ДВИЖЕНИЕ КАПЕЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ЗАКОНЕ

А. М. Пирвердян (Баку)

Современная теория упругого режима фильтрации использует в своих математических построениях аналогию между течением тепла и фильтрацией жидкости в пористой среде. Однако существует круг вопросов, относящихся к упругому режиму, для которого эта аналогия оказывается неприемлемой. Рассмотрим случай мгновенного изменения давления в скважине. Согласно существующей теории у стенки скважины градиент давления в начальный момент времени равен бесконечности; с удалением от скважины градиент давления падает, стремясь к нулю в бесконечности. С течением времени депрессионная воронка выполаживается, и градиенты давления во всей области падают. При этом для каждого момента времени (до некоторого его значения t_1) можно указать область в районе скважины, в которой grad p больше критического его значения. Критическим градиентом мы называем такой градиент, при котором имеет место заметное отклонение от закона Дарси. То обстоятельство, что уравнение теплопроводности не учитывает этой специфической особенности, характерной для быстро протекающих процессов, и считает свои закономерности справедливыми вплоть до стенки, может привести к ошибкам, роль которых становится особеннно значительной при малых t.

В соответствии с изложенным выше можно предложить следующую схему. Для достаточно малых t вокруг скважины существует область больших значений grad p, внутри которой режим движения турбулентный. Во всей внешней области режим ламинарный; эту внешнюю область можно разбить на две зоны: в первой зоне, непосредственно примыкающей к турбулентной области, — в зоне средних значений grad p — имеет место нелинейный закон фильтрации; во внешней зоне, простирающейся до бесконечности, справедлив закон Дарси. Границе между этими законами, как уже было отмечено выше, отвечает критический градиент давления; с течением времени зоны турбулентного и нелинейного законов стягиваются к скважине.

Однако вряд ли можно получить строгое решение этой задачи в указанной постановке, т. е. с учетом сосуществования нескольких законов фильтрации; в таких случаях придется применить один из приближенных методов.

Для простейших же случаев, в частности для одноразмерного турбулентного движения в полубесконечном пласте при постоянном давлении на выходе, можно получить точное решение. Предположение о существовании турбулентного режима во всем пласте не может отвечать реальной картине; тем не менее точное решение для этого случая может иметь значения при оценке приближенных методов.

Для вывода дифференциального уравнения одномерного движения капельной сжимаемой жидкости в пористой среде при турбулентном движении выражение для закона трения возьмем в виде

$$u = k\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{1/2} \tag{1}$$

где u — скорость, p — давление, k — постоянный коэффициент, причем $\partial p/\partial x < 0$.

Подставляя (1) в уравнение неразрывности, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\gamma\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{1/2}\right] = -\frac{\partial}{\partial t}(m\gamma) \tag{2}$$

Здесь γ — удельный вес жидкости, m — пористость, определяемые по формулам

$$\gamma = \gamma_0\left(1 + \frac{p - p_0}{k_ж}\right), \qquad m = m_0 + \frac{p - p_0}{k_п} \tag{3}$$

причем $k_ж$, $k_п$ — модули упругости жидкости и порового пространства, γ_0 и m_0 — соответственно удельный вес и пористость при давлении p_0.

Подставляя значения γ и m из (3) в уравнение (2), получим с точностью до малых второго порядка

$$\frac{\partial p}{\partial t} = b\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{-1/2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \qquad \left(b = \frac{k}{2}\,\frac{1}{1/k_{\text{п}} + m/k_{\text{ж}}}\right) \tag{4}$$

Пусть давление в пласте было $p_0 = \text{const}$; далее пусть при $t = 0$ давление на выходе из пласта возросло до $p_* = \text{const}$.

Тогда давление в любой точке пласта неограниченных размеров будет

$$p = p\,(p_0,\ p_*,\ b,\ x,\ t) \tag{5}$$

Анализ размерностей позволяет уравнение (6) представить в виде

$$\varphi = \varphi\,(\varphi_*,\ z) \qquad \left(z = \frac{p_0^{1/2}x^{3/2}}{bt},\quad \varphi = \frac{p}{p_0},\quad \varphi_* = \frac{p_*}{p_0}\right) \tag{6}$$

Из (6) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = p_0\frac{\partial\varphi}{dt} = -\frac{p_0^{3/2}x^{3/2}}{bt^2}\varphi', \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = p_0\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{3}{2}\frac{p_0^{3/2}x^{1/2}}{bt}\varphi' \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = p\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{3}{4}\frac{p_0^{3/2}}{btx^{1/2}}\varphi' + \frac{9}{4}\frac{p_0^2 x}{b^2t^2}\varphi''$$

Подставив (7) в дифференциальное уравнение (4), имеем

$$\frac{3}{2}z\varphi'' - \sqrt{\frac{2}{3}}\,(-z\varphi')^{3/2} + \frac{1}{2}\varphi' = 0 \tag{8}$$

Подстановка $\varphi' = v^{-2}z^{-1}$ приводит это уравнение к виду

$$\frac{dv}{dz} + \frac{1}{3}\frac{v}{z} - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = 0 \tag{9}$$

Решение уравнения (9) имеет вид:

$$v = \left(Cz^{-4/3} + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}\right)z$$

Теперь из соотношения $\varphi' = v^{-2}z^{-1}$ имеем

$$\varphi = -\int\frac{dz}{\left(C + \frac{1}{2\sqrt{6}}z^{4/3}\right)^2 z^{1/3}} + C_1$$

Выполняя интегрирование и учтя граничные условия

$$\varphi = p_*/p_0 \quad \text{при } z = 0, \qquad \varphi = 1 \quad \text{при } z = \infty$$

получим следующее выражение для распределения давления:

$$\frac{p_* - p}{p_* - p_0} = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\xi + \frac{1}{\xi + \xi^{-1}}\right] \qquad \left(\xi = \sqrt[3]{\frac{p_* - p_0}{9\pi b^2t^2}}\,x\right)$$

Расход жидкости при этом будет

$$q = k\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{1/2} = 0.646\,k\sqrt[3]{\frac{(p_* - p_0)^2}{bt}}$$

При $\partial p/\partial x > 0$ знак минус в (4) должен быть заменен на плюс.

Поступила 6 XI 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Пирвердян А. М. Приближенное решение задач о фильтрации жидкости при упругом режиме. ДАН Азербайджанской ССР. 1950. Т. VI. № 1.
2. Швец Е. М. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 3.