НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Ю. Н. Работнов (Москва)

1. Рассматриваемые вопросы связаны с оценкой демпфирующих свойств вибрирующих элементов, а также с имеющимися попытками объяснить снижение концентрации напряжений при неоднородном напряженном состоянии перераспределением напряжений из-за гистерезиса. Порядок величины этого снижения усматривается из результатов работы, более точная оценка требует рассмотрения второго приближения. При изложении мы применяем тензорную символику для сокращения [записи, ограничиваясь декартовыми координатами.

Основные предположения сводятся к следующему: 1. Соотношения между напряжениями и деформациями принимаются теми же, что в теории малых упруго-пластических деформаций. 2. Зависимость между напряжениями и деформациями близка к линейной, отношение энергии, рассеянной за цикл, к] максимальной упругой энергии есть малая величина. 3. Площадь петли гистерезиса не зависит от вида напряженного состояния.

Запишем основной закон пластичности следующим образом

$$\sigma^{ij} - \delta^{ij}\sigma = \frac{2\sigma_i}{3e_i}\,(e_{ij} - \delta_{ij}\,e), \qquad \sigma = 3Ke \tag{1.1}$$

Здесь $3\sigma = \sigma^{ij}\,\delta_{ij}$, $3e = e^{ij}\,\delta_{ij}$, причем $\delta^{ij} = \delta_{ij}$ — компоненты единичного тензора. Пусть внешние поверхностные и объемные силы заданы так:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}'\,s, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}'\,s$$

Здесь $s = \sin\varphi$, причем φ монотонно возрастающая функция времени. В динамических задачах мы будем предполагать $\varphi = \omega t$. Положим

$$\sigma^{ij} = s\sigma'^{ij} + \lambda c\sigma''^{ij}, \qquad u_i = su_i' + \lambda c\mathbf{u}_i''$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор смещения, λ — малый параметр, $c = \cos\varphi$. Ограничиваясь первыми степенями λ, найдем

$$\sigma_i = s\sigma_i' + \lambda c\sigma_i'', \qquad e_i = se_i' + \lambda ce_i''$$

Здесь $\sigma_i''\sigma_i'$, $e_i''e_i'$ — билинейные формы относительно σ''^{ij}, σ'^{ij} и e_{ij}'' и e_{ij}' соответственно. При $\lambda = 0$ деформации находятся в фазе с внешней нагрузкой, тело деформируется вполне упруго; следовательно, $\sigma_i' / e_i' = 3G$.

Отнесенная к единице объема работа за цикл

$$a = \int \sigma_i\,de_i = \lambda\pi\,(\sigma_i''\,e_i' - e_i''\,\sigma_i')$$

Будем считать, что a есть функция σ_i'. Тогда

$$\frac{\sigma_i''}{\sigma_i'} - \frac{e_i''}{e_i'} = \psi\,(\sigma_i') \tag{1.2}$$

Из уравнений (1.1), пренебрегая λ^2 и высшими степенями, получим

$$\sigma'^{ij} - \delta^{ij}\,\sigma' = 2G\,(e_{ij}' - \delta_{ij}\,e'), \qquad \sigma' = 3Ke' \tag{1.3}$$

$$\sigma''^{ij} - \delta^{ij}\,\sigma'' = 2G\,[(e_{ij}'' - \delta_{ij}\,e'') + \psi\,(e_{ij}' - \delta_{ij}\,e')], \quad \sigma'' = 3Ke'' \tag{1.4}$$

Первую из формул (1.4) можно переписать так:

$$e_{ij}'' - \delta_{ij}\,e'' = \frac{1}{2G}\,[(\sigma''^{ij} - \delta^{ij}\,\sigma'') - \psi\,(\sigma'^{ij} - \delta^{ij}\,\sigma')] \tag{1.5}$$

Уравнения равновесия и граничные условия приводятся к следующим

$$\sigma_{,i}'^{ij} - \rho\omega^2\,u'^j + Q^j = 0, \qquad \sigma'^{ij}\,\nu_i + P^j = 0 \tag{1.6}$$

$$\sigma_{,i}''^{ij} - \rho\omega^2\,u''^j = 0, \qquad \sigma''^{ij}\,\nu_i = 0 \tag{1.7}$$

2. Таким образом, напряженное состояние тела оказывается состоящим из двух частей, первая находится в одной фазе с внешними силами и определяется из обычных уравнений теории упругости без учета гистерезиса. Вторая часть смещена по фазе на $^1/_2\pi$ и находится в результате решения задачи, близкой по постановке к задаче о температурных напряжениях с той разницей, что заданные функции добавляются не к объемной деформации, как в температурных задачах, а к девиаторной части деформации. Вычислим работу, рассеиваемую за цикл внешними силами

$$A = \oint \left\{ \int_S \mathbf{P}\, d\mathbf{u}\, ds + \int_V \mathbf{Q}\, d\mathbf{u}\, dv \right\}$$

Здесь ds — элемент поверхности, dv — элемент объема, символ интеграла по замкнутому контуру относится к интегрированию за цикл. Имеем

$$\oint \mathbf{P}\, d\mathbf{u} = \int_0^{2\pi} s\mathbf{P}' (c\,\mathbf{u}' - \lambda s\,\mathbf{u}'')\, d\varphi = -\lambda\pi \mathbf{P}'\,\mathbf{u}''$$

Следовательно

$$A = -\lambda\pi \left\{ \int_S P_i'\, u''^i\, ds + \int_V Q_i'\, u''^i\, dv \right\}$$

Преобразовывая поверхностный интеграл в объемный при помощи соотношений (1.6), найдем

$$A = -\pi\lambda \int_V (\rho\omega^2\, u'^i\, u_i'' + \sigma'^{ij} e_{ij}'')\, dv \tag{2.1}$$

Формула (2.1) является основной при определении характеристики демпфирования $\psi(\sigma_i')$ из опыта над циклическим деформированием тела с неоднородным распределением напряжений.

Рассмотрим в качестве примера задачу об изгибе стержня в обычных предположениях технической теории. Если амплитуда пульсирующего момента есть $M(x)$, то напряжение в фазе с моментом определится так

$$\sigma'^{11} = \sigma^\circ \frac{z}{h} \qquad \left(\sigma^\circ = \frac{M}{W}\right)$$

По формуле (1.5) получим

$$e_{11}'' = \frac{1}{E}\sigma''^{11} - \frac{1}{3G}\psi(\sigma^\circ z/h)\,\sigma^\circ \frac{z}{h} = \varkappa'' z$$

А так как момент от напряжений σ''^{11} в сечении равен нулю, то

$$EJ\varkappa'' + \frac{4(1+\nu)}{3}\frac{h^2}{\sigma^{\circ 2}} \int_0^{\sigma^\circ} \psi(\zeta)\,\zeta^2\, b\, d\zeta = 0$$

Здесь принято, что b задано как функция z/h или, что то же, ζ/σ°. Положим

$$\frac{4}{3G}\frac{1}{\sigma^{\circ 2}} \int_0^{\sigma^\circ} \psi(\zeta)\,\zeta^2\, b(\zeta/\sigma^\circ)\, d\zeta = \Psi(\sigma^\circ)$$

Тогда

$$\varkappa'' = -\frac{h^2}{J}\Psi(\sigma^\circ)$$

По формуле (2.1)

$$A = \pi\lambda \int \sigma^\circ\, \Psi(\sigma^\circ)\, dx$$

Решение той же задачи с учетом инерции получается без особого труда методом разложения по фундаментальным функциям.

Поступила 19 XI 1951

Институт механики
Академии Наук СССР