

ПОПЕРЕЧНЫЙ УДАР ПО ГИБКОЙ НИТИ ТЕЛОМ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ

Х. А. Рахматулин

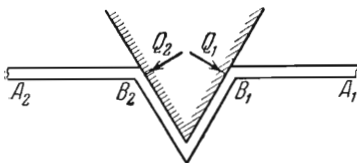
(Москва)

Большинство работ, рассматривающих поперечный удар по гибкой нити, посвящено исследованию случая, когда ударяющее тело имеет только одну общую точку с объектом, по которому производится удар.

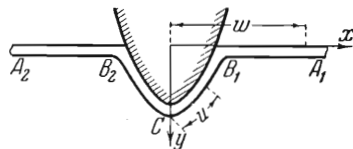
И. Н. Зверев в своей кандидатской диссертации рассмотрел случай удара клина по гибкой нити, когда в области поперечных движений нить прилегала к клину. Особенностью схемы И. Н. Зверева, представленной на фиг. 1, является наличие сосредоточенных сил Q_1 и Q_2 в точках перехода B_1 и B_2 поперечного движения в продольное. Эту схему можно интерпретировать как удар по нити, обладающей свойствами растяжимости вдоль ее длины и абсолютно не упругой в поперечном направлении. При такой схеме нормальная скорость удара частицы нити целиком гасится при ее переходе на поверхность клина.

В настоящей работе показано, что при помощи вышеуказанной схемы можно решить задачу о поперечном ударе по гибкой нити телом произвольной формы и, в частности, дается решение задачи о поперечном ударе телом, вершина которого имеет отличную от нуля кривизну. Кроме того, показано, что при переходе через волну сильного разрыва энергия теряется.

§ 1. Основные уравнения задачи. Пусть на тело, имеющее произвольную форму, налетает бесконечно длинная гибкая прямолинейная нить (фиг. 2). Будем предполагать, что частицы нити до соприкосновения с телом могут приобрести дополнительные скорости, направленные вдоль нее.



Фиг. 1



Фиг. 2

В дальнейшем будет показано существование решений уравнений, описывающих движения для схемы, представленной на фиг. 2. Этим самым будет доказана возможность указанной схемы движения, вопрос же о единственности ее остается открытым.

Обозначим через u длину нити до рассматриваемой частицы, отсчитываемой от точки C , в которой скорость частицы нити равна нулю; через w — расстояние частицы нити от начала координатной системы, движущейся с нитью; через T — натяжения нити в рассматриваемой области.

Очевидно, уравнения движения в областях CB и BA соответственно будут

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.1)$$

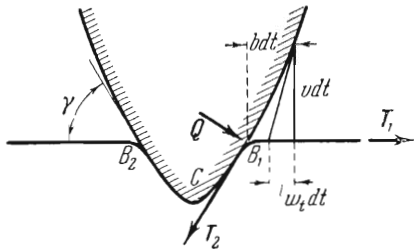
где ρ_0 — масса единицы длины нити до удара.

В области прилегания нити к телу имеем еще одно уравнение:

$$p = \frac{1}{r} \left[T - \frac{\rho_0 u_t^2}{1 + \epsilon} \right] \quad \left(u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (1.2)$$

Здесь p — давление нити на тело, r — радиус кривизны тела.

Составим уравнения совместности при переходе частицы из свободного движения в область прилегания CB_1 (фиг. 3).



Фиг. 3

Рассмотрим частицу нити, которая за время dt переходит из области свободного движения в область прилегания.

Очевидно, длина элемента, переходящего целиком из одной области в другую, равна $(b - w_t) dt$, где b — скорость передвижения граничной точки вдоль нити.

Напишем уравнения количества движения по касательной и по нормали к контуру тела:

$$\begin{aligned} \rho (b - w_t) (u_t - w_t \cos \gamma - v \sin \gamma) &= T_1 \cos \gamma - T_2 \\ \rho (b - w_t) (v \cos \gamma - w_t \sin \gamma) &= Q + T_1 \sin \gamma \end{aligned} \quad (1.3)$$

В этих уравнениях T_1 — натяжение в области свободного движения, T_2 — натяжение в области прилегания, Q — сосредоточенная сила в точке перехода, v — скорость нити до удара, γ — угол между касательной к телу в точке перехода и начальным направлением нити, u_t , w_t — значения скоростей частицы с разных сторон точки перехода.

Из фиг. 3 непосредственно видно, что

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v}{b} \quad (1.4)$$

Так как в данном случае γ и b — заданные функции времени, уравнение (1.4) является тождеством. Оно может служить для вычисления одной из двух величин γ , b , когда одна из них задана.

Напишем уравнение неразрывности

$$\frac{b - w_t}{1 + \epsilon_1} = \frac{b / \cos \gamma - u_t}{1 + \epsilon_2} \quad (1.5)$$

где ϵ_1 и ϵ_2 — деформации в области свободного движения и в области прилегания.

§ 2. Случай удара клина. В этом случае, очевидно, $u_t = 0$ во всей области прилегания; следовательно, из (1.6) получим

$$b(1 + \varepsilon_1) = (b - w_t)(1 + \varepsilon_2) \cos \gamma \quad (2.1)$$

Из (1.4) имеем

$$\rho(b - w_t)(w_t \cos \gamma + v \sin \gamma) = T_2 - T_1 \cos \gamma \quad (2.2)$$

Рассмотрим случай упругих деформаций. В этом случае

$$T_1 = E\varepsilon_1, \quad T_2 = E\varepsilon_2$$

Так как уравнение (1.2) линейное и имеет интеграл Даламбера, то

$$w_t = -a\varepsilon_1 \quad (a^2 = E/\rho) \quad (2.3)$$

В уравнения (2.1), (2.2), (2.3) входят неизвестные величины w_t , ε_1 и ε_2 . Из уравнений (2.1) и (2.3) имеем

$$\varepsilon_2 = \frac{b(1 + \varepsilon_1)}{(b + a\varepsilon_1) \cos \gamma} - 1 \quad (2.4)$$

Уравнение (2.2), подставив T_1 , T_2 , а также $b - w_t$ из (2.1) и w_t из (2.3), представим в виде

$$\frac{(1 + \varepsilon_1)b}{(1 + \varepsilon_2) \cos \gamma} (v \sin \gamma - a\varepsilon_1 \cos \gamma) = a^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \cos \gamma)(1 + \varepsilon_1)$$

Отсюда

$$\frac{a^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \cos \gamma)(1 + \varepsilon_2) \cos \gamma}{b} + a\varepsilon_1 \cos \gamma = v \sin \gamma \quad (2.5)$$

Из второго уравнения (1.3) получаем

$$Q = [\rho(b + a\varepsilon_1)^2 - T_1] \sin \gamma \quad (2.6)$$

В этом выражении b и ε_1 можно рассматривать как независимые величины. Условие прилегания нити к поверхности клина будет

$$b + \varepsilon_1 \geq \sqrt{(1 + \varepsilon_1)\varepsilon_1} \quad (b_0 = b/a)$$

Отсюда очевидно, что условием отрыва будет неравенство

$$b \leq \sqrt{(1 + \varepsilon_1)\varepsilon_1} - \varepsilon_1 \quad (2.7)$$

Заметим, что (2.7) является условием отрыва при ударе телом любой формы, ибо оно получено только из уравнений на граничной поверхности двух областей движения. Для случая удара произвольным телом при отсутствии разгрузки (2.7) заменится следующим условием:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{T}{\rho_0 a^2} (1 - \varepsilon_1)} - \int_0^{\varepsilon_1} \frac{a(\varepsilon)}{a} d\varepsilon \quad (2.8)$$

Исследуем вопрос об энергетическом балансе при переходе частицы через волну сильного разрыва.

Составим разность между приращением энергии и работой внешних сил:

$$\Delta \mathcal{E} = \rho (b - w_t) \left(\frac{u_t^2}{1} - \frac{w_t^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right) + \frac{b - w_t}{1 + \varepsilon_1} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} T(\varepsilon) d\varepsilon - T_1 w_t + T_2 u_t$$

Если эта разность меньше нуля, то при переходе через поверхность сильного разрыва имеет место потеря энергии.

Выясним знак величины $\Delta \mathcal{E}$ для случая удара клина при упругих деформациях. В этом случае

$$\Delta \mathcal{E} = \rho_0 \frac{b - w_t}{1 + \varepsilon_1} \left[\frac{u_t^2}{2} - \frac{w_t^2}{2} - \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{2} (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) \right] + \rho_0 a^2 (\varepsilon_2 u_t - \varepsilon_1 w_t)$$

Так как $u_t = 0$, $w_t = -a\varepsilon_1$, то отсюда имеем

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\rho_0 (b + a\varepsilon_1)}{1 + \varepsilon_1} \left[\frac{a^2}{2} (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) - \frac{a^2 \varepsilon_1^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right] - \rho_0 a^3 \varepsilon_1^2$$

или

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\rho_0 a^3}{1 + \varepsilon_1} \left\{ (b_0 + \varepsilon_1) \left[\frac{\varepsilon_2^2}{2} - \varepsilon_1^2 - \frac{b_0^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}{2} \right] + \varepsilon_1^2 (1 + \varepsilon_1) \right\} \quad (2.9)$$

Если в (2.9) подставить выражение ε_2 , то получим зависимость $\Delta \mathcal{E}$ от ε_1 , b , γ ; на самом деле, $\Delta \mathcal{E}$ зависит от двух величин [в силу (1.4)]. Из (2.2) имеем

$$\rho_0 (b + a\varepsilon_1) (b \operatorname{tg} \gamma \sin \gamma - a\varepsilon_1 \cos \gamma) = E (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \cos \gamma) (1 + \varepsilon_1)$$

Подставляя вместо ε_2 его выражение из (2.4), получим

$$(b_0 + \varepsilon_1) [b_0 \operatorname{tg} \gamma \sin \gamma - \varepsilon_1 \cos \gamma] = \left[\frac{b_0 (1 + \varepsilon_1)}{(b_0 + \varepsilon_1) \cos \gamma} - 1 - \varepsilon_1 \cos \gamma \right] (1 + \varepsilon_1)$$

или

$$(b_0 + \varepsilon_1) [\varepsilon_1 (1 + \varepsilon_1) - (b_0 + \varepsilon_1)^2 \cos^2 \gamma + (b_0 + \varepsilon_1) (1 + \varepsilon_1) \cos \gamma + b_0 [(b_0 + \varepsilon_1)^2 - (1 + \varepsilon_1)^2]] = 0$$

Отсюда

$$\cos \gamma = \frac{1 + \varepsilon_1}{2 [(b_0 + \varepsilon_1)^2 - \varepsilon_1 (1 + \varepsilon_1)]} - \left(\frac{(1 + \varepsilon_1)^2}{4 [(b_0 + \varepsilon_1)^2 - \varepsilon_1 (1 + \varepsilon_1)]^2} - \frac{b_0 [(1 + \varepsilon_1)^2 - (b_0 + \varepsilon_1)^2]}{(b_0 + \varepsilon_1) [(b_0 + \varepsilon_1)^2 - \varepsilon_1 (1 + \varepsilon_1)]} \right)^{1/2} \quad (2.10)$$

Пользуясь малостью разности $[(b_0 + \varepsilon_1)^2 - \varepsilon_1 (1 + \varepsilon_1)]$, это выражение представим в виде

$$\cos \gamma = \frac{1 + \varepsilon_1}{2 [(b_0 + \varepsilon_1)^2 - \varepsilon_1 (1 + \varepsilon_1)]} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2b_0 [(1 + \varepsilon_1)^2 - (b_0 + \varepsilon_1)^2] [(b_0 + \varepsilon_1)^2 - \varepsilon_1 (1 + \varepsilon_1)]}{(b_0 + \varepsilon_1) (1 + \varepsilon_1)^2} \right) \right\}$$

или

$$\cos \gamma = \frac{[(1 + \varepsilon_1)^2 - (b_0 + \varepsilon_1)^2] b_0}{(b_0 + \varepsilon_1) (1 + \varepsilon_1)}$$

Для оценки знака $\Delta \mathcal{E}$ воспользуемся некоторыми численными значениями величин b_0 и ε_1 .

Положим $b_0 = 0.1$, $\varepsilon_1 = 0.001$. Тогда получим $\cos \gamma = 0.988$, $\operatorname{tg}^2 \gamma = 0.025$, $\varepsilon_1 = 0.0031$,

Подстановка в (2.9) дает

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\rho_0 a^3}{1 + \varepsilon_1} \{0.101 [4.8 \times 10^{-6} - 10^{-6} - 1.25 \times 10^{-4}] + 10^{-6} \times 1.001\}$$

Отсюда видно, что $\Delta \mathcal{E} < 0$; это свидетельствует о наличии потери энергии при переходе через поверхность сильного разрыва. Такое обстоятельство может быть, в частности, объяснено тем, что ударяющая частица теряет кинетическую энергию, соответствующую нормальной к клину скорости, что в свою очередь может быть отнесено за счет абсолютной неупругости нити в поперечном направлении. Из приведенного числового представления $\Delta \mathcal{E}$ видно, что порядок члена $\frac{1}{2} v^2$ в выражении $\Delta \mathcal{E}$ выше, чем других членов.

Обращаем внимание на принципиальность приведенного числового примера, подтверждающего, что $\Delta \mathcal{E} < 0$. В противном случае, т. е. когда $\Delta \mathcal{E} > 0$, рассматриваемая схема движения с наличием сосредоточенной силы была бы нереальной, так как неравенство $\Delta \mathcal{E} > 0$ означало бы наличие перпетуум-мобиле первого рода.

Рассмотрим теперь случай удара при $b > a$ или $b_0 > 1$.

В этом случае, очевидно, $\varepsilon_1 = w_t = 0$. Из (1.3) и (1.5) получим

$$\rho b (v \sin \gamma - u_t) = E \varepsilon_2 = T_2, \quad b(1 + \varepsilon_2) = \frac{b}{\cos \gamma} - u_t \quad (2.11)$$

Из этих уравнений непосредственно имеем

$$\begin{aligned} \rho b \left[v \sin \gamma - \frac{b}{\cos \gamma} + b(1 + \varepsilon_2) \right] &= E \varepsilon_2 \\ b + \frac{b \sin^2 \gamma - b}{\cos \gamma} &= \frac{a^2}{b} \varepsilon_2 - b \varepsilon_2 \\ 1 - \cos \gamma = (\lambda^2 - 1) \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 &= \frac{1 - \cos \gamma}{\lambda^2 - 1} \quad \left(\lambda = \frac{a}{b} < 1 \right) \\ \varepsilon_2 &= -\frac{1 - \cos \gamma}{1 - \lambda^2} < 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Найдем выражение для скорости;

$$u_t = \frac{b}{\cos \gamma} - b \left(1 - \frac{1 - \cos \gamma}{1 - \lambda^2} \right) = \frac{b}{\cos \gamma} - b \frac{\cos \gamma - \lambda^2}{1 - \lambda^2} > 0$$

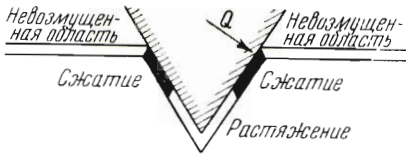
Подставляя $b = v \operatorname{ctg} \gamma$ согласно (1.4), получим

$$u_t = v \left[\frac{1}{\sin \gamma} - \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \frac{\cos \gamma - \lambda^2}{1 - \lambda^2} \right] = v \frac{\sin^2 \gamma - \lambda^2 (1 - \cos \gamma)}{(1 - \lambda^2) \sin \gamma}$$

Так как $\lambda = \frac{a}{b} = \frac{a \operatorname{tg} \gamma}{v}$, то

$$u_t = v \sin \gamma \left(1 - \frac{1}{v_0^2} \frac{1 - \cos \gamma}{\cos^2 \gamma} \right) \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma}{v_0^2} \right)^{-1} > v \sin \gamma \quad \left(v_0 = \frac{v}{a} \right) \quad (2.13)$$

Так как в силу симметрии задачи в вершине $u_t' = 0$, то состояние движения вблизи волны сильного разрыва, где $u_t > 0$, не может распространиться на всю щеку клина. Следовательно, вдоль щеки клина должна возникнуть волна, «переводящая» состояние $u_t > 0$ в состояние $u_t = 0$. Так как мы сейчас рассматриваем движение при упругих деформациях,



Фиг. 4

упомянутая волна может быть только волной сильного разрыва, распространяющаяся со скоростью a (фиг. 4).

Напишем уравнение количества движения на поверхности разрыва движущейся вдоль клина

$$(a - u_t) \rho_2 u_t = T_3 - T_2$$

где T_3 — натяжение на участке растяжения, T_2 — натяжение на участке сжатия. Подставляя вместо $T_2 = E\varepsilon_2$ и $\rho_2 = \rho_0 / (1 + \varepsilon_2)$, получим

$$T_3 = \rho_0 a^2 \frac{(1 - u_t^\circ) u_t^\circ + \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}{1 + \varepsilon_2} \quad \left(u_t^\circ = \frac{u_t}{a} \right) \quad (2.14)$$

Таким образом, установлена схема движения при поперечном ударе, когда $b > a$. При этом заметим, что хотя гибкая нить при статическом нагружении продольного сжатия практически не воспринимает, можно полагать, что при динамическом состоянии наличие деформаций сжатия в этой схеме окажется вполне реальным.

После установления схемы можно решить задачу об ударе по гибкой нити телом, имеющим тупую головную часть. Заметим, что такая задача допускает экспериментальную проверку.

Так как согласно (2.12) $\varepsilon_2 = -\infty$ при $T = E\varepsilon$ и $a = b$, то отсюда следует существование значения b , достаточно близкое к a , когда деформации переходят за предел упругости.

Поэтому рассмотрим удар, когда $b > a$, предполагая $T = T_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s)$. В этом случае из (1.4) имеем следующее уравнение:

$$\rho b (v \sin \gamma - u_t) = T_s + E_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_s), \quad b(1 + \varepsilon_2) = \frac{b}{c \sin \gamma} - u_t$$

Отсюда

$$\rho_0 b \left[v \sin \gamma - \frac{b}{\cos \gamma} + b(1 + \varepsilon_2) \right] = T_s + E_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_s)$$

или

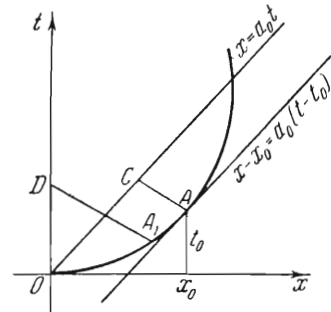
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{a_1^2 - b^2} \left[b \left(v \sin \gamma - b \frac{1 - \cos \gamma}{\cos \gamma} \right) - \frac{T_s}{\rho_0} + a_1^2 \varepsilon_s \right] \quad (2.15)$$

Из этой формулы видно, что ε_2 — конечная величина при $a = b$. Таким образом, бесконечное сжатие, полученное по (2.12), является следствием допущения только упругих напряжений при больших деформациях. Переход от сжатия к растяжению при пластических деформациях является процессом разгрузки. Поэтому для получения деформации растяжения придется иметь в виду наличие эффекта Баушингера.

§ 3. Поперечный удар по гибкой нити круглым цилиндром. Прежде всего вычислим скорость сильного разрыва b . Из определения b непосредственно имеем

$$b = \frac{d}{dt} [\sqrt{r^2 - (r - vt)^2}] = \frac{r - vt}{\sqrt{r^2 - (r - vt)^2}} v \quad (3.1)$$

Из (3.1) видно, что в начальный момент $b = \infty$. Следовательно, обязательно существует отрезок времени t_0 , в продолжение которого скорость сильного разрыва b больше скорости звука в материале a . В силу сказанного картина движения в плоскости xt имеет вид, представленный на фиг. 5.



Фиг. 5

На линии сильного разрыва OA (фиг. 5), очевидно, будем иметь те же соотношения между скоростью u_2 , деформацией ε_2 и углом наклона касательной γ , что и при движении клина в случае $b > a$.

Итак, из (2.12) и (2.13) имеем

$$\varepsilon_2 = -\frac{1 - \cos \gamma}{1 - \lambda^2}, \quad u_{2t} = v \sin \gamma \left(1 - \frac{1 - \cos \gamma}{v_0^2 \cos^2 \gamma}\right) \left(1 - \frac{\text{tg}^2 \gamma}{v_0^2}\right)^{-1} = \varphi(t) \quad (3.2)$$

Заметим, что в первый момент удара $\cos \gamma \approx 1$ и, следовательно,

$$\varepsilon_2 = 0, \quad u_{2t} = 0$$

На линии OA заданы ε_2 и u_{2t} как функции t , так как $b = b(t)$ и $\text{tg} \gamma = v / b(t)$.

Следовательно, задача об определении движения в области OA_1C сводится к задаче Коши. Заметим, что точка A_1 является точкой перехода за предел упругости. Для случая упругих деформаций имеем

$$u = f_1(x - at) + f_2(x + at) \quad (3.3)$$

Уравнение линии OA , очевидно, имеет вид:

$$x = \sqrt{r^2 - (r - vt)^2} \quad (3.4)$$

Из условия на этой линии получим

$$\begin{aligned} -\frac{1 - \cos \gamma}{1 - \lambda^2} &= f_1'(x - at) + f_2'(x + at) - 1 \\ -af'(x - at) + af_2'(x + at) &= \varphi(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь штрихи означают производные по аргументу, указанному в скобках. Введем обозначения

$$\sqrt{2vtr - v^2t^2} - at = \xi(t), \quad \sqrt{2vtr - v^2t^2} + at = \eta(t) \quad (3.6)$$

Тогда согласно (3.4) для f_1' и f_2' в равенствах (3.5) будем иметь

$$\begin{aligned} f_2'(\eta) &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1 - \cos \gamma}{1 - \lambda^2} + \frac{\varphi(t)}{a}\right] = \psi_1(t) \\ f_1'(\xi) &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1 - \cos \gamma}{1 - \lambda^2} - \frac{\varphi(t)}{a}\right] = \psi_2(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решая каждое из равенств (3.6) относительно t , соответственно имеем

$$t = \frac{vr - a\xi}{a^2 + v^2} - \sqrt{\frac{(vr - a\xi)^2}{(a^2 + v^2)^2} - \frac{\xi^2}{a^2 + v^2}} = t^{(\xi)} \quad (3.8)$$

$$t = \frac{vr + a\eta}{a^2 + v^2} - \sqrt{\frac{(vr + a\eta)^2}{(a^2 + v^2)^2} - \frac{\eta^2}{a^2 + v^2}} = t^{(\eta)} \quad (3.9)$$

В области OA_1C имеем

$$f_1'(x - at) = \psi_2(t^{(\xi)}(x - at)), \quad f_2' = \psi_1(t^{(\eta)}(x + at)) \quad (3.10)$$

Определение движения в области OC_1D приводится к смешанной задаче Коши. Положим

$$u = f_3(at - x) + f_4(x + at) \quad (3.11)$$

Так как вдоль линии $x = at$ смещения непрерывны, то должно выполняться условие

$$f_4'(x + at) = f_2'(x + at) \quad (3.12)$$

При $x = 0$ имеем

$$f_3(at) = -f_4(at), \quad \text{или} \quad f'(at) = -f_4'(at)$$

Итак,

$$f_3'(at - x) = -f_2'(at - x) \quad (3.13)$$

Так как по (3.10) $f_2' = \psi(t^{(\eta)}(x + at))$ известна, то, пользуясь формулами (3.12) и (3.13), можно вычислить скорости и деформации. Найдем деформацию в точке $x = 0$:

$$\varepsilon(0, t) = u_x(0, t) - 1 = f_3'(at) + f_4'(at) - 1 = 2f_2'(at) - 1$$

Или, имея в виду (3.7), получим

$$\varepsilon(0, t) = \frac{\varphi(\tau)}{a} - \frac{1 - \cos \gamma(\tau)}{1 - \lambda^2(\tau)}$$

Подставляя выражение $\varphi(\tau)$ согласно (3.2), получим

$$\varepsilon(0, t) = \frac{v_0 \sin \gamma(\tau)}{1 - \lambda^2(\tau)} \left(1 - \frac{1}{v_0^2} \frac{1 - \cos \gamma(\tau)}{\cos^2 \gamma(\tau)} \right) - \frac{1 - \cos \gamma(\tau)}{1 - \lambda^2(\tau)}$$

где

$$\tau = \frac{r}{a(1 + v_0^2)} \left(v_0 + \frac{at}{r} - \sqrt{\left(v_0 + \frac{at}{r} \right)^2 - (1 + v_0^2) \frac{a^2 t^2}{r^2}} \right) \quad (3.14)$$

Для небольших значений t_2 получаем

$$\varepsilon(0, t) = v_0 \gamma \frac{1 - 1/2 \lambda^2}{1 - \lambda^2} - \frac{1/2 \gamma^2}{1 - \lambda^2} \quad \left(\lambda = \frac{a}{b} \right)$$

Или, имея в виду (1.4), получим

$$\varepsilon(0, t) = \gamma^2 \left[\frac{1}{\lambda} \frac{1 - 1/2 \lambda^2}{1 - \lambda^2} - \frac{1/2}{1 - \lambda^2} \right] = v_0^2 \lambda \left[\frac{1 - 1/2 \lambda^2 - 1/2 \lambda}{1 - \lambda^2} \right] \quad (3.15)$$

Из этой формулы видно, что для малых значений t деформация $\varepsilon(0, t) > 0$. Заметим, что $\varepsilon(0, t) > 0$ для всех t , формула же (3.15) годна только для малых t . Из формулы (3.1) получаем

$$\frac{1}{\lambda} = v_0 \frac{(1 - v_0 a \tau / r)}{\sqrt{2v_0 a \tau / r - v_0^2 a^2 \tau^2 / r^2}}$$

Из формулы (3.14)

$$\frac{a\tau}{r} = \frac{1+z - \sqrt{(1+z)^2 - (1+v_0^2)z^2}}{1+v_0^2} \quad \left(z = \frac{at}{r}\right)$$

Для малых z и малых v_0 имеем

$$\frac{a\tau}{r} = \frac{1+z}{1+v_0^2} \left[1 - 1 + \frac{(1+v_0^2)z^2}{2(1+z)^2}\right], \quad \frac{a\tau}{r} \approx \frac{z^2}{2(1+z)^2} \approx \frac{z^2}{2}$$

Непосредственно из выражения для b получим

$$\frac{1}{\lambda} = v_0 \frac{1}{\sqrt{2v_0 a \tau / r}} \frac{1 - v_0 a \tau / r}{\sqrt{1 - 1/2 v_0 a \tau / r}} \approx \frac{\sqrt{v_0}}{z} = \frac{r \sqrt{v_0}}{at}$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{at}{r \sqrt{v_0}}$$

Считая λ малым по сравнению с единицей, получим

$$\varepsilon(0, t) = \left[\frac{v_0}{a}\right]^{3/2} \frac{at}{r} \quad (3.16)$$

Из этой формулы видно, что деформация в точке $x=0$ растёт пропорционально $\frac{3}{2}$ степени скорости удара, первой степени времени и обратно пропорционально радиусу цилиндра.

Заметим, что представляет интерес вычисление максимального значения $\varepsilon(0, t)$. Из изложенного выше видно, что для нахождения ε_{\max} необходимо решить задачу с учетом возникновения пластических деформаций. При решении указанной задачи нужно исследовать вопрос об условиях возникновения волн разгрузки. Очевидно, задача об ударе тела любой формы по гибкой нити для случая упругих деформаций не представляет особой трудности. При достаточно малых временах формула (3.16) может быть применена для тела любой формы, только под r следует понимать радиус кривизны тела в точке $x=0$.

Ввиду важности исследования удара при пластических деформациях ниже рассмотрим решение задачи с учетом возникновения пластических деформаций для случая линейного упрочнения.

§ 4. Исследование пластических деформаций, возникающих при ударе по гибкой нити круглым цилиндром. Выше установлено, что $\varepsilon_2 = -\infty$ при $\lambda = 1$. Следовательно, до наступления момента $\lambda = 1$ возникают пластические деформации. Точка на волне сильного разрыва, где $\varepsilon_2 = \varepsilon_s$, обозначена через A_1 и точка, где $\lambda = 1$, через A (фиг. 5). Очевидно, ордината t точки A_1 определится из уравнения

$$\varepsilon_s = -\frac{1 - \cos \gamma(t_1)}{1 - \lambda^2(t_1)}$$

Подставляя сюда $\lambda = \frac{a}{b} = \frac{\text{tg } \gamma}{v_0}$, получим

$$\varepsilon_s (v_0^2 \cos^2 \gamma_1 - \sin^2 \gamma_1) = v_0^2 \cos^2 \gamma_1 [1 - \cos \gamma_1] \quad (4.1)$$

Ордината точки A определится из уравнения

$$a = \frac{r - vt_0}{\sqrt{2rvt_0 - v^2 t_0^2}} v$$

Таким образом, определяя отсюда t_0 и пользуясь (3.4), для точки A будем иметь

$$t_0 = \frac{r}{v} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{1 + v_0^2}} \right], \quad x_0 = \sqrt{2rvt_0 - v^2 t_0^2} \quad (4.2)$$

Для случая линейного упрочнения, т. е. когда

$$T = T_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s)$$

по формуле (2.15) имеем

$$\varepsilon_2 = - \frac{1 - \cos \gamma - (\lambda^2 - \lambda_1^2) \varepsilon_s}{1 - \lambda_1^2} \quad \left(\lambda_1^2 = \frac{E_1}{\rho_0 b^2} \right) \quad (4.3)$$

Следовательно, для u_t получаем

$$u_t = \frac{b}{\cos \gamma} - b \left(1 - \frac{1 - \cos \gamma - (\lambda^2 - \lambda_1^2) \varepsilon_s}{1 - \lambda_1^2} \right) = b \left[\frac{1 - \cos \gamma}{\cos \gamma} + \frac{1 - \cos \gamma - (\lambda^2 - \lambda_1^2) \varepsilon_s}{1 - \lambda_1^2} \right]$$

Из формул (4.3) и (4.4) видно, что при $\lambda = 1$ деформации и скорости остаются конечными.

Очевидно, что эти формулы справедливы для $t_1 \leq t \leq t_0$. При $t > t_0$ возникают натяжения и в области продольного движения, поэтому условия на поверхности сильного разрыва изменяются. Для дальнейшего продвижения задачи представляет интерес исследование поведения ε_2 по времени. Прежде всего заметим, что переход к пластическим деформациям на поверхности сильного разрыва совершается непрерывно. Для проверки этого в (4.3) достаточно подставить вместо $1 - \cos \gamma$ его выражение для точки A_1 .

Из (4.3), кроме того, видно, что при движении к точке A напряжение ε_2 по абсолютной величине все время будет расти. Очевидно, что возникшая в точке A_1 волна пластической деформации будет распространяться влево вдоль нити.

В области OA_1D должна существовать кривая, вдоль которой

$$\varepsilon = \varepsilon_s$$

Докажем это. Для этого докажем существование направления s , вдоль которого производная $d\varepsilon/ds$ в точке A_1 равна нулю. На основании (3.4) получаем

$$\varepsilon = f_1'(x - at) + f_2'(x + at)$$

Следовательно,

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = f_1''(x - at) \left[\frac{dx}{ds} - a \frac{dt}{ds} \right] + f_2''(x + at) \left[\frac{dx}{ds} + a \frac{dt}{ds} \right] = 0$$

Откуда

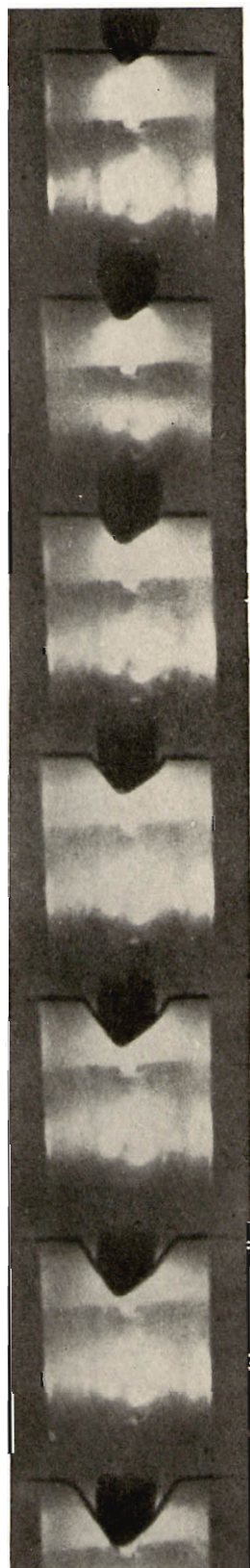
$$\frac{dx}{dt} = a \frac{f_2'' - f_1''}{f_1'' + f_2''} \quad (4.5)$$

Наше утверждение будет доказано, если dx/dt , определяемое из (4.5), будет удовлетворять неравенству

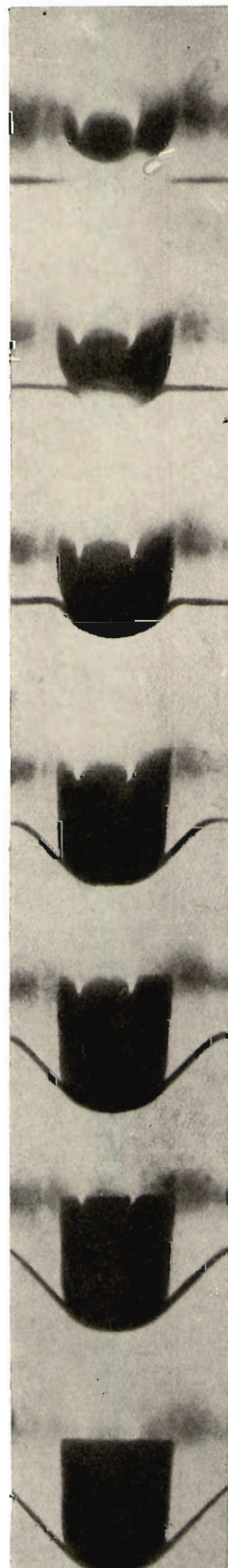
$$\frac{dx}{dt} \leq -a \quad (4.6)$$



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

На основании (3.7), (3.8) и (3.9) имеем

$$f_2''(\eta) = \frac{1}{2} \left[\frac{\varphi'(t)}{a} - \frac{\sin \gamma \gamma_t}{1-\lambda^2} - \frac{1-\cos \gamma}{(1-\lambda^2)^2} 2\lambda \lambda_t \right] \frac{dt^{(n)}}{d\eta} \quad (4.7)$$

$$f_1''(\xi) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\varphi'(t)}{a} + \frac{\sin \gamma \gamma_t}{1-\lambda^2} + \frac{1-\cos \gamma}{(1-\lambda^2)^2} 2\lambda \lambda_t \right] \frac{dt^{(\xi)}}{d\xi}$$

$$\frac{dt^{(\xi)}}{d\xi} = -\frac{a}{a^2+v^2} \left[1 - \frac{v(r_0+v_0\xi)}{\sqrt{v^2r^2-2vra\xi-v^2\xi^2}} \right] \quad (4.8)$$

$$\frac{dt^{(n)}}{d\eta} = \frac{a}{a^2+v^2} \left[1 - \frac{v(r-v_0\eta)}{\sqrt{r^2v^2+2vra\eta-v^2\eta^2}} \right]$$

Из (3.2) имеем

$$\varphi(t) = \frac{v \sin \gamma}{1-\lambda^2} \left(1 - \lambda^2 \frac{1-\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \right)$$

Дифференцируя функцию $\varphi(t)$, получим

$$\varphi'(t) = v\lambda_t \left[v_0 \frac{\cos \gamma - \lambda^2}{1-\lambda^2} \cos^2 \gamma + \frac{2\lambda \cos \gamma}{(1-\lambda^2)^2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right] \quad (4.9)$$

Окончательно имеем

$$f_2''(\eta) = \frac{1}{2} \left\{ v_0^2 \frac{\cos \gamma - \lambda^2}{1-\lambda^2} \cos^2 \gamma + \frac{2v_0 \cos \gamma}{(1-\lambda^2)^2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \frac{v_0 \cos^2 \gamma \sin \gamma}{1-\lambda^2} - \frac{1-\cos \gamma}{(1-\lambda^2)^2} 2\lambda \right\} \frac{dt^{(n)}}{d\eta} \lambda_t$$

$$f_1''(\xi) = -\frac{1}{2} \left\{ v_0^2 \frac{\cos \gamma - \lambda^2}{1-\lambda^2} \cos^2 \gamma + \frac{2v_0 \lambda \cos \gamma}{(1-\lambda^2)^2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \frac{v_0 \cos^2 \gamma \sin \gamma}{1-\lambda^2} + \frac{1-\cos \gamma}{(1-\lambda^2)^2} 2\lambda \right\} \frac{dt^{(\xi)}}{d\xi} \lambda_t$$

Ввиду сложности вопроса ограничимся исследованием величины dx/dt в окрестности точки A_1 . Из (4.1) получим

$$v_0^2 = \frac{-\epsilon_s \sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma_1 [1 - \cos \gamma_1 - \epsilon_s]} \quad (4.10)$$

Найдем теперь значение t_1 . Легко сообразить, что

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{d}{vdt} \sqrt{2vtr - v^2t^2} = \frac{v(r-vt)}{v\sqrt{2vtr - v^2t^2}}$$

Следовательно,

$$v^2(1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma) t^2 - 2rvt(1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma) + r^2 = 0$$

Откуда

$$t = \frac{r}{v} \pm \sqrt{\frac{r^2}{v_1^2} - \frac{r^2}{v^2} \sin^2 \gamma} = \frac{r}{v} (1 \pm \cos \gamma)$$

Очевидно, $t_1 = \frac{r}{v} (1 - \cos \gamma)$, $x_1 = r \sin \gamma_1$. Следовательно,

$$\xi = x_1 - at_1 = r \left[\sin \gamma - \frac{1-\cos \gamma}{v_0} \right] \quad (4.11)$$

$$\eta = x_1 + at_1 = r \left[\sin \gamma + \frac{1-\cos \gamma}{v_0} \right]$$

Прибегнем теперь, как и выше, к численной оценке. Положим $1 - \cos \gamma = \frac{1}{2} \epsilon_s$; тогда $\gamma^2 = \epsilon_s$, $\gamma = \sqrt{\epsilon_s}$, $v_0 = \sqrt{2} \sqrt{\epsilon_s}$

При $\epsilon_s = 2.5 \times 10^{-3}$ получим

$$v_0 = 0.1 \sqrt{0.5} = 0.0707, \quad \gamma_1 = 0.05 \approx 3^\circ, \quad \lambda = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

Согласно (4.12) имеем

$$\xi_1 = r \sqrt{\epsilon_s} \left(1 - \frac{1}{2.82}\right) = 0.645 r \sqrt{\epsilon_s} = 0.645 \cdot 0.05 r = 0.03225 r$$

Аналогично получим

$$\eta_1 = 1.355 r \sqrt{\epsilon_s} = 0.06775 r$$

Вычислим $dt^{(\xi)} / d\xi$ и $dt^{(\eta)} / d\eta$, пользуясь (4.8). Имеем

$$\frac{dt^{(\xi)}}{d\xi} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1.005} \left[1 - \frac{1 + 0.0707 \times 0.03225}{\sqrt{1 - \frac{0.0645}{0.0707} - 0.00104}} \right] = -\frac{1}{a} \frac{1}{1.005} \left[1 - \frac{1.0022}{\sqrt{0.0867}} \right] = \frac{2.39}{a}$$

$$\frac{dt^{(\eta)}}{d\eta} = \frac{1}{a} \left[1 - \frac{1 - 0.00478}{\sqrt{1 + \frac{0.13550}{0.0707} - 0.0046}} \right] = \frac{1}{a} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2.91}} \right] = \frac{0.41}{a}$$

Вычисляя $f_2''(\eta)$, $f_1''(\xi)$, находим

$$f_2''(\eta) = 6 \epsilon_s - 4 \sqrt{2} \epsilon_s = 0.344 \epsilon_s, \quad f_1''(\xi) = 11.656 \epsilon_s$$

$$f_2''(\eta) = 0.172 \epsilon_s \frac{0.411}{a} \lambda^2 = 0.0708 \epsilon_s \lambda_t \frac{1}{a}, \quad f_1''(\xi) = -13.92 \lambda_t \epsilon_s \frac{1}{a}$$

Подставляя численные значения f_2'' , f_1'' в (4.5), получаем

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{13.92 + 0.0708}{-13.92 + 0.078} = -a \frac{1 + \Delta}{1 - \Delta} = -1.01 a$$

Таким образом, доказано существование в области OA_1C_1 (фиг. 5) линии, на которой $\epsilon = \epsilon_s$.

Если дана конкретная диаграмма растяжения нити, то задача о поперечном ударе по ней круглым цилиндром или другим телом может быть доведена до конца числовыми методами. На фиг. 6, 7 и 8 приведены фотографии поперечного удара по резиновому жгуту диаметром 8 мм, снятые скоростным киноаппаратом. Первая фотография получена при сравнительно малой скорости удара, когда жгут имеет только одну общую точку с клином, ударяющим по нем; при этом картина движения соответствует теоретически установленной в работе [1].

Фотография на фиг. 7 соответствует удару со скоростью 50 м/сек клином, полный угол которого 90° .

Фотография на фиг. 8 соответствует удару цилиндром, диаметр которого 70 мм. Белые пятна на фотографиях являются следами электроламп, освещающих область удара. Приведенные фотографии подтверждают правильность принятых в настоящей работе теоретических схем движения

Поступила 15 X 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Косой удар по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 6.