

## ПЛОСКАЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРА, НАГРУЖЕННОГО УРАВНОВЕШЕННОЙ СИСТЕМОЙ ДВУХ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

К. Н. Шевченко

(Москва)

Из опыта известно, что при обработке давлением круглого цилиндра между плоскими бойками, достаточно широкими в направлении оси цилиндра, в центре цилиндра возникают трещины, а при поперечной прокатке пустоты [6].

В данной работе при помощи приближенной схемы делается попытка подойти к объяснению весьма сложного механизма образования полостей, для детального изучения которого понадобятся большие исследования. Рассматривается плоская задача о распределении пластической и упругой деформаций в сечении цилиндра, находящемся под действием двух сосредоточенных сил. В пластической области приближенное решение строится в предположении несжимаемости материала.

**§ 1. Постановка задачи и вывод исходных уравнений.** Будем решать задачу в биполярной системе координат, расположив сечение бесконечного круглого цилиндра так, как показано на фиг. 1, где приведены и обозначения.

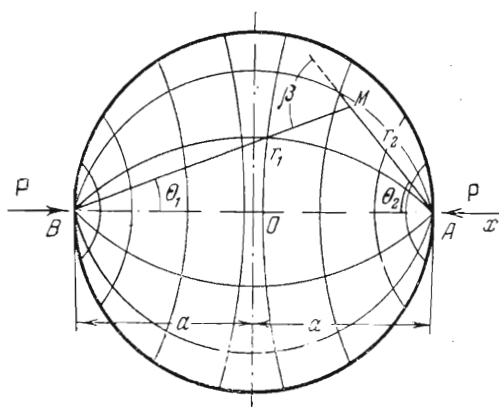
Положение точки  $M$  на плоскости в этой системе <sup>1</sup> определяется координатами  $\alpha$  и  $\beta$ , причем

$$\alpha = \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad \beta = \theta_1 - \theta_2 + \pi \quad (1.1)$$

Эти координаты связаны с декартовыми координатами  $x$  и  $y$ , отнесенными к параметру  $a$  (фиг. 1), формулами:

$$x = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (1.2)$$

$$y = \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}$$



Фиг. 1

Координатные линии  $\alpha = \text{const}$  и  $\beta = \text{const}$  представляют собой два семейства ортогональных окружностей:

$$(x - \operatorname{cth} \alpha)^2 + y^2 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha}, \quad (y + \operatorname{ctg} \beta)^2 + x^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} \quad (1.3)$$

<sup>1</sup> Подробное описание биполярных координат в применении к задачам теории упругости можно найти, например, в книге Я. С. Уфлянда [1].

При этом  $\alpha = 0$  соответствует ось  $y$ , а вдоль отрезка  $AB$   $\beta = 0$ .

Для области, рассматриваемой в данной задаче (фиг. 1), координата  $\alpha$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , координата  $\beta$  изменяется от  $-\frac{1}{2}\pi$  до  $+\frac{1}{2}\pi$ , причем для точек  $B$  и  $A$  значения  $\alpha$  соответственно будут  $-\infty$  и  $+\infty$ .

Для вывода уравнения равновесия элемента сплошной среды в биполярных координатах воспользуемся общей записью уравнений равновесия в криволинейных координатах<sup>[2]</sup>. Параметры Ляме примут следующий вид:

$$h_1 = h_2 = \operatorname{ch} \alpha + \cos \beta \quad (1.4)$$

Уравнения равновесия запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau}{\partial \beta} - (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + 2\tau \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} &= 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \beta} - (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} - 2\tau \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для вывода уравнения совместности в биполярных координатах воспользуемся общим выражением уравнений совместности для трех измерений в криволинейных координатах, данных в символах Кристоффеля<sup>[3]</sup>. Окончательный вид уравнения совместности будет

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\beta}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \left[ \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) \right] + \\ + \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \left[ \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} - \sin \beta \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right] + \frac{2(1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \beta)}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) + \\ + \frac{2 \operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Компоненты вектора перемещения, отнесенные к  $a$ , обозначим через  $u$  и  $v$ . Тогда компоненты деформации запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial u}{\partial \alpha} + v \sin \beta \\ \varepsilon_\beta &= (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial v}{\partial \beta} - u \operatorname{sh} \alpha \\ \gamma &= \frac{\partial}{\partial \alpha} [(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) v] + \frac{\partial}{\partial \beta} [(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) u] \end{aligned} \quad (1.7)$$

К уравнениям равновесия (1.5) и совместности (1.6) необходимо присоединить уравнения, связывающие тензор напряжений с тензором деформаций. В области упругой деформации твердого тела имеет место закон Гука, который запишем в таком виде:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2} [\tau_\alpha - \nu (\sigma_\alpha + \sigma_\beta)], \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{2} [\tau_\beta - \nu (\sigma_\alpha + \sigma_\beta)], \quad \gamma = \tau \quad (1.8)$$

где  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$  и  $\tau$  — безразмерные компоненты напряжения, отнесенные к величине предела текучести при сдвиге  $k$ , а  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$ , и  $\gamma$  — компоненты деформации, отнесенные к безразмерной величине  $k/G$ , где  $G$  — модуль сдвига.

Для области пластической деформации твердого тела в целях упрощения построения решения примем условие несжимаемости материала.

Тогда уравнения, связывающие компоненты напряжения и компоненты деформации в пластической области, будут иметь следующий вид:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\psi}{4} (\sigma_\alpha - \sigma_\beta), \quad \varepsilon_\beta = -\frac{\psi}{4} (\sigma_\alpha - \sigma_\beta), \quad \gamma = \psi\tau \quad (1.9)$$

Здесь  $\psi$  — неизвестная функция, подлежащая определению.

Выражение для интенсивности напряжения сдвига для плоскодеформированного тела имеет простое выражение (при условии несжимаемости материала):

$$\sigma_i = \pm \frac{1}{2} (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \quad (1.10)$$

Знак в правой части уравнения (1.10) выбирается из условия положительного значения для  $\sigma_i$ . В качестве следствия из системы уравнений (1.9) имеем следующее соотношение между  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$ :

$$\varepsilon_i = \psi\sigma_i \quad (1.11)$$

где  $\varepsilon_i$  — интенсивность деформации сдвига.

Полагаем, что в процессе пластической деформации имеет место упрочнение материала согласно линейному закону

$$\sigma_i = n\varepsilon_i + \mu \quad (1.12)$$

где  $n$  и  $\mu$  — коэффициенты упрочнения; при отсутствии площадки текучести  $n$  и  $\mu$  связаны линейной зависимостью

$$n + \mu = 1 \quad (1.13)$$

Для решения поставленной задачи, как будет показано ниже, существенно будет задание функции  $\psi$  и ее частных производных только на границе, разделяющей упругую и пластическую области.

В краевые условия помимо обычных — задания усилий на границе исследуемой области — будет входить требование о непрерывности компонент напряжения на границе области пластических деформаций и, кроме того, требование, чтобы на этой границе функция  $\psi$  была равна единице.

**§ 2. Упругое решение.** Решение упругой задачи о распределении напряжений в круге радиуса единицы, вызванных системой уравновешенных сил, в частности двумя силами, известно. Известно также, что вдоль биполярных координатных линий отсутствует касательное напряжение<sup>[4]</sup>. Этим обстоятельством и воспользуемся при построении упругого решения в биполярной системе координат. Положим, что

$$\tau = 0 \quad (2.1)$$

Тогда система уравнений равновесия (1.5) является замкнутой и интегрируется в конечном виде. Получим

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \operatorname{ch} \alpha \int \varphi(\beta) d\beta + \int \varphi(\beta) \cos \beta d\beta + \omega(\alpha) \\ \sigma_\beta &= -\cos \beta \int \varphi(\beta) d\beta + \int \varphi(\beta) \cos \beta d\beta + \omega(\alpha) - \frac{\omega'(\alpha) \operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\varphi(\beta)$  и  $\omega(\alpha)$  — произвольные функции. Для исследуемой задачи по-

ложим  $\omega(\alpha) = 0$ ; тогда, подставив (2.2) в (1.6), получим уравнение

$$\varphi''(\beta) + \varphi(\beta) = 0 \quad (2.3)$$

или

$$\varphi(\beta) = C_1 \cos \beta + C_2 \sin \beta \quad (2.4)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Из условия симметрии приложения сосредоточенных сил следует, что  $C_1$  необходимо положить равным нулю.

Подставляя найденное значение  $\varphi(\beta)$  в (2.2), окончательно находим

$$\sigma_\alpha = -\frac{1}{2} C_2 (2 \operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \cos \beta, \quad \sigma_\beta = \frac{1}{2} C_2 \cos^2 \beta \quad (2.5)$$

Константу  $C_2$  найдем из условия уравнивания сосредоточенной силы в точках  $A$  и  $B$ , причем из условия четности функции  $\sigma_\alpha$  следует, что достаточно рассмотреть одну из этих сил, например силу, приложенную в точке  $A$ . Для этого проектируем  $\sigma_\alpha$  на направление оси  $x$ .

Будем иметь

$$dP = \sigma_\alpha \cos(x, R_\alpha) ds \quad (2.6)$$

При этом элементарная составляющая сила на ось  $x$  относится к любой окружности радиуса  $R_\alpha$  ( $\alpha = \text{const}$ ).

Принимая во внимание выражения для  $x$  и  $y$  через  $\alpha$  и  $\beta$  (1.2), находим элемент дуги  $ds$  окружности  $\alpha = \text{const}$  радиуса  $R_\alpha$  (1.3):

$$ds = \frac{d\beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (2.7)$$

Далее

$$\cos(x, R_\alpha) = \frac{\operatorname{cth} \alpha - x}{\operatorname{csch} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (2.8)$$

Подставляя значения  $\sigma_\alpha$ ,  $ds$  и  $\cos(x, R_\alpha)$  в (2.6), затем интегрируя и переходя к пределу, получим

$$P = \frac{C_2}{2} \left[ \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \frac{(2 \operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) (1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \beta) \cos \beta d\beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \right]_{\alpha \rightarrow \infty} \quad (2.9)$$

Разделим в подынтегральном выражении числитель и знаменатель на  $\operatorname{ch}^2 \alpha$  и перейдем к пределу при  $\alpha \rightarrow \infty$ ; получим

$$P = C_2 \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \cos^2 \beta d\beta \quad (2.10)$$

Из последнего уравнения находим

$$C_2 = \frac{2P}{\pi} \quad (2.11)$$

Подставляя найденное значение  $C_2$  в выражение (2.5), получим окончательное выражение для компонент напряжения исследуемой задачи в биполярной системе координат, в упругой зоне деформации:

$$\sigma_\alpha = -\frac{P}{\pi} (2 \operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \cos \beta, \quad \sigma_\beta = \frac{P}{\pi} \cos^2 \beta \quad (2.12)$$



Легко видеть, что краевые условия на поверхности круга удовлетворяются, а именно  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$  при  $\beta = \pm 1/2 \pi$ .

Компоненты деформации вычисляются по формулам (1.8).

**§ 3. Построение решения в пластической области.** Положим, что компоненты напряжения в пластической и упругой областях имеют один и тот же вид (2.12), т. е. полагаем, что если в пластической области касательное напряжение ( $\tau$ ) и не равно нулю, то оно мало и им можно пренебречь. Подставим значения компонент напряжения в правую часть равенств (1.9). Получим

$$\varepsilon_\alpha = -\frac{P}{2\pi} \psi (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \cos \beta, \quad \varepsilon_\beta = \frac{P}{2\pi} \psi (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \cos \beta \quad (3.1)$$

Функцию  $\psi$  определим из уравнения совместности. Подставим значения  $\varepsilon_\alpha$  и  $\varepsilon_\beta$  (3.1) в уравнение (1.6). После преобразований окончательно получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (\psi \cos \beta) - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\psi \cos \beta) + \psi \cos \beta = 0 \quad (3.2)$$

Из уравнения (3.2) следует, что искомая функция  $\psi$ , умноженная на  $\cos \beta$ , удовлетворяет телеграфному уравнению.

В результате замены переменных

$$\alpha + \beta = \xi, \quad \alpha - \beta = \eta \quad (3.3)$$

и вводя обозначение  $n \psi \cos \beta$  через  $\Phi(\xi, \eta)$  уравнение (3.2) преобразуется к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{4} \Phi = 0 \quad (3.4)$$

Интеграл последнего уравнения представим в квадратурах через функцию Римана [5], которая в данном случае имеет простой вид:

$$G(\xi, \eta, \xi_s, \eta_s) = I_0 (i \sqrt{(\xi - \xi_s)(\eta - \eta_s)}) \quad (3.5)$$

где  $I_0$  — функция Бесселя нулевого порядка:

$$I_0 = 1 + \frac{z^2}{2^2 1!} + \frac{z^4}{2^4 (2!)^2} + \frac{z^6}{2^6 (3!)^2} + \dots \quad (3.6)$$

где

$$z = \sqrt{(\xi - \xi_s)(\eta - \eta_s)} \quad (3.7)$$

индекс  $s$  показывает, что  $\xi$  и  $\eta$  взяты на границе упругой и пластической областей.

В системе координат  $\xi, \eta$  искомая функция будет определена в полосе ширины  $\pi \sqrt{2}$ , проходящей в направлении биссектрисы первого координатного угла  $\xi, \eta$  (фиг. 2). Это следует из введенной выше замены независимых переменных (3.3). Из условия симметрии достаточно построить решение для одной четверти части полосы, например для заштрихованной области.

Из уравнения (3.4) следует, что  $\Phi$  является функцией напряжения и координат точек области. Последнее может быть оправдано как при-

ближенной постановкой задачи (компоненты напряжения имеют один и тот же вид в упругой и пластической областях), так и тем экспериментально проверенным фактом, что по сечению цилиндра при обработке металла давлением имеет место неоднородность механического состояния металла.

Для построения функции  $\Phi(\xi, \eta)$  необходимо знать ее значение вдоль некоторой кривой в исследуемой области. Этой кривой будет граница пластической области, записанная в координатах  $\xi, \eta$ . Значение функции  $\psi$  и ее частных производных вдоль этой кривой определим из краевого условия для  $\psi$  и условия упрочнения материала.

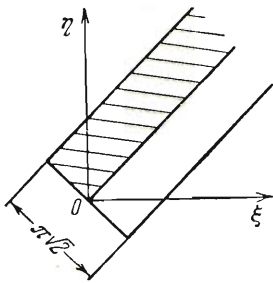
Будем полагать, что упрочнение, т. е. зависимость между  $\sigma_i$  и  $\epsilon_i$ , имеет вблизи границы пластичности вид (1.12).

Решая систему уравнений (1.10), (1.11) и (1.12), выбирая при этом в (1.10) знак минус, найдем выражение для функции  $\psi$ :

$$\psi = \frac{1}{n} \left[ \frac{\sigma_\beta - \sigma_\alpha - 2\mu}{\sigma_\beta - \sigma_\alpha} \right] \quad (3.8)$$

Подставляя в (3.8) значения компонент напряжения  $\sigma_\beta$  и  $\sigma_\alpha$  согласно (2.12), найдем

$$\psi = \frac{1}{n} \left[ \frac{P (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \cos \beta - \mu\pi}{P (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \cos \beta} \right] \quad (3.9)$$



Фиг. 2

Найдем границу распространения пластичности. Из условия

$$\psi(\alpha_s, \beta_s) = 1 \quad (3.10)$$

принимая во внимание (3.9), находим

$$\frac{P}{\pi} (\operatorname{ch} \alpha_s + \cos \beta_s) \cos \beta_s - 1 = 0 \quad (3.11)$$

или

$$\gamma^2 (\operatorname{ch} \alpha_s + \cos \beta_s) \cos \beta_s - 2 = 0 \quad \left( \gamma^2 = \frac{2P}{\pi} \right) \quad (3.12)$$

При этом необходимо иметь в виду, что сосредоточенная сила  $P$  отнесена к радиусу окружности  $a$  и пределу текучести при сдвиге  $k$ .

Иследуем закон распространения пластической зоны при увеличении сосредоточенной силы от нуля до некоторого, достаточно большого ее значения. Для удобства исследования напомним уравнение (3.12) в декартовых координатах. Из соотношений (1.2) имеем

$$\cos \beta = \frac{1 - x^2 - y^2}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2) + 4y^2}}$$

Тогда уравнение (3.12) примет следующий вид:

$$\gamma^2 (1 - x^2 - y^2) - [(1 - x^2 - y^2)^2 + 4y^2] = 0 \quad (3.13)$$

Если ввести замену переменных  $x^2 = t$ ,  $y^2 = z$ , то уравнение (3.13) можно представить

$$(t + z)^2 + (\gamma^2 - 2)t + (\gamma^2 + 2)z + 1 - \gamma^2 = 0 \quad (3.14)$$

Легко установить, что полученная кривая (3.14) является параболой.

Найдем ее точки пересечения с осью  $x$  ( $y = 0$  или в нашем случае  $z = 0$ ). Получим

$$t^2 + (\gamma^2 - 2)t + 1 - \gamma^2 = 0 \quad (3.15)$$

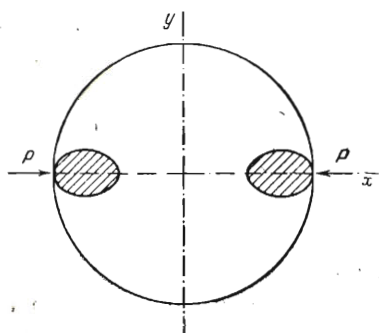
Решая это уравнение, находим

$$t = \frac{1}{2} (2 - \gamma^2 \pm \gamma^2) \quad (3.16)$$

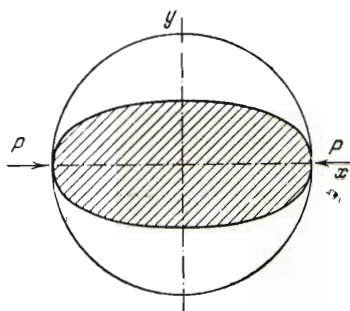
При  $\gamma^2 < 1$  в формуле (3.16) можно брать оба знака. Следовательно, кривая (3.14) будет пересекать ось  $x$  в двух точках на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ :

$$t_1 = 1 - \gamma^2, \quad t_2 = 1 \quad (3.17)$$

В этом случае область пластичности будет состоять из двух не связанных между собой областей. На фиг. 3 приведен пример для  $\gamma^2 = 0.75$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

При  $\gamma^2 = 1$  зона пластичности достигает центра круга. При дальнейшем увеличении  $\gamma^2$  ( $\gamma^2 > 1$ ) зона пластичности будет распространяться вдоль оси  $y$ . На фиг. 4 представлена зона пластичности для  $\gamma^2 = 2$ . Из уравнения (3.16) следует, что в этом случае необходимо брать верхний знак, и  $t$  имеет один корень, равный единице.

Пересечение оси  $y$  кривой, ограничивающей область пластических деформаций, получим из (3.14), полагая в нем  $t = 0$ , при  $\gamma^2 > 1$ .

Получим уравнение следующего вида:

$$z^2 + (\gamma^2 + 2)z + 1 - \gamma^2 = 0 \quad (3.18)$$

Решая уравнение (3.18), получим

$$z = \frac{-(\gamma^2 + 2) + \gamma \sqrt{\gamma^2 + 8}}{2} \quad (3.19)$$

При  $\gamma^2 = 1$   $z = 0$  (начало координат), при  $\gamma^2 > 1$  уравнение (3.18) имеет единственный действительный, положительный корень.

Уравнение кривой, ограничивающей область распространения пластической зоны в координатах  $\xi$ ,  $\eta$ , будет иметь вид:

$$\gamma^2 \cos \frac{\xi_s - \eta_s}{2} \left[ \operatorname{ch} \frac{\xi_s + \eta_s}{2} + \cos \frac{\xi_s - \eta_s}{2} \right] - 2 = 0 \quad (3.20)$$

На фиг. 5 представлены схематически в одном из квадрантов, где, например,  $\alpha > 0$  и  $\beta < 0$ , кривые границы пластической области для двух случаев — кривая  $abc$  для  $\gamma^2 < 1$  и кривая  $ABC$  для  $\gamma^2 > 1$ .

Из того факта, что кривая  $abc$  ( $\gamma^2 < 1$ ) пересекает биссектрису  $\eta = \xi$  под углом  $1/2\pi$  (фиг. 5), следует некорректность постановки задачи Коши. Так как механически этот случай не представляет большого интереса и может быть достаточно оценен линейным законом упрочнения, то в дальнейшем задача Коши будет решаться только для случая  $\gamma^2 > 1$  (фиг. 5). Легко показать, что в этом случае наклон касательной  $d\beta/d\alpha$  к кривой  $ABC$  ( $\gamma^2 > 1$ ) меньше  $1/4\pi$ , что обеспечивает корректность постановки задачи Коши для телеграфного уравнения.

Вдоль границы области пластичности значение функции  $\Phi$ , удовлетворяющей телеграфному уравнению (3.4), известно и равно:

$$\Phi(\xi_s, \eta_s) = n \cos \frac{\xi_s - \eta_s}{2} \quad (3.21)$$

(так как вдоль границы области пластичности  $\psi = 1$ ).

Найдем значение частных производных по  $\xi$  и  $\eta$  вдоль границы области пластичности. Для этого, пользуясь

выражением для  $\psi$  (3.9), напомним выражения для функции  $\Phi$ :

$$\Phi(\xi, \eta) = \cos \frac{\xi - \eta}{2} - \frac{\mu\pi}{P [\operatorname{ch} 1/2(\xi + \eta) + \cos 1/2(\xi + \eta)]} \quad (3.22)$$

Дифференцируя (3.22) по  $\xi$  и  $\eta$  и принимая во внимание значение  $\Phi$  на границе области пластичности (3.21), получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)_s &= -\frac{1}{2} \left[ \sin \frac{\xi_s - \eta_s}{2} - \frac{P\mu}{\pi} \left( \operatorname{sh} \frac{\xi_s + \eta_s}{2} - \sin \frac{\xi_s - \eta_s}{2} \right) \cos^2 \frac{\xi_s - \eta_s}{2} \right], \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)_s &= \frac{1}{2} \left[ \sin \frac{\xi_s - \eta_s}{2} + \frac{P\mu}{\pi} \left( \operatorname{sh} \frac{\xi_s + \eta_s}{2} + \sin \frac{\xi_s - \eta_s}{2} \right) \cos^2 \frac{\xi_s - \eta_s}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Зная значение функции Римана (3.5) и значение искомой функции  $\Phi$  и значения ее частных производных вдоль линии  $ABC$  ( $\gamma^2 > 1$ ), напомним выражение для функции  $\Phi$  в любой точке области пластичности:

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{\Phi_P + \Phi_Q}{2} + \frac{1}{2} \int_{PQ} \left\{ \Phi \left( \frac{\partial G}{\partial \xi_s} d\xi_s - \frac{\partial G}{\partial \eta_s} d\eta_s \right) + G \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_s} d\eta_s - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_s} d\xi_s \right) \right\} \quad (3.24)$$

где  $\Phi_P$  и  $\Phi_Q$  — значения искомой функции  $\Phi$  в точках  $P$  и  $Q$ , лежащих в точках пересечения кривой  $ABC$  с характеристиками, приведенными из некоторой точки  $M$  ( $\xi, \eta$ ).



Для хотя бы приближенной оценки полученных результатов найдем значение функции  $\Phi$ , а следовательно, и функции  $\psi$  в точке, нас наиболее интересующей, в начале координат ( $\xi = 0, \eta = 0$ ).

Для выражения функции Римана ограничимся двумя членами ряда (3.6), т. е. положим

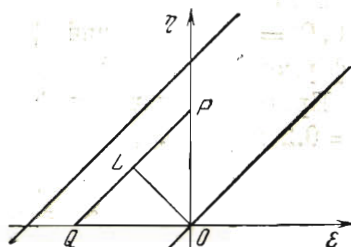
$$G = 1 + \frac{(\xi - \xi_s)(\eta - \eta_s)}{4} \quad (3.25)$$

Далее полагаем, что в окрестности начала координат можно дугу кривой  $PLQ$  (фиг. 6) принять за отрезок прямой, параллельной биссектрисе  $\eta = \xi$  и имеющей следующий вид

$$\xi_s - \eta_s = 2\beta_0 \quad (3.26)$$

Отрезок  $2|\beta_0|$ , а также значение предела интегрируемости  $\eta_0$  определим из уравнения (3.20), положив в нем  $\xi_s = 0$ :

$$\frac{P}{\pi} \cos \frac{\eta_0}{2} \left( \operatorname{ch} \frac{\eta_0}{2} + \cos \frac{\eta_0}{2} \right) - 1 = 0 \quad (3.27)$$



Фиг. 6

Из условия симметрии следует, что значения функции  $\Phi$  в точках  $P$  и  $Q$  между собою равны:

$$\Phi_P = \Phi_Q = n \cos \frac{\eta_0}{2} = n \cos \frac{\xi_0}{2} \quad (3.28)$$

Далее находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_s} d\eta_s - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_s} d\xi_s = \sin \frac{\xi_s - \eta_s}{2} \left[ 1 + \frac{P\mu}{\pi} \cos^2 \frac{\xi_s - \eta_s}{2} \right] d(\xi_s + \eta_s)$$

или, принимая во внимание (3.26), окончательно находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_s} d\eta_s - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_s} d\xi_s = -2 \sin \beta_0 \left( 1 + \frac{P\mu}{\pi} \cos^2 \beta_0 \right) d\eta_s \quad (3.29)$$

где под  $\beta_0$  имеется в виду значение  $\beta_0$  по модулю.

Далее, принимая во внимание выражение для  $G$ , имеем

$$\frac{\partial G}{\partial \xi_s} d\xi_s - \frac{\partial G}{\partial \eta_s} d\eta_s = \frac{1}{4} (\eta_s - \xi_s) d\eta_s = \frac{\beta_0}{2} d\eta_s \quad (3.30)$$

Функция  $\Phi$  вдоль отрезка  $PQ$  принимает значение

$$\Phi(\xi, \eta_s) = n \cos \beta_0 \quad (3.31)$$

Функция Римана  $G$  (3.25), учитывая (3.26), примет вид:

$$G = 1 + \frac{\xi_s \eta_s}{4} = 1 + \frac{\eta_s(\eta_s - \eta_0)}{4} \quad (3.32)$$

Напишем полностью подынтегральное выражение равенства (3.24):

$$\begin{aligned} & \Phi \left( \frac{\partial G}{\partial \xi_s} d\xi_s - \frac{\partial G}{\partial \eta_s} d\eta_s \right) + G \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_s} d\eta_s - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_s} d\xi_s \right) = \\ & = \left[ \frac{n\beta_0 \cos \beta_0}{2} - 2 \sin \beta_0 \left( 1 + \frac{P\mu}{\pi} \cos^2 \beta_0 \right) \right] \frac{\sin \beta_0}{2} d\eta_s - \left( 1 + \frac{P\mu}{\pi} \cos^2 \beta_0 \right) \eta_s (\eta_s - \eta_0) d\eta_s \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение (3.24) и интегрируя в пределах от  $\eta_0$  до 0, находим

$$\Phi(0, 0) = n \cos \frac{\eta_0}{2} + \frac{1}{2} \left[ 2 \sin \beta_0 \left( 1 + \frac{P\mu}{\pi} \cos^2 \beta_0 \right) \eta_0 \left( 1 - \frac{\eta_0^2}{24} \right) - \frac{n\beta_0 \eta_0 \cos \beta_0}{2} \right] \quad (3.33)$$

Разделив (3.33) на  $n$ , получим значение функции  $\psi$  в точке  $(0, 0)$ :

$$\psi(0, 0) = \cos \frac{\eta_0}{2} + \frac{\eta_0 \sin \beta_0}{n} \left( 1 + \frac{P\mu}{\pi} \cos^2 \beta_0 \right) \left( 1 - \frac{\eta_0^2}{24} \right) - \frac{\beta_0 \eta_0 \cos \beta_0}{4} \quad (3.34)$$

В момент возникновения пластической зоны в точке  $(0, 0)$   $\eta_0 = 0$  и  $\psi(0, 0) = 1$ . Подставляя  $\psi$  согласно (3.34) в (3.1), находим компоненты деформации в любой точке пластической области.

Приведем значения  $\psi$  в точке  $(0, 0)$  для разных значений  $P/\pi$  при  $n = 0.2$  и  $\mu = 0.8$ , вычисленные по формуле (3.34):

$P/\pi = 0.5$	0.55	0.60	0.75	1.00	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\psi = 1$	2.85	4.28	7.03	9.09	10.31	10.55	10.57	10.51	10.46	10.35

На фиг. 7 приведен график зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций в точке  $(0, 0)$ . Зависимость между  $\epsilon_i$  и  $\sigma_i$  дана уравнением (1.11). Параметром кривой будет величина  $P/\pi$ . При  $P/\pi = 0.5$  получим точку предела текучести (фиг. 7):

$$\epsilon_i = 1, \quad \psi = 1, \quad \sigma_i = 1$$

Для точки  $(0, 0)$  интенсивность напряжения  $\sigma_{i0}$  будет равна:

$$\sigma_i = \frac{2P}{\pi} \quad (3.35)$$

т. е. пропорциональна силе  $P$ .

Тогда уравнение (1.11) переписывается в таком виде:

$$\epsilon_{i0} = \frac{2P}{\pi} \psi_0 \quad (3.36)$$

Из приведенных выше значений  $\psi$  и графика фиг. 7 следует, что в точке  $(0, 0)$  имеет место неустойчивое пластическое состояние вблизи предельной нагрузки  $P/\pi = 0.5$ , т. е. незначительное увеличение нагрузки вызывает значительный рост интенсивности деформации. При дальнейшем росте нагрузки рост деформации замедляется. Возможно, этой неустойчивостью пластического состояния и вызывается образование трещин и полостей в центре цилиндра.

Поступила 27 VII 1951

Институт механики  
Академии Наук СССР

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. ГИТТЛ. 1950.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. М. — Л. 1935.
3. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат. 1949.
4. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз. 1939.
5. Гурса Э. Курс математического анализа. ГИТТЛ. 1933. Т. III. Ч. I.
6. Смирнов В. С. Поперечная прокатка. Машгиз. 1948.