют нормальные перемещения.

§ 1. В плоской задаче теории упругости напряжения могут быть представлены в виде производных одной бигармонической функции ψ :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (1.1)$$

Для плоского напряженного состояния перемещения можно найти по следующим формулам:

$$\begin{aligned} Eu &= P(x, y) - (1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial x} + F + \Omega y \\ Ev &= Q(x, y) - (1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial y} + H - \Omega x \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \operatorname{Re} \int (p + iq) dz \quad (z = x + iy) \\ Q(x, y) &= \operatorname{Im} \int (p + iq) dz, \quad p = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Функция q — гармоническая, сопряженная с p условиями Коши-Римана, а постоянные F , H , Ω определяют перемещения упругого тела как жесткого целого. Случай задачи о плоской деформации из (1.2) легко получить соответствующей заменой упругих постоянных.

Рассмотрим бигармонические функции ψ' и ψ^* — четную и нечетную относительно переменной y и удовлетворяющие условию

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)_{y=\pm b} = 0$$

т. е. не дающие согласно (1.1) касательных напряжений на продольных кромках $y = \pm b$.

Искомые функции запишем в виде

$$\begin{aligned}\psi'(x, y) &= (A \sin \alpha x + B \cos \alpha x) \Psi'(\alpha, y) \\ \psi^*(x, y) &= (C \sin \alpha x + D \cos \alpha x) \Psi^*(\alpha, y)\end{aligned}\quad (1.3)$$

причем

$$\begin{aligned}\Psi'(\alpha, y) &= (\operatorname{sh} \alpha b + \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) \operatorname{ch} \alpha y - \alpha y \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{sh} \alpha y \\ \Psi^*(\alpha, y) &= (\operatorname{ch} \alpha b + \alpha b \operatorname{sh} \alpha b) \operatorname{sh} \alpha y - \alpha y \operatorname{ch} \alpha b \operatorname{ch} \alpha y\end{aligned}\quad (1.4)$$

В выражениях (1.3) и (1.4) величины α , A , B , C и D — неопределенные постоянные, пока произвольные. Введем функции со штрихами

$$\begin{aligned}X'(\alpha, y) &= \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial y^2}, & Y'(\alpha, y) &= -\alpha^2 \Psi'(\alpha, y), & T'(\alpha, y) &= \alpha \frac{\partial \Psi'}{\partial y} \\ U'(\alpha, y) &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial y^2} + \nu \alpha \Psi'(\alpha, y), & V'(\alpha, y) &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^3 \Psi'}{\partial y^3} - (2 + \nu) \frac{\partial \Psi'}{\partial y}\end{aligned}\quad (1.5)$$

и аналогичные им функции со звездочками.

Выражения для напряжений и перемещений, соответствующих четной функции напряжений $\psi'(x, y)$, можно написать теперь кратко:

$$\begin{aligned}\sigma_x' &= (A \sin \alpha x + B \cos \alpha x) X'(\alpha, y) \\ \sigma_y' &= (A \sin \alpha x + B \cos \alpha x) Y'(\alpha, y) \\ \tau_{xy}' &= (B \sin \alpha x - A \cos \alpha x) T'(\alpha, y) \\ Eu' &= (B \sin \alpha x - A \cos \alpha x) U'(\alpha, y) \\ E\nu' &= (A \sin \alpha x + B \cos \alpha x) V'(\alpha, y)\end{aligned}\quad (1.6)$$

Напряжения и перемещения для нечетной функции напряжений $\psi^*(x, y)$ получаются из (1.6) при замене всех функций со штрихами функциями со звездочками, а постоянных A , B — постоянными C , D .

От решений, даваемых формулами (1.3) — (1.6), легко перейти к однородным решениям Папковича—Лурье, которые получаются при соблюдении еще одного условия, именно

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{y=b} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{y=-b} = 0$$

т. е. условия отсутствия нормальных напряжений σ_y на продольных кромках прямоугольника $y = \pm b$ в дополнение к уже выполненному ранее условию отсутствия касательных напряжений на этих же кромках. Это требование фиксирует отстававший до сих пор произвольным параметр α ; именно функциями напряжений для однородных (т. е. удовлетворяющих однородным граничным условиям) решений будут выражения

$$\begin{aligned}\psi_0^*(x, y) &= \left(A_k^\circ \sin \frac{\lambda_k x}{b} + B_k^\circ \cos \frac{\lambda_k x}{x} \right) \Psi^* \left(\frac{\lambda_k}{b}, y \right) \\ \psi_0^*(x, y) &= \left(C_k^\circ \sin \frac{\mu_k x}{b} + D_k^\circ \cos \frac{\mu_k x}{b} \right) \Psi^* \left(\frac{\mu_k}{b}, y \right)\end{aligned}\quad (1.7)$$

где λ_k и μ_k — корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda = 0, \quad \operatorname{sh} 2\mu - 2\mu = 0 \quad (1.8)$$

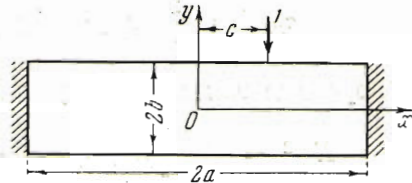
Общее выражение для однородной функции напряжений, соответствующей всем корням, будет

$$\psi_0(x, y) = \sum_k \left(A_k^\circ \sin \frac{\lambda_k x}{b} + B_k^\circ \cos \frac{\lambda_k x}{b} \right) \Psi' \left(\frac{\lambda_k}{b}, y \right) + \sum_k \left(C_k^\circ \sin \frac{\mu_k x}{b} + D_k^\circ \cos \frac{\mu_k x}{b} \right) \Psi^* \left(\frac{\mu_k}{b}, y \right) \quad (1.9)$$

§ 2. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для прямоугольной полосы, нагруженной единичной нормальной силой. Пусть края $x = a$, $x = -a$ заделаны; единичная сила приложена в точке $x = c$, $y = b$ (см. фигуру).

Сосредоточенную в точке $x = c$ силу можно представить в интервале $-a \leq x \leq a$ как предел функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } -a \leq x < c \\ p & \text{для } c \leq x \leq c + \epsilon \\ 0 & \text{для } c + \epsilon \leq x \leq a \end{cases} \quad (2.1)$$



при ϵ , стремящемся к нулю; при этом произведение $p\epsilon$ остается конечным и равно приложенной силе, т. е. единице. Учитывая (2.1), заменяем единичную силу, сосредоточенную в точке $x = c$, тригонометрическим рядом

$$f(x) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi c}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi c}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (2.2)$$

Граничные условия на продольных краях принимают тогда вид

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_{y=b} &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi c}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi c}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \\ (\sigma_y)_{y=-b} &= 0, \quad (\tau_{xy})_{y=b} = 0, \quad (\tau_{xy})_{y=-b} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

С точностью до постоянного слагаемого $(2a)^{-1}$ в $(\sigma_y)_{y=b}$ этим условиям можно удовлетворить, положив в решениях (1.6)

$$\alpha = \frac{n\pi}{a} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{-a}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi c}{a} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} + \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1}, & B &= \frac{-a}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi c}{a} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} + \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} \\ C &= \frac{-a}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi c}{a} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} - \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1}, & D &= \frac{-a}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi c}{a} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} - \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} \end{aligned}$$

и просуммировав их по n от 1 до ∞ . Для того чтобы удовлетворить условиям (2.3) полностью, нужно к выбранной функции напряжений

$$\psi_1 = -\frac{a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi(x-c)}{a} \left\{ \Psi' \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} + \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} + \Psi^* \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} - \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} \right\} \quad (2.5)$$

прибавить бигармонический полином

$$\psi_2 = \frac{1}{16ab^3} \left\{ \frac{y^5}{5} - x^2y^3 + 3b^2x^2y - \frac{2}{5}b^2y^3 + 2b^3x^2 \right\} + \\ + A(xy^3 - 3b^2xy) + By^3 + Cy^2 \quad (2.6)$$

Напряжения, соответствующие полиному ψ_2 , выражаются формулами

$$\sigma_x^{(2)} = \frac{1}{8ab^3} \left\{ 2y^3 - 3x^2y - \frac{6}{5}b^2y \right\} + 6Ax + 6By + 2C \\ \sigma_y^{(2)} = \frac{1}{8ab^3} \{ 3b^2y + 2b^3 - y^3 \} \\ \tau_{xy}^{(2)} = \frac{3}{8ab^3} x(y^2 - b^2) + 3A(b^2 - y^2) \quad (2.7)$$

Перемещения для ψ_1 найдутся по (1.6); перемещения для ψ_2 будут

$$Eu^{(2)} = \frac{1}{8ab^3} \left[(2 + \nu)xy^3 - x^3y - 3\left(\frac{2}{5} + \nu\right)b^2xy - 2\nu b^3x \right] + \\ + A\{3x^2y - (2 + \nu)y^3 + 3(1 + \nu)b^2y\} + 6Bxy + 2Cx \\ Ev^{(2)} = \frac{1}{8ab^3} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3\nu}{2}x^2y^2 - \frac{1+2\nu}{4}y^4 - \frac{3}{2}\left(\frac{8}{5} + \nu\right)b^2x^2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{2\nu}{5}\right)b^2y^2 + 2b^3y \right] + \\ + A\{3(1 + \nu)b^2x - x^3 - 3\nu xy^2\} - 3B(x^2 + \nu y^2) - 2\nu Cy \quad (2.8)$$

Добавляя к перемещениям (1.6) и (2.8) члены, характеризующие смещение упругого тела как жесткого целого:

$$Eu^* = \Omega y + F, \quad Ev^* = -\Omega x + H$$

получим возможность соответствующим выбором постоянных Ω , F , H закрепить горизонтальный (или вертикальный) элемент в точках $x = \pm a$, $y = 0$ заделанных сторон, что обычно и делают.

Указанное решение задачи известно. Оно удовлетворяет смягченным граничным условиям на закрепленных сторонах балки и поэтому не позволяет с полной достоверностью судить о напряжениях в заделке.

Воспользуемся теперь однородными решениями Папковича—Лурье (1.11), ничего не добавляющими к напряжениям на продольных сторонах прямоугольника и, следовательно, не нарушающими уже выполненных ранее краевых условий (2.3), для того чтобы удовлетворить условиям закрепления краев $x = \pm a$ более точно. Именно, поставим следующие условия:

при $x = a$

$$u = 0 \quad \text{для} \quad -b < y < b \quad (2.9)$$

$$v = 0 \quad \text{для} \quad y = 0 \quad (2.10)$$

при $x = -a$

$$u = 0 \quad \text{для} \quad -b < y < b \quad (2.11)$$

$$v = 0 \quad \text{для} \quad y = 0 \quad (2.12)$$

Таким образом, мы требуем отсутствия нормального к заделанному краю перемещения u вдоль всей границы. Условия (2.9) и (2.11) можно заменить им эквивалентными:

$$(u)_{x=a} + (u)_{x=-a} = 0, \quad (u)_{x=a} - (u)_{x=-a} = 0$$

что в развернутом виде дает

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{a} \left\{ U' \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} + \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} + \right. \\ & \quad \left. + U^* \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} - \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} \right\} - \\ & - \sum_k \left\{ A_k^\circ \cos \frac{\lambda_k a}{b} U' \left(\frac{\lambda_k}{b}, y \right) + C_k^\circ \cos \frac{\mu_k a}{b} U^* \left(\frac{\mu_k}{b}, y \right) \right\} + \\ & + A \{ 3[a^2 + (1 + \nu)b^2]y - (2 + \nu)y^3 \} + \Omega y + F = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} & \sum_k \left\{ B_k^\circ \sin \frac{\lambda_k a}{b} U' \left(\frac{\lambda_k}{b}, y \right) + D_k^\circ \sin \frac{\mu_k a}{b} U^* \left(\frac{\mu_k}{b}, y \right) \right\} + \\ & + \frac{1}{8b^3} \left\{ (2 + \nu)y^3 - \left[a^2 + 3 \left(\frac{2}{5} + \nu \right) b^2 \right] y - 2\nu b^3 \right\} + 6Bay + 2Ca = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Теперь требуется определить систему постоянных $A_k^\circ, B_k^\circ, C_k^\circ, D_k^\circ$ и постоянные A, B, C, Ω, F , чтобы условия (2.13) и (2.14) выполнялись. Для этого разложим ряды функций

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{a} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} + \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} U' \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) \\ S_2 &= \frac{a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{a} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} - \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} U^* \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

и функцию y^3 в ряды по неортогональным функциям $U'(\lambda_k/b, y)$ и $U^*(\mu_k/b, y)$, зависящим от корней трансцендентных уравнений (1.8). Разложения эти получаются при использовании теоремы о вычетах. Рассмотрим в плоскости комплексного переменного α следующие контурные интегралы:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{U'(\alpha, y) d\alpha}{\alpha^2 (\alpha^2 - n^2\pi^2/a^2) (\operatorname{sh} 2\alpha b + 2\alpha b)} \\ J_2 &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{U^*(\alpha, y) d\alpha}{\alpha^2 (\alpha^2 - n^2\pi^2/a^2) (\operatorname{sh} 2\alpha b - 2\alpha b)}, \quad J_3 = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{U^*(\alpha, y) d\alpha}{\alpha^2 (\operatorname{sh} 2\alpha b - 2\alpha b)} \end{aligned}$$

взятые по окружности достаточно большого радиуса R с центром в начале координат. Функции $U'(\alpha, y)$ и $U^*(\alpha, y)$ и их разложения в ряды будут

$$\begin{aligned} U'(\alpha, y) &= \{ (1 + \nu)\alpha^2 b \operatorname{ch} \alpha b - (1 - \nu)\alpha \operatorname{sh} \alpha b \} \operatorname{ch} \alpha y - (1 + \nu)\alpha^2 y \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{sh} \alpha y = \\ &= 2\nu b \alpha^2 + \left(\frac{1 + 2\nu}{3} b^2 - y^2 \right) b \alpha^4 + \dots \\ U^*(\alpha, y) &= \{ (1 + \nu)\alpha^2 b \operatorname{sh} \alpha b - (1 - \nu)\alpha \operatorname{ch} \alpha b \} \operatorname{sh} \alpha y - (1 + \nu)\alpha^2 y \operatorname{ch} \alpha b \operatorname{ch} \alpha y = \\ &= -2y \alpha^2 + \left(\nu b^2 - \frac{2 + \nu}{3} y^2 \right) y \alpha^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

Разложения в ряды по степеням α (1.8) будут

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} 2ab + 2ab &= 4ab + \frac{4}{3} \alpha^3 b^3 + \frac{4}{15} \alpha^5 b^5 + \dots \\ \operatorname{sh} 2ab - 2ab &= \frac{4}{3} \alpha^3 b^3 + \frac{4}{15} \alpha^5 b^5 + \frac{8}{315} \alpha^7 b^7 + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

Подинтегральная функция в J_1 имеет полюсы первого порядка в точках $\alpha = 0$, $\alpha = n\pi/a$, $\alpha = -n\pi/a$ и $\alpha = \lambda_k/b$, где k принимает значения, соответствующие всем корням трансцендентного уравнения (1.8), оказавшимся внутри контура интегрирования. Соответственным образом подинтегральная функция в J_2 имеет полюс третьего порядка в точке $\alpha = 0$ и полюсы первого порядка в точках $\alpha = n\pi/a$, $\alpha = -n\pi/a$, $\alpha = \mu_k/b$, а в J_3 — полюс третьего порядка в $\alpha = 0$ и первого порядка в $\alpha = \mu_k/b$ [μ_k — корни трансцендентного уравнения (1.8)]. Легко показать, что при беспредельном увеличении радиуса R контура интегрирования интегралы J_1 , J_2 , J_3 стремятся к нулю. С другой стороны, на основании теоремы о вычетах каждый такой интеграл равен сумме вычетов в полюсах подинтегральной функции. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{n^2 \pi^2} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} + \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} U' \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) + \\ + \frac{b^3}{4} \sum_k \frac{U'(\lambda_k/b, y)}{\lambda_k^2 (\lambda_k^2 - n^2 \pi^2 b^2 / a^2) \operatorname{ch}^2 \lambda_k} - \frac{\nu a^2}{2n^2 \pi^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{n^2 \pi^2} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} - \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} U' \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) + \frac{b^3}{4} \sum_k \frac{U^*(\mu_k/b, y)}{\mu_k^2 (\mu_k^2 - n^2 \pi^2 b^2 / a^2) \operatorname{sh}^2 \mu_k} + \\ + \frac{3a^4}{2b^3 \pi^4 n^4} y + \frac{3a^2}{4b^3 \pi^2 n^2} \left\{ \frac{2+\nu}{3} y^3 - \left(\nu + \frac{2}{5} \right) b^2 y \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\frac{b}{4} \sum_k \frac{U^*(\mu_k/b, y)}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} - \frac{(2+\nu)}{4b^3} y^3 + \frac{3}{4b} \left(\nu + \frac{2}{5} \right) y = 0 \quad (2.20)$$

Формулы (2.18) и (2.19) дают возможность представить каждый член ряда в (2.15) бесконечной суммой трансцендентных функций $U'(\lambda_k/b, y)$ или $U^*(\mu_k/b, y)$. Сами ряды (2.15) будут уже двойными суммами вида

$$\begin{aligned} S_1 = -\frac{\nu}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi c}{a} + \\ + \frac{b^3 \pi}{4a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_k \frac{(-1)^{n-1} n}{\lambda_k^2 (\lambda_k^2 - n^2 \pi^2 b^2 / a^2) \operatorname{ch}^2 \lambda_k} \sin \frac{n\pi c}{a} U' \left(\frac{\lambda_k}{b}, y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 = \frac{3a^2}{2b^3 \pi^3} y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \sin \frac{n\pi c}{a} - \\ - \frac{3a}{4\pi b^3} \left\{ \left(\nu + \frac{2}{5} \right) b^2 y - \frac{2+\nu}{3} y^3 \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi c}{a} + \\ + \frac{b^3 \pi}{4a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_k \frac{(-1)^{n-1} n}{\mu_k^2 (\mu_k^2 - n^2 \pi^2 b^2 / a^2) \operatorname{sh}^2 \mu_k} \sin \frac{n\pi c}{a} U' \left(\frac{\mu_k}{b}, y \right) \end{aligned}$$

Однако эти сложные выражения можно сильно упростить, меняя в двойных суммах порядок суммирования и используя соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx = \frac{x}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \sin nx = \frac{\pi^2 x - x^3}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - s^2} n \sin nx = \frac{\pi \sin sx}{2 \sin s\pi} \quad (-\pi < x < \pi)$$

а также формулу (2.20). Окончательно получаем разложения

$$\frac{a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{a} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} + \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} U' \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) =$$

$$= -\frac{\nu c}{4a} - \frac{b}{8} \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2 \operatorname{ch}^2 \lambda_k} \operatorname{csc} \frac{\lambda_k a}{b} \sin \frac{\lambda_k c}{b} U' \left(\frac{\lambda_k}{b}, y \right) \quad (2.21)$$

$$\frac{a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{a} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} - \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} U^* \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) =$$

$$= \frac{c(a^2 - c^2)}{8ab^3} y - \frac{b}{8} \sum_k \left\{ \sin \frac{\mu_k c}{b} \operatorname{csc} \frac{\mu_k a}{b} - \frac{c}{a} \right\} \frac{U^*(\mu_k/b, y)}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} \quad (2.22)$$

$$\frac{2 + \nu}{4b^3} y^3 = \frac{3}{4b} \left(\nu + \frac{2}{5} \right) y + \frac{b}{4} \sum_k \frac{U^*(\mu_k/b, y)}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} \quad (2.23)$$

Подставляя эти разложения в условия (2.13) и (2.14), получаем

$$-\frac{\nu c}{4a} - \frac{b}{8} \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2 \operatorname{ch}^2 \lambda_k} \operatorname{csc} \frac{\lambda_k a}{b} \sin \frac{\lambda_k c}{b} U' \left(\frac{\lambda_k}{b}, y \right) -$$

$$- \frac{b}{8} \sum_k \left\{ \sin \frac{\mu_k c}{b} \operatorname{csc} \frac{\mu_k a}{b} - \frac{c}{a} \right\} \frac{U^*(\mu_k/b, y)}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} + \frac{c(a^2 - c^2)}{8ab^3} y -$$

$$- \sum_k \left\{ A_k^\circ \cos \frac{\lambda_k a}{b} U' \left(\frac{\lambda_k}{b}, y \right) + C_k^\circ \cos \frac{\mu_k a}{b} U^* \left(\frac{\mu_k}{b}, y \right) \right\} +$$

$$+ 3 \left(a^2 + \frac{3}{5} b^2 \right) yA - b^4 A \sum_k \frac{U^*(\mu_k/b, y)}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} + \Omega y + F = 0 \quad (2.24)$$

$$\sum_k \left\{ B_k^\circ \sin \frac{\lambda_k a}{b} U' \left(\frac{\lambda_k}{b}, y \right) + D_k^\circ \sin \frac{\mu_k a}{b} U^* \left(\frac{\mu_k}{b}, y \right) \right\} + \frac{b}{8} \sum_k \frac{U^*(\mu_k/b, y)}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} -$$

$$- \frac{\nu}{4} - \frac{a^2}{8b^3} y + 6Bay + 2Ca = 0 \quad (2.25)$$

Из (2.24) и (2.25) следует, что для обращения в нуль перемещения u на закрепленных сторонах балки должны иметь место соотношения:

$$A_k^\circ = -\frac{b}{4\lambda_k^2 \operatorname{ch}^2 \lambda_k} \sin \frac{\lambda_k c}{b} \operatorname{csc} \frac{2\lambda_k a}{b}, \quad D_k^\circ = -\frac{b}{8\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} \operatorname{csc} \frac{\mu_k a}{b}$$

$$C_k^\circ = \frac{b(c - 8ab^3 A)}{8a\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} \operatorname{sec} \frac{\mu_k a}{b} - \frac{b}{4\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} \sin \frac{\mu_k c}{b} \operatorname{csc} \frac{2\mu_k a}{b}, \quad B_k^\circ = 0$$

$$B = \frac{a}{48b^3}, \quad C = \frac{\nu}{8a} \quad (2.26)$$

Подставляя найденные значения постоянных A_k° , B_k° , C_k° и D_k° в выражение для однородной функции напряжений (1.9), получим

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y) = & -\frac{b}{4} \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2 \operatorname{ch}^2 \lambda_k} \sin \frac{\lambda_k c}{b} \operatorname{csc} \frac{2\lambda_k a}{b} \sin \frac{\lambda_k x}{b} \Psi' \left(\frac{\lambda_k}{b}, y \right) - \\ & -\frac{b}{4} \sum_k \frac{1}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} \sin \frac{\mu_k c}{b} \operatorname{csc} \frac{2\mu_k a}{b} \sin \frac{\mu_k x}{b} \Psi^* \left(\frac{\mu_k}{b}, y \right) + \\ & + \frac{b}{8a} (c - 8ab^3 A) \sum_k \frac{1}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} \sec \frac{\mu_k a}{b} \sin \frac{\mu_k x}{b} \Psi^* \left(\frac{\mu_k}{b}, y \right) - \\ & - \frac{b}{8} \sum_k \frac{1}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} \operatorname{csc} \frac{\mu_k a}{b} \cos \frac{\mu_k x}{b} \Psi^* \left(\frac{\mu_k}{b}, y \right) \quad (2.27) \end{aligned}$$

Однако полученная однородная функция напряжений оказывается представленной комплексными рядами, ибо корни λ_k и μ_k трансцендентных уравнений (1.8) являются числами комплексными; это обстоятельство весьма затрудняет практическое использование полученного результата, поэтому выражение (2.27) следует предварительно преобразовать к вещественным рядам. Идея такого преобразования основана также на применении теоремы о вычетах к соответствующим интегралам в комплексной области. Именно, рассмотрим контурные интегралы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\sin \alpha c \sin \alpha x \Psi'(\alpha, y) d\alpha}{\alpha^2 (\operatorname{sh} 2\alpha b + 2\alpha b) \sin 2\alpha a}, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\cos \alpha x \Psi^*(\alpha, y) d\alpha}{\alpha^2 (\operatorname{sh} 2\alpha b - 2\alpha b) \sin \alpha a} \\ \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\sin \alpha c \sin \alpha x \Psi^*(\alpha, y) d\alpha}{\alpha^2 (\operatorname{sh} 2\alpha b - 2\alpha b) \sin 2\alpha a} \end{aligned}$$

За контур интегрирования выбирается, как и ранее, окружность радиуса R с центром в начале координат. Применяя теорему о вычетах и увеличивая бесконечно радиус контура интегрирования, получаем требуемые соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{cx}{4a} + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{2a} \left(\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} + \frac{n\pi b}{a} \right)^{-1} \sin \frac{n\pi x}{2a} \Psi' \left(\frac{n\pi}{2a}, y \right) + \\ + \frac{b}{4} \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2 \operatorname{ch}^2 \lambda_k} \sin \frac{\lambda_k c}{b} \operatorname{csc} \frac{2\lambda_k a}{b} \sin \frac{\lambda_k x}{b} \Psi' \left(\frac{\lambda_k}{b}, y \right) = 0 \quad (2.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{cxy(3b^2 - y^2)}{8ab^3} + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{2a} \left(\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} - \frac{n\pi b}{a} \right)^{-1} \sin \frac{n\pi x}{2a} \Psi^* \left(\frac{n\pi}{2a}, y \right) + \\ + \frac{b}{4} \sum_k \frac{1}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} \sin \frac{\mu_k c}{b} \operatorname{csc} \frac{2\mu_k a}{b} \sin \frac{\mu_k x}{b} \Psi^* \left(\frac{\mu_k}{b}, y \right) = 0 \quad (2.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y(3b^2 - y^2)(a^2 - 3x^2)}{24ab^3} - \frac{y(b^2 - y^2)^2}{40ab^3} + \\ + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} - \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} \cos \frac{n\pi x}{a} \Psi^* \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) + \\ + \frac{b}{4} \sum_k \frac{1}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} \operatorname{csc} \frac{\mu_k a}{b} \cos \frac{\mu_k x}{b} \Psi^* \left(\frac{\mu_k}{b}, y \right) = 0 \quad (2.30) \end{aligned}$$

Полагая в (2.29) $c = a$, получим еще одно соотношение:

$$\frac{xy(3b^2 - y^2)}{8b^3} + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \left[\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi b}{a} - \frac{(2n-1)\pi b}{a} \right]^{-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \times \\ \times \Psi^* \left[\frac{(2n-1)\pi}{2a}, y \right] + \frac{b}{8} \sum_k \frac{1}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} \sec \frac{\mu_k a}{b} \sin \frac{\mu_k x}{b} \Psi^* \left(\frac{\mu_k}{b}, y \right) = 0 \quad (2.31)$$

Используя (2.28) — (2.31), преобразуем (2.27) к виду:

$$\psi_0(x, y) = \frac{4a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{2a} \left(\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} + \frac{n\pi b}{a} \right)^{-1} \sin \frac{n\pi x}{2a} \Psi' \left(\frac{n\pi}{2a}, y \right) + \\ + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{2a} \left(\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} - \frac{n\pi b}{a} \right)^{-1} \sin \frac{n\pi x}{2a} \Psi^* \left(\frac{n\pi}{2a}, y \right) + \\ + \frac{4a}{\pi^2} \left(8b^3 A - \frac{c}{a} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \left[\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi b}{a} - \frac{(2n-1)\pi b}{a} \right]^{-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \times \\ \times \Psi^* \left[\frac{(2n-1)\pi}{2a}, y \right] + (3b^2 - y^2) Axy + \\ + \frac{a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} - \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} \cos \frac{n\pi x}{a} \Psi^* \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) + \\ + \frac{y(3b^2 - y^2)(a^2 - 3x^2)}{48ab^3} + \frac{y(b^2 - y^2)^2}{80ab^3} + \frac{cx}{4a} \quad (2.32)$$

Складывая однородную функцию (2.32) с функцией напряжений $\psi_1(x, y)$ (2.5) и бигармоническим полиномом $\psi_2(x, y)$ (2.6) и подставляя значения постоянных B и C из (2.26), получим выражение для функции напряжений, дающей решение плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы, две стороны которой заделаны (равны нулю нормальные перемещения), при нагрузке единичной сосредоточенной силой в пролете:

$$\psi(x, y; c) = \frac{a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} - \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} \cos \frac{n\pi x}{a} \Psi^* \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) - \\ - \frac{a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi c}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \left\{ \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} + \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} \Psi' \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) + \right. \\ \left. + \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} - \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} \Psi^* \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) \right\} + \frac{4a}{\pi^2} \left(8b^3 A - \frac{c}{a} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \times \\ \times \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \left(\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi b}{a} - \frac{(2n-1)\pi b}{a} \right)^{-1} \Psi^* \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}, y \right) + \\ + \frac{x^2 + y^2}{8a} + \frac{cx}{4x} + \frac{(5a^2 - b^2)y}{80ab} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi c}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \times \\ \times \left\{ \left(\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi b}{a} + \frac{(2n-1)\pi b}{a} \right)^{-1} \Psi' \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}, y \right) + \right. \\ \left. + \left(\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi b}{a} - \frac{(2n-1)\pi b}{a} \right)^{-1} \Psi^* \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}, y \right) \right\} \quad (2.33)$$

Дифференцируя (2.33), получаем напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} в изгибаемой полосе; в соответствие же с (1.2) для перемещения получим

$$\begin{aligned}
 E v(x, y) = & \frac{a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} - \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} \cos \frac{n\pi x}{a} V^* \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) - \\
 & - \frac{a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi c}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \left\{ \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} + \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} V' \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) + \right. \\
 & + \left. \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} - \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} V^* \left(\frac{n\pi}{a}, y \right) \right\} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi c}{2a} \times \\
 & \times \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \left\{ \left(\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi b}{a} + \frac{(2n-1)\pi b}{a} \right)^{-1} V' \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}, y \right) + \right. \\
 & + \left. \left(\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi b}{a} - \frac{(2n-1)\pi b}{a} \right)^{-1} V^* \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}, y \right) \right\} + \quad (2.34) \\
 & + \frac{4a}{\pi^2} \left(8b^3 A - \frac{c}{a} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \left(\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi b}{a} - \frac{(2n-1)\pi b}{a} \right)^{-1} \times \\
 & \times \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} V^* \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}, y \right) + \frac{(1-\nu^2)}{4a} y - (1+\nu) \frac{(5a^2-b^2)}{80ab} - \Omega^* x + H^*
 \end{aligned}$$

Аналогичной формулой выражается перемещение u . Постоянные Ω^* , H^* (и F^* в выражении для u) отличаются от постоянных Ω , H и F , написанных ранее (2.13), вследствие проделанных преобразований с рядами (2.27). Удовлетворяя условиям (2.9) — (2.12), получим следующие значения этих постоянных, а также коэффициента A :

$$\begin{aligned}
 H^* = (1+\nu) \frac{(5a^2-b^2)}{80ab} - \frac{a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ 1 - (-1)^n \cos \frac{n\pi c}{a} \right\} \left(\operatorname{sh} \frac{2n\pi b}{a} - \frac{2n\pi b}{a} \right)^{-1} V^* \left(\frac{n\pi}{a}, 0 \right) \\
 \Omega^* = 0, \quad F^* = \frac{(1+\nu)c}{4a}, \quad A = \frac{1}{8b^3} \left\{ \frac{c}{a} + \frac{\sum_1}{\sum_2} \right\} \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \sum_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi c}{2a} \left(\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi b}{a} - \frac{(2n-1)\pi b}{a} \right)^{-1} V^* \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}, 0 \right) \\
 \sum_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \left(\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi b}{a} - \frac{(2n-1)\pi b}{a} \right)^{-1} V^* \left(\frac{(2n-1)\pi b}{2a}, 0 \right)
 \end{aligned}$$

Формулы (2.33) и (2.35) дают решение поставленной задачи. В общем случае, когда на продольных кромках полосы приложены нормальные нагрузки $q^+(x)$ и $q^-(x)$, т. е.

$$(\sigma_y)_{y=b} = q^+(x), \quad (\sigma_y)_{y=-b} = q^-(x), \quad (\tau_{xy})_{y=b} = (\tau_{xy})_{y=-b} = 0$$

решение получается из (2.33) интегрированием по параметру c :

$$\varphi(x, y) = \int_{-a}^a \{ \psi(x, y; c) q^+(c) + \psi(x, y; -c) q^-(c) \} dc \quad (2.36)$$

§ 3. Рассмотрим предельный случай весьма тонкой полосы, который получится, если в (2.33) — (2.35) считать b/a малой величиной. Заметим, что при достаточно малом b/a

$$\operatorname{sh} 2ab - 2ab \approx \frac{4}{3} \alpha^3 b^3, \quad V^*(\alpha, 0) \approx -2\alpha \quad (3.1)$$

Учитывая (3.1), из (2.34) и (2.35) получим для прогиба средней линии

$$Ev(x, 0) = \frac{3a^3}{2\pi^4 b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left[1 - (-1)^n \cos \frac{n\pi c}{a} \right] \left[1 - (-1)^n \cos \frac{n\pi x}{a} \right] + \\ + \frac{24a^3}{\pi^4 b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \left\{ (-1)^n \left(\frac{c}{a} - 8b^3 A \right) + \sin \frac{(2n-1)\pi c}{2a} \right\} \quad (3.2)$$

$$\frac{c}{a} - 8b^3 A = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^4} \sin \frac{(2n-1)\pi c}{2a} \bigg/ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \quad (3.3)$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^4} \sin (2n-1)x = \frac{x^3 \pi}{24} - \frac{x\pi^3}{32} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad (3.5)$$

получим вместо (3.3)

$$\frac{c}{a} - 8b^3 A = \frac{3c}{2a} - \frac{c^3}{2a^3} \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.2), имеем

$$Ev(x, 0) = \frac{3a^3}{2\pi^4 b^3} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \left(\cos \frac{n\pi c}{a} + \cos \frac{n\pi x}{a} \right) \right\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos \frac{n\pi c}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \left\{ + \frac{24a^3}{\pi^4 b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \sin \frac{(2n-1)\pi c}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} + \right. \\ \left. + \frac{12(3a^2 - c^2)c}{\pi^4 b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^4} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \right\} \quad (3.7)$$

Для суммирования рядов, входящих в (3.7), имеем формулы (3.8)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} \cos nx = \frac{x^4}{48} - \frac{\pi^2 x^2}{24} + \frac{7\pi^4}{720} \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

Используя (3.4) и (3.8), получаем вместо (3.7)

$$Ev(x, 0) = \frac{1}{32ab^3} \left(\frac{22}{15} a^4 + c^4 - 2a^2 c^2 + x^4 - 2a^2 x^2 \right) - \\ - \frac{cx}{16a^2 b^3} (3a^2 - c^2)(3a^2 - x^2) + \frac{3a^3}{2\pi^4 b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi c}{a} + \\ + \frac{24a^3}{\pi^4 b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \sin \frac{(2n-1)\pi c}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \quad (3.9)$$

Последние два ряда в (3.9) представляют собой разрывные функции. Для их суммирования воспользуемся формулами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\xi \cos n\zeta}{n^4} = \begin{cases} \frac{1}{90} \pi^4 - \frac{1}{12} \pi^2 (\zeta^2 + \xi^2) + \frac{1}{12} \pi (3\zeta^2\xi + \xi^3) - \frac{1}{48} (\zeta^4 + 6\zeta^2\xi^2 + \xi^4) & \xi > \zeta \\ \frac{1}{90} \pi^4 - \frac{1}{12} \pi^2 (\zeta^2 + \xi^2) + \frac{1}{12} \pi (3\zeta\xi^2 + \zeta^3) - \frac{1}{48} (\zeta^4 + 6\zeta^2\xi^2 + \xi^4) & \xi < \zeta \end{cases} \quad (3.10)$$

причем $-\pi \leq \xi \leq \pi$, $-\pi \leq \zeta \leq \pi$, так что всегда имеет место неравенство $0 \leq |\xi + \zeta| \leq 2\pi$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1) \xi \sin (2n-1) \zeta}{(2n-1)^4} = \begin{cases} \frac{1}{8} \pi^2 \zeta \xi - \frac{1}{24} \pi (3\zeta\xi^2 + \zeta^3) & \xi > \zeta \\ \frac{1}{8} \pi^2 \zeta \xi - \frac{1}{24} \pi (3\zeta^2\xi + \xi^3) & \xi < \zeta \end{cases} \quad (3.11)$$

причем $-\frac{1}{2} \pi \leq \xi \leq \frac{1}{2} \pi$, $-\frac{1}{2} \pi \leq \zeta \leq \frac{1}{2} \pi$, так что всегда имеет место неравенство $0 \leq |\xi + \zeta| \leq \pi$.

Подставляя (3.10) и (3.11) в (3.9), получим

$$v(x, 0) = \begin{cases} \frac{(a+c)^2}{16Eab^3} \left[a(a-2c) + 3cx - 3x^2 + \frac{(2a-c)x^3}{a^2} \right] & x < c \\ \frac{(a-c)^2}{16Eab^3} \left[a(a+2c) + 3cx - 3x^2 - \frac{(2a+c)x^3}{a^2} \right] & x > c \end{cases} \quad (3.12)$$

что в точности соответствует элементарной теории изгиба балок.

Поступила 7 IV 1951

Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы. ДАН СССР. 1940. Т. XXVII. № 4.
2. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 2—3.
3. Прокопов В. К. Изгиб круглой плиты осесимметричной нагрузкой. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5.