Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

# О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**И. Г. Малкин**

(Свердловск)

**§ 1. Постановка задачи.** Задача устойчивости для неустановившихся движений приводится прежде всего к исследованию знака характеристических чисел системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Одним из основных практических приемов определения характеристических чисел является сравнение заданной системы линейных дифференциальных уравнений с другой системой таких же уравнений, для которых характеристические числа могут быть определены. Пусть

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

система линейных дифференциальных уравнений, характеристические числа которой известны, а

$$\frac{dx_s}{dt} = (p_{s1} + \varphi_{s1})\, x_1 + \cdots + (p_{sn} + \varphi_{sn})\, x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

другая система, характеристические числа которой требуется определить. Относительно коэффициентов $p_{sj}$ и $\varphi_{sj}$ предполагается, что они являются непрерывными и ограниченными функциями $t$ на $[0, \infty)$. Обозначим через $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ характеристические числа системы (1.1), а через $\lambda_1' \geqslant \lambda_2' \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n'$ — характеристические числа системы (1.2).

Характеристические числа системы (1.1) называются *устойчивыми*, если для всякого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ можно найти другое положительное число $\eta(\varepsilon)$ такое, что выполняются неравенства $|\lambda_i' - \lambda_i| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n)$ при любом выборе функций $\varphi_{sj}$, удовлетворяющих неравенствам $|\varphi_{sj}(t)| \leqslant \eta \quad (s, j = 1, \ldots, n)$.

Для практики особенно важной является задача об определении верхних пределов для функций $|\varphi_{sj}(t)|$, при которых разности $|\lambda_i' - \lambda_i|$ не превосходят некоторых заданных величин. В этой работе указываются некоторые признаки устойчивости характеристических чисел и некоторые приемы вычисления верхних пределов для $|\varphi_{sj}(t)|$, при которых знак наименьшего характеристического числа системы (1.2) совпадает со знаком наименьшего характеристического числа системы (1.1).

**§ 2. Критерий устойчивости характеристических чисел.** Пусть $x_{sj}(t)$ $(s, j = 1, \ldots, n)$ — нормальная (в смысле Ляпунова) система решений уравнений (1.1). Здесь первый индекс обозначает номер функции в каком-нибудь решении, а второй индекс — номер решения. Характеристическое число решения $x_{sj}$ обозначим через $\lambda_j$. Величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, среди которых могут быть и равные, и являются характеристическими числами системы (1.1). Кроме системы $x_{sj}(t)$, рассмотрим еще другую фундаментальную систему решений $\overline{x}_{sj}(t, t_0)$ уравнений (1.1), определяемую начальными условиями

$$\overline{x}_{sj}(t, t_0) = \delta_{sj} \qquad (\delta_{sj} \text{ — символ Кронекера}; \quad s, j = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Эта система решений не будет, вообще говоря, нормальной. Характеристическое число решения $\overline{x}_{sj}(t, t_0)$ обозначим через $\mu_j$. Каждое из чисел $\mu_j$ равно одному из чисел $\lambda_i$.

Допустим, что система (1.1) такова, что при любом положительном $\gamma$

$$|\overline{x}_{sj}(t, t_0)| < Ce^{(-\mu_j+\gamma)(t-t_0)} \qquad \text{при} \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0 \tag{2.2}$$

$$|\overline{x}_{sj}(t, t_0)| < Ce^{(-\mu_j-\gamma)(t-t_0)} \qquad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0 \tag{2.3}$$

Здесь $C$ — некоторая постоянная, зависящая только от $\gamma$ и не зависящая от $t_0$. Докажем следующую теорему.

*Теорема I.* Если выполняются неравенства (2.2) и (2.3), то каково бы ни было положительное число $\varepsilon$, можно найти положительное число $\eta(\varepsilon)$ такое, что характеристические числа $\lambda_i'$ системы (1.2) удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_i' \geqslant \lambda_i - \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

если функции $\varphi_{sj}(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi_{sj}(t)| \leqslant \eta \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

*Доказательство.* Рассмотрим систему линейных неоднородных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + f_s(t) \tag{2.6}$$

Эта система имеет частное решение

$$x_s'(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \overline{x}_{s\alpha}(t, \tau) f_\alpha(\tau)\, d\tau \tag{2.7}$$

где $a_\alpha$ — произвольные постоянные. Некоторые из этих постоянных можно положить равными $\infty$, если только соответствующие интегралы сходятся. Если к решению (2.7) добавить решение $x_{sk}(t)$ однородной системы (1.1), то снова получится решение (1.2). Отсюда непосредственно следует, что всякое решение интегральных уравнений

$$x_s(t) = x_{sk}(t) + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \overline{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau))\, d\tau \tag{2.8}$$

если только оно существует, необходимо является решением системы (1.2). Здесь

$$L_\alpha = \varphi_{\alpha 1}x_1 + \cdots + \varphi_{\alpha n}x_n \tag{2.9}$$

Постоянные $a_\alpha$ мы условимся выбирать следующим образом: будем предполагать, что $a_\alpha = 0$ для тех значений $\alpha$, для которых $\mu_\alpha \geqslant \lambda_k$, и $a_\alpha = \infty$, если $\mu_\alpha < \lambda_k$.

Пусть $\varepsilon$ — произвольное сколь угодно малое положительное число. Так как характеристическое число каждой функции $x_{sk}$ не менее $\lambda_k$, то

$$|x_{sk}(t)| < Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} \tag{2.10}$$

где $A$ — некоторая постоянная. Покажем, что интегральные уравнения (2.8) допускают решение $x_3(t)$, удовлетворяющее неравенствам

$$|x_s(t)| < 2Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} \tag{2.11}$$

С этой целью будем искать это решение методом последовательных приближений, полагая

$$x_s^{(1)} = x_{sk}(t), \quad x_s^{(m)} = x_{sk} + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t,\tau) L_\alpha(\tau, x_1^{(m-1)}(\tau), \ldots, x_n^{(m-1)}(\tau))\, d\tau \tag{2.12}$$

Покажем прежде всего, что все последовательные приближения удовлетворяют неравенствам (2.11), т. е.

$$|x_s^{(m)}| < 2Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} \tag{2.13}$$

если только число $\eta$ в (2.5) удовлетворяет условию

$$\frac{4n^2\eta C}{\varepsilon} < 1 \tag{2.14}$$

что мы и будем предполагать.

В самом деле, неравенства (2.13) во всяком случае выполняются при $m = 0$. Допустим, что они выполняются для $m-1$-го приближения, и покажем, что они выполняются также и для $m$-го приближения. Пусть $\alpha$ — такой индекс, для которого $\mu_\alpha \geqslant \lambda_k$ и для которого, следовательно, $a_\alpha = 0$. Полагая в условиях (2.2) $\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon$ и учитывая (2.9), имеем

$$\left| \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t,\tau)\, L_\alpha(\tau, x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)})\, d\tau \right| =$$

$$= \left| \int_{0}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t,\tau)\, L_\alpha(\tau, x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)})\, d\tau \right| <$$

$$< 2n\eta AC \int_0^t e^{(-\mu_\alpha+\varepsilon/2)(t-\tau)}\, e^{(-\lambda_k+\varepsilon)\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{2n\eta AC}{\mu_\alpha - \lambda_k + \varepsilon/2} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}\left(1 - e^{(\lambda_k-\mu_\alpha-\varepsilon/2)t}\right) < \frac{4n\eta AC}{\varepsilon} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} \tag{2.15}$$

При том же значении $\gamma$, считая $\varepsilon$ настолько малым, что при $\lambda_k > \mu_\alpha$ выполняется неравенство $\lambda_k - \mu_\alpha > 2\varepsilon$, из (2.3) получим, что для значений $\alpha$, для которых $\mu_\alpha < \lambda_k$, справедливы оценки

$$\left| \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha(\tau, x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)})\, d\tau \right| =$$

$$= \left| \int_{t}^{\infty} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha(\tau, x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)})\, d\tau \right| <$$

$$< 2n\eta AC \int_{t}^{\infty} e^{(-\mu_\alpha - \varepsilon/2)(t-\tau)} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)\tau} dt = \frac{2n\eta AC}{-\mu_\alpha + \lambda_k - {}^3/_2\varepsilon} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} <$$

$$< \frac{4n\eta AC}{\varepsilon} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} \tag{2.16}$$

Подставляя (2.15) и (2.16) в (2.12) и принимая во внимание (2.10) и (2.14), получим

$$|x_s^{(m)}| < Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} + \frac{4n^2\eta CA}{\varepsilon} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} < 2Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} \tag{2.17}$$

Оценим теперь величины $|x_s^{(m+1)} - x_s^{(m)}|$. Пусть

$$|x_s^{(m)} - x_s^{(m-1)}| < Pe^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}$$

Тогда, применяя к равенствам

$$|x_s^{(m+1)} - x_s^{(m)}| = \left| \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha(\tau, x_1^{(m)} - x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m)} - x_n^{(m-1)}) d\tau \right|$$

оценки (2.15) и (2.16), в которых лишь придется заменить $2A$ на $P$, получим

$$|x_s^{(m+1)} - x_s^{(m)}| < \frac{2n^2\eta CP}{\varepsilon} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} = P\theta e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} \tag{2.18}$$

где $\theta = 2n^2\eta C / \varepsilon < \frac{1}{2}$ на основании (2.14).

Так как на основании (2.13) и (2.10) во всяком случае

$$|x_s^{(1)} - x_s^{(0)}| < 3Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}$$

то из (2.18) следует, что

$$|x_s^{(m+1)} - x_s^{(m)}| < 3A\theta^m e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что с неограниченным возрастанием $m$ последовательные приближения сходятся равномерно к некоторым функциям $f_s(t)$. Так как все последовательные приближения удовлетворяют неравенствам (2.13), то этим же неравенствам удовлетворяют и функции $f_s(t)$. Обычными для метода последовательных приближений рассуждениями легко показать, что функции $f_s(t)$ действительно удовлетворяют интегральным уравнениям (2.8).

Таким образом, мы получили решение интегральных уравнений (2.8), которое, как уже указывалось, является вместе с тем и решением дифференциальных уравнений (1.2). Изменяя в этом решении индекс $k$ от 1 до $n$, мы получим $n$ решений системы (1.2). Покажем, что эти решения образуют фундаментальную систему. Действительно, при $t = 0$

полученные решения, как это следует из оценок (2.16), будут сколь угодно мало отличаться от решений $x_{sk}$ системы (1.1), если только $\eta$ достаточно мало, и, следовательно, определитель Вронского полученной системы будет при $t=0$ сколь угодно мало отличаться от определителя Вронского системы $x_{sj}$, который заведомо отличен от нуля.

Обозначим через $\lambda_i^*$ характеристические числа фундаментальной системы решений уравнений (1.2). Из (2.11) вытекает, что $\lambda_k^* \geqslant \lambda_k - \varepsilon$.

Если мы теперь рассмотрим нормальную систему решений уравнений (1.2), то она будет отличаться от полученной фундаментальной системы тем, что некоторые решения последней заменены другими решениями с большими характеристическими числами. Следовательно, характеристические числа $\lambda_1', \ldots, \lambda_n'$ нормальной системы решений будут и подавно удовлетворять неравенствам (2.4). Теорема доказана.

*Теорема II.* Если при выполнении условий теоремы I система (1.1) является правильной, то ее характеристические числа устойчивы.

*Доказательство.* Обозначим символом $Л\,\{f\}$ характеристическое число функции $f(t)$. Применяя к системе (1.2) известное свойство суммы характеристических чисел решений, можно писать

$$\lambda_1' + \lambda_2' + \cdots + \lambda_n' \leqslant Л\,\{e^{[p]}e^{[\varphi]}\}$$

где

$$[p] = \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t p_{\alpha\alpha}\,dt, \qquad [\varphi] = \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t \varphi_{\alpha\alpha}\,dt$$

Для системы (1.1), поскольку она является правильной, имеем

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = Л\,\{e^{[p]}\}, \qquad Л\,\{e^{[p]}\} + Л\,\{e^{-[p]}\} = 0$$

Из последнего соотношения на основании известных свойств характеристических чисел вытекает

$$Л\,\{e^{[p]}\,e^{[\varphi]}\} = Л\,\{e^{[p]}\} + Л\,\{e^{[\varphi]}\}$$

и поэтому

$$\lambda_1' + \cdots + \lambda_n' \leqslant \lambda_1 + \cdots + \lambda_n + Л\,\{e^{[\varphi]}\}$$

Но из (2.5), очевидно, имеем $Л\,\{e^{[\varphi]}\} \leqslant n\eta$. Следовательно,

$$\lambda_1' + \cdots + \lambda_n' \leqslant \lambda_1 + \cdots + \lambda_n + n\eta \tag{2.19}$$

Положим $\lambda_i' = \lambda_i - \varepsilon + \gamma_i$. Из (2.4) следует, что $\gamma_i > 0$. Поэтому (2.19) дает $\gamma_i \leqslant n(\varepsilon + \eta)$ и, следовательно, $\lambda_i' \leqslant \lambda_i + (n-1)\varepsilon + n\eta$, что вместе с (2.4) доказывает теорему (аналогичную теореме 2 Б. Ф. Былова [1]).

Если коэффициенты $p_{sj}$ являются постоянными, то условия (2.2) и (2.3), очевидно, выполняются. И так как система с постоянными коэффициентами является правильной, то мы получаем как частный случай теорему, установленную К. П. Персидским [2]: характеристические числа системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами всегда устойчивы. Метод, которым мы доказывали теоремы I и II, имеет много общего с методом, который применил К. П. Персидский.

**§ 3. Критерий положительности характеристических чисел.** Допустим, что характеристические числа системы (1.1) все положительны. Тогда, если выполняются условия теоремы I, характеристические числа системы (1.2) будут также положительны по крайней мере тогда, когда все величины $|\varphi_{sj}|$ не превышают некоторого достаточно малого предела. Одну из оценок этого предела дает нижеследующая теорема, в которой условия теоремы I несколько обобщены. А именно вместо условий (2.2) и (2.3) будем предполагать, что для решений $\overline{x}_{sj}\ (t,\ t_0)$ уравнений (1.1) выполняются неравенства

$$|\overline{x}_{sj}\ (t,\ t_0)| < Me^{-\alpha(t-t_0)} \tag{3.1}$$

где $M \geqslant 1$ и $\alpha$ — некоторые независящие от $t_0$ положительные постоянные. Обозначим через $m$ наибольшее число членов, содержащееся в каждом из выражений:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \overline{x}_{s\alpha}\ (t,\ \tau)(\varphi_{\alpha 1}x_1 + \cdots + \varphi_{\alpha n}x_n) \tag{3.2}$$

Число $m$ не превосходит, очевидно, $n^2$, но может быть и меньше этой величины. Так, например, если в первую часть каждого из уравнений (1.2) входит только по одному поправочному члену, т. е. если при каждом значении $s$ только одна из функций $\varphi_{s1}, \ldots, \varphi_{sn}$ отлична от нуля, то $m \leqslant n$. То же самое будет и в том случае, если при каждом $s$ только одна из функций $\overline{x}_{s1}\ (t,\ t_0), \ldots, \overline{x}_{sn}\ (t,\ t_0)$ отлична от нуля, что всегда будет иметь место, если матрица коэффициентов $p_{sj}$ является диагональной. Вообще, если при каждом $s$ число отличных от нуля функций $\varphi_{s1}, \ldots, \varphi_{sn}$ не превосходит $p$, а число отличных от нуля функций $\overline{x}_{s1}\ (t,\ t_0), \ldots, \overline{x}_{sn}\ (t,\ t_0)$ не превосходит $q$, то $m \leqslant pq$.

*Теорема III.* Если для уравнений (1.1) выполняются условия (3.1), то характеристические числа системы (1.2) будут положительны при любом выборе функций $\varphi_{sj}(t)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\varphi_{sj}(t)| < \frac{\alpha}{mM} \tag{3.3}$$

*Доказательство.* Пусть $x_s(t)$ — произвольное решение уравнений (1.2) с начальными значениями $x_s(0) = C_s$, удовлетворяющими неравенствам

$$|C_s| \leqslant 1 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

Рассматривая $x_s(t)$ как неизвестные, но вполне определенные функции времени, из (1.2) находим, что эти функции необходимо удовлетворяют интегральным уравнениям

$$x_s(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \overline{x}_{s\alpha}\ (t, 0) + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t \overline{x}_{s\alpha}\ (t,\ \tau)\,[\varphi_{\alpha 1}x_1(\tau) + \cdots + \varphi_{\alpha n}x_n(\tau)]\, d\tau \tag{3.5}$$

которые, следовательно, имеют решение. Для того чтобы доказать справедливость теоремы, достаточно, очевидно, показать, что найдется такое достаточно большое положительное число $A$ и такое достаточно малое положительное число $\varepsilon$, что при всех $t > 0$ будут выполняться условия

$$|x_s(t)| \leqslant Ae^{-\varepsilon t} \tag{3.6}$$

Но считая $A > 1$, на основании (3.4) имеем, что условия (3.6) выполняются при $t = 0$ со знаком неравенства. Следовательно, эти условия будут выполняться по крайней мере при $t > 0$ достаточно малом. Допустим, что эти условия при некоторых значениях $t$ нарушаются. Тогда должен существовать такой момент времени $t = T$, при котором впервые хотя бы одно из условий (3.6) выполняется со знаком равенства. Так как при $0 \leqslant t \leqslant T$ условия (3.6) во всяком случае выполняются, то, полагая $\varepsilon < \alpha$, из (3.5) на основании (3.4) и (3.1) получим

$$|x_s(T)| < nMe^{-\alpha T} + mMAQ\int_0^T e^{-\alpha(T-\tau)}e^{-\varepsilon\tau}\,d\tau =$$

$$= nMe^{-\alpha T} + \frac{mMAQ}{\alpha-\varepsilon}e^{-\varepsilon T}(1 - e^{-(\alpha-\varepsilon)T}) < A\left(\frac{nM}{A} + \frac{mMQ}{\alpha-\varepsilon}\right)e^{-\varepsilon T}$$

где $Q$ — наибольшее значение, принимаемое функциями $|\varphi_{sj}(t)|$ на отрезке $[0, T]$, а $m$ — число членов в выражениях (3.2). На основании (3.3) $Q < \alpha / mM$, и поэтому число $\varepsilon$ может быть взято настолько малым, а число $A$ настолько большим, что будет выполняться неравенство

$$\frac{nM}{A} + \frac{mMQ}{\alpha-\varepsilon} < 1$$

Но тогда мы будем иметь $|x_s(T)| < Ae^{-\varepsilon T}$. Это противоречит условию, что при $t = T$ хотя бы одно из условий (3.6) будет выполняться со знаком равенства. Таким образом, условия (3.6) будут выполняться при всех $t > 0$, что и доказывает теорему.

*Частный случай.* Допустим, что коэффициенты $p_{sj}$ являются постоянными. Пусть $\lambda$ — наименьшая из величин $\operatorname{Re}(-\lambda_1), \ldots, \operatorname{Re}(-\lambda_n)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения

$$\| p_{sj} - \delta_{sj}\lambda \| = 0 \tag{3.7}$$

вещественные части которых предполагаются отрицательными. Тогда характеристические числа системы (1.2) будут положительны, если

$$|\varphi_{sj}(t)| < \frac{\lambda}{mM} \tag{3.8}$$

В самом деле, в рассматриваемом случае можно в условиях (3.1) положить $\alpha = \lambda - \eta$, где $\eta$ — сколь угодно малое положительное число.

*Пример.* Пусть предложена система

$$\frac{dx_1}{dt} = -\lambda x_1 + \varphi(t)x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -\lambda x_2 + \varphi(t)x_2 \tag{3.9}$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция $t$, а постоянная $\lambda$ положительна. В данном случае

$$\bar{x}_{11}(t, t_0) = e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \bar{x}_{21}(t, t_0) = 0, \quad \bar{x}_{12}(t, t_0) = 0, \quad \bar{x}_{22}(t, t_0) = e^{-\lambda(t-t_0)}$$

и, следовательно, $M = 1$, $m = 1$ и формула (3.8) дает $|\varphi| < \lambda$.

Полученный предел является наибольшим. В самом деле, при $\varphi = \text{const} > \lambda$ наименьшее характеристическое число системы (3.9) будет отрицательным.

**§ 4. Применение метода малого параметра.** Допустим, что коэффициенты $p_{sj}$ системы (1.1) постоянны. Тогда характеристические числа этой системы будут устойчивы и, следовательно, характеристические числа системы (1.2) будут мало отличаться от характеристических чисел системы (1.1), если функции $|\varphi_{sj}(t)|$ достаточно малы. В частности, если наименьшее характеристическое число системы (1.1) отлично от нуля, то знак наименьшего характеристического числа системы (1.2) при $|\varphi_{sj}|$ достаточно малых совпадет со знаком наименьшего характеристического числа системы (1.1). Если последний положителен, то теорема III дает практически приемлемую оценку для верхних пределов функций $|\varphi_{sj}|$.

Применяя другие методы, например используя функции Ляпунова [3] (стр. 191), можно получить оценки для указанных пределов, когда наименьшее характеристическое число системы (1.1) отрицательно. Но все эти методы, очевидно, не применимы, если наименьшее характеристическое число системы (1.1) равно нулю, что будет иметь место, когда характеристическое уравнение этой системы, не имея корней с положительными вещественными частями, имеет корни с вещественными частями, равными нулю. То же самое будет, когда наименьшее характеристическое число не равно нулю, но очень мало. В этом случае верхние пределы для $|\varphi_{sj}|$, по теореме III и другим методам, будут также очень малыми, вследствие чего эти оценки могут потерять всякий практический интерес.

*Пример.* Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = \mu(-1 + 2\sin t)\, x_1 + \mu x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \mu x_1 \tag{4.1}$$

где $\mu$ — малое положительное число. Характеристическое уравнение соответствующей системы с постоянными коэффициентами с точностью до величин второго порядка имеет отрицательные корни $-1$ и $-\mu$. Однако метод § 3 не позволяет сделать заключение о знаках характеристических чисел системы (4.1), как бы мало ни было число $\mu$, так как этот метод дает для модулей переменных коэффициентов пределы, меньшие модулей корней характеристического уравнения. В данном случае коэффициент $-2\mu \sin t$ может вдвое превосходить модуль корня $-\mu$.

Укажем один прием, позволяющий для широкого класса систем дать практически пригодные оценки наименьшего характеристического числа в указанных критических случаях. Допустим, что данная система имеет вид:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \mu(\varphi_{s1}^{*}x_1 + \ldots + \varphi_{sn}^{*}x_n) \tag{4.2}$$

где $p_{sj}$ — постоянные, $\varphi_{sj}^{*}$ — ограниченные и непрерывные при $t \geqslant 0$ функции времени, $\mu$ — малый параметр, характеризующий степень отклонения от системы с постоянными коэффициентами. Мы будем предполагать, что характеристическое уравнение (3.7) системы

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n \tag{4.3}$$

имеет корни с нулевыми вещественными частями и не имеет корней с положительными вещественными частями. Таким образом, наименьшее характеристическое число системы (4.3) равно нулю. Случай, когда это число отлично от нуля, но очень мало, приводится к рассматриваемому путем отнесения малых поправочных членов к тем членам уравнений (4.2), которые имеют множителем $\mu$. Для упрощения дальнейших выкладок предположим, кроме того, что уравнение (3.7) не имеет кратных корней.

Сущность предлагаемого метода состоит в том, что систему (4.2) при помощи подходящим образом выбранного преобразования вида

$$y_s = x_s + \mu(f_{s1}x_1 + \cdots + f_{sn}x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.4}$$

где $f_{sj}$ — некоторые непрерывные и ограниченные при $t \geqslant 0$ функции времени, приводят к виду

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \cdots + p_{sn}y_n + \mu(a_{s1}y_1 + \cdots + a_{sn}y_n) + \mu^2(\psi_{s1}x_1 + \cdots + \psi_{n}x_n) \tag{4.5}$$

Здесь $a_{sj}$ — постоянные, а $\psi_{sj}$ — ограниченные и непрерывные при $t \geqslant 0$ функции времени. Эти функции зависят, вообще говоря, от $\mu$, относительно которого они аналитичны. Если в (4.5) отбросить члены с переменными коэффициентами, то может оказаться, что полученная система с постоянными коэффициентами будет иметь наименьшее характеристическое число, отличное от нуля. Это число будет, конечно, иметь порядок малости $\mu$, но в отличие от системы (4.2) порядок малости переменных коэффициентов будет не меньше $\mu^2$ и поэтому полученная система не будет принадлежать к числу критических.

Таким образом, сущность метода заключается в повышении порядка малости членов с переменными коэффициентами.

Чтобы указанное преобразование могло быть выполнено, необходимо, чтобы коэффициенты $\varphi_{sj}^*$ удовлетворяли следующим условиям.

1. Существуют такие постоянные $\alpha_{sj}$, что функции

$$\int_0^t \varphi_{sj}^* dt - \alpha_{sj} t \qquad (s,\ j = 1, \ldots, n)$$

ограничены. При этом условии, очевидно, имеем

$$\alpha_{sj} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_{sj}^* dt$$

2. Если разность каких-нибудь двух корней $\lambda_p$ и $\lambda_q$ уравнения (3.7) есть чисто мнимое число $ib$, то должны быть ограничены функции

$$\int_0^t \varphi_{sj}^* \cos bt\, dt, \qquad \int_0^t \varphi_{sj}^* \sin bt\, dt$$

Условие 1 выполняется для любых периодических и квазипериодических функций. Для этих же функций будут выполняться и условия 2, если только разложения Фурье этих функций не содержат «резонирующих» гармоник $\cos bt$ и $\sin bt$. Переходим теперь к определению преобразования (4.4). С этой целью заменим в уравнениях (4.5) величины $y_s$ их значениями (4.4). Тогда, принимая во внимание (4.2), получим

$$\sum_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha}x_\alpha + \mu \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_{s\alpha}^* x_\alpha + \mu \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{df_s}{dt} x_\alpha + \mu \sum_{\alpha,\, \beta=1}^{n} f_{s\alpha} p_{\alpha\beta} x_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha}\left(x_\alpha + \mu \sum_{\beta=1}^{n} f_{\alpha\beta}x_\beta\right) + \mu \sum_{\alpha=1}^{n} a_{s\alpha}\left(x_\alpha + \mu \sum_{\beta=1}^{n} f_{\alpha\beta}x_\beta\right) + \mu^2(\ldots)$$

Приравнивая члены с первой степенью $\mu$, будем иметь

$$\frac{df_{sk}}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{n}p_{s\alpha}f_{\alpha a}-\sum_{\alpha=1}^{n}p_{\alpha k}f_{s\alpha}+a_{sk}-\varphi_{sk}^{*} \tag{4.6}$$

Из этих линейных неоднородных $n^2$ уравнений с постоянными коэффициентами функции $f_{sk}$ могут быть определены при помощи квадратур. Необходимо, однако, чтобы эти функции были ограниченными; покажем, что при сделанных допущениях постоянными $a_{sk}$ можно распорядиться так, чтобы это имело место. Допустим, что система (4.3) при помощи неособого линейного преобразования с постоянными коэффициентами приведена предварительно к каноническому виду. Так как по предположению уравнение (3.7) не имеет кратных корней, то канонический вид системы (4.3) будет

$$\frac{dx_s}{dt}=\lambda_s x_s \qquad (s=1,\ldots,n)$$

Здесь $\lambda_s$ — корни уравнения (3.7). Будем предполагать, что такое преобразование было выполнено с самого начала, и будем придерживаться прежнего обозначения переменных. Указанное предварительное преобразование не только упрощает выкладки, но и облегчает значительно вычисление коэффициентов $f_{sk}$ и поэтому его целесообразно действительно выполнить. Уравнения (4.2) имеют теперь вид:

$$\frac{dx_s}{dt}=\lambda_s x_s+\mu(\varphi_{s1}x_1+\cdots+\varphi_{sn}x_n) \tag{4.7}$$

где функции $\varphi_{sj}$ являются линейными комбинациями функций $\varphi_{sj}^{*}$ с постоянными коэффициентами и поэтому также удовлетворяют условиям 1 и 2. Вместо уравнений (4.6) имеем теперь уравнения

$$\frac{df_{sk}}{dt}=(\lambda_s-\lambda_k)f_{sk}+a_{sk}-\varphi_{sk} \tag{4.8}$$

Для того чтобы эти уравнения имели ограниченное решение, положим

$$a_{ss}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\varphi_{ss}dt \qquad (s=1,\ldots,n), \qquad a_{sk}=0 \qquad (s\neq k;\ s,k=1,\ldots,n)$$

Тогда функции $f_{ss}$, определяемые равенствами

$$f_{ss}=\int_0^t(a_{ss}-\varphi_{ss})\,dt$$

согласно условиям, которым удовлетворяют $\varphi_{sj}$, будут ограниченными. Покажем, что то же самое будет справедливо и по отношению к функциям $f_{sk}$ $(s\neq k)$, если в уравнениях (4.8), которым они удовлетворяют, надлежащим образом распорядиться постоянными интегрирования.

Действительно, обозначая $\lambda_s-\lambda_k=\alpha_{sk}+i\beta_{sk}$, можно положить

$$f_{sk}=-e^{\alpha_{sk}t}(\cos\beta_{sk}t+i\sin\beta_{sk}t)\int_a^t e^{-\alpha_{sk}t}(\cos\beta_{sk}t-i\sin\beta_{sk}t)\varphi_{sk} \tag{4.9}$$

где $a$ — произвольная постоянная. Эту постоянную положим равной нулю при $\alpha_{sk}\leqslant 0$ и равной $\infty$ при $\alpha_{sk}>0$.

Тогда будем иметь

$$|f_{sk}| < Me^{\alpha_{sk}t} \int_0^t e^{-\alpha_{sk}t} dt = -\frac{M}{\alpha_{sk}}(1 - e^{\alpha_{sk}t}), \quad \text{если } \alpha_{sk} < 0 \tag{4.10}$$

$$|f_{sk}| < Me^{\alpha_{sk}t} \int_t^\infty e^{-\alpha_{sk}t} dt = \frac{M}{\alpha_{sk}}, \quad \text{если } \alpha_{sk} > 0 \tag{4.11}$$

Здесь $M$ — верхний предел функций $|\varphi_{sk}|$. Из (4.10) и (4.11) вытекает ограниченность функций (4,9) при $\alpha_{sk} \neq 0$; ограниченность при $\alpha_{sk} = 0$ вытекает из условия 2, которому удовлетворяют функции $\varphi_{sk}$.

Входящие в определение функций $f_{sk}$ постоянные интегрирования могут быть выбраны по произволу. При $\mu$ достаточно малом определитель подстановки (4.4) превосходит при любом $t > 0$ некоторую положительную постоянную, вследствие чего характеристические числа системы (4.2) совпадают с характеристическими числами системы (4.5). Выбрав $f_{sk}$ и $a_{sk}$ указанным образом, мы приведем систему (4.7) к виду

$$\frac{dy_s}{dt} = \lambda_s y_s + \mu a_{ss} y_s + \mu^2 (\psi_{s1} y_1 + \cdots + \psi_{sn} y_n) \tag{4.12}$$

Допустим, что наименьшее характеристическое число системы

$$\frac{dy_s}{dt} = (\lambda_s + \mu a_{ss})\, y_s \tag{4.13}$$

с постоянными коэффициентами отлично от нуля. Тогда на основании теоремы об устойчивости характеристических чисел систем с постоянными коэффициентами величину $\mu$ можно всегда выбрать настолько малой, чтобы знак наименьшего характеристического числа системы (4.12) совпадал со знаком наименьшего характеристического числа системы (4.13). Если последний положителен, то оценка верхнего предела $\mu$ может быть сделана по теореме III.

Если коэффициенты $\psi_{sj}$ в преобразованных уравнениях (4.12) обладают такими же свойствами, как и коэффициенты $\varphi_{sj}$, то эти уравнения можно подвергнуть такому же преобразованию и получить новые уравнения, у которых переменные коэффициенты будут иметь порядок малости $\mu^3$. Аналогичным образом можно продолжать и дальше. В частности, если коэффициенты $\varphi_{sj}$ являются квазипериодическими функциями, то можно построить любое число приближений и привести уравнения (4.2) к виду

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1} y_1 + \cdots + p_{sn} y_n + \sum_{\alpha=1}^{k} \mu^\alpha (a_{s1}^{(\alpha)} y_1 + \cdots + a_{sn}^{(\alpha)} y_n), + \\ + \mu^{k+1} [f_{s1}(t)\, y_1 + \cdots + f_{sn}(t)\, y_n] \tag{4.14}$$

где $a_{sj}^{(\alpha)}$ — постоянные. Этот прием использовал И. З. Штокало [4] для установления критериев устойчивости для линейных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Однако И. З. Штокало не устанавливает пределов для $\mu$ и ограничивается доказательством, что при $\mu$ достаточно малом невозмущенное движение будет устойчиво, если вещественные части корней характеристического уравнения с постоянными коэффициентами отрицательны. Заметим, что последнее вытекает из известной теоремы об устойчивости по первому приближению, согласно которой невозмущенное движение для системы вида

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \cdots + p_{sn}y_n + L_s(t, y_1, \ldots, y_n) \tag{4.15}$$

асимптотически устойчиво при любом выборе функций $L_s$, удовлетворяющих неравенствам $|L_s(t, y_1, \ldots, y_n)| < A\{|y_1| + \cdots + |y_n|\}$, где $A$ — достаточно малая постоянная, если вещественные части всех корней характеристического уравнения системы первого приближения отрицательны.

*Пример*. Рассмотрим в качестве примера систему (4.1). Для этой системы уравнения, определяющие коэффициенты преобразования (4.4)

$$y_1 = x_1 + \mu(f_{11}x_1 + f_{12}x_2), \qquad y_2 = x_2 + \mu(f_{21}x_1 + f_{22}x_2) \tag{4.16}$$

имеют вид:

$$\frac{df_{11}}{dt} = a_{11} + 1 - 2\sin t, \qquad \frac{df_{22}}{dt} = a_{22}, \qquad \frac{df_{12}}{dt} = f_{12} - 1, \qquad \frac{df_{21}}{dt} = -f_{21} - 1$$

Эти уравнения имеют такие ограниченные решения:

$$f_{11} = 2\cos t, \qquad f_{22} = 0. \qquad f_{12} = 1, \qquad f_{21} = -1$$

причем $a_{11} = -1$, $a_{22} = 0$.

Подставляя в (4.16) и выполняя преобразование, получим вместо (4.1) систему:

$$\frac{dy_1}{dt} = -\mu y_1 + \mu^2(\psi_{11}y_1 + \psi_{12}y_2), \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\ y_2 + \mu^2(\psi_{21}y_1 + \psi_{22}y_2) \tag{4.17}$$

где

$$\begin{aligned}
\psi_{11} &= \frac{1}{\Delta}[1 + 2\sin 2t + \mu(1 + 2\cos t)] \\
\psi_{12} &= \frac{1}{\Delta}[1 + 2\cos t + \mu(-1 + 4\cos^2 t - \sin 2t + 2\cos t)] \\
\psi_{21} &= \frac{1}{\Delta}[1 - 2\sin t - \mu] \qquad\qquad (\Delta = 1 + 2\mu\cos t + \mu^2) \\
\psi_{22} &= \frac{1}{\Delta}[-1 + \mu(-1 + 2\sin t - 2\cos t)]
\end{aligned}$$

Характеристические показатели системы (4.17) будут положительны, если величины $\mu^2|\psi_{sj}|$ достаточно малы. Для оценки верхнего предела этих величин воспользуемся формулой (3.8). В рассматриваемом случае $\lambda = \mu$, $m = 2$ и $M = 1$. Поэтому для того чтобы характеристические числа системы (4.17) были положительны, достаточно, чтобы функции $\mu^2|\psi_{sj}|$ удовлетворяли неравенствам $\mu^2|\psi_{sj}| < \mu/2$. Грубая оценка показывает, что это будет выполнено, если $\mu \leqslant 1/9$.

Поступила 22 VI 1951

Уральский государственный университет

## ЛИТЕРАТУРА


1. Былов Б. Ф. О характеристичных числах решений систем линейных дифференциальных уравнений. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 4.
2. Персидский К. П. О характеристичных числах дифференциальных уравнений. Изв. Казахской Академии Наук. 1947. Вып. 1.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат. 1946.
4. Штокало И. З. Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Математический сборник. 1946. Т. 19. № 2.