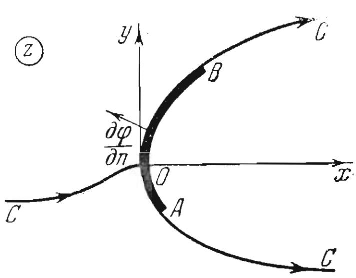
УДАР ПЛАСТИНКИ ПРИ ОБТЕКАНИИ С ОТРЫВОМ СТРУЙ

М. И. Гуревич (Москва)

Первую задачу об ударе плавающего по поверхности жидкости тела решил Н. Е. Жуковский [1]. Методы теории удара о невозмущенную поверхность несжимаемой жидкости были развиты М. А. Лаврентьевым, М. В. Келдышем [2] и Л. И. Седовым [3]. В настоящей работе решается плоская задача об определении присоединенной массы криволинейной пластинки, обтекаемой с отрывом струй. Решение поставленной задачи основано на упомянутых выше методах теории удара о невозмущенную жидкость, однако оно содержит в себе существенную особенность. При решении задачи об ударе о невозмущенную поверхность жидкости течение может быть продолжено в верхнее полупространство и граничные условия могут задаваться на удвоенном теле, получаемом путем зеркального отображения плавающей части тела в верхнее полупространство. В частности, при прямом вертикальном ударе задача сводится к определению потенциала скоростей для установившегося вертикального движения тела. В случае удара тела, обтекаемого с отрывом струй, течение таким простым образом в верхнее полупространство не продолжается. Плоская задача решается после конформного отображения области течения на область изменения параметрического переменного, которую удобно выбирать так, чтобы границы ее состояли из прямых.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим неподвижный контур, обтекаемый с отрывом струй потоком невесомой идеальной несжимаемой жидкости (фиг. 1). Скорость в бесконечности равна v_∞.



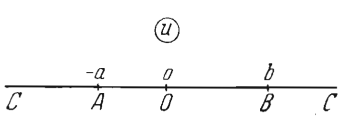
Фиг. 1

Пусть точки пластинки внезапно приобрели нормальную скорость v_n, где v_n — известная функция длины дуги. Найдем подействовавший на пластинку импульс **I**.

Согласно общей теории удара в несжимаемой жидкости [3, 4] дополнительное, вызванное ударом течение будет обладать потенциалом скоростей φ, связанным с импульсивным давлением p и плотностью жидкости ρ соотношением

$$p = -\rho\varphi \tag{1.1}$$

Потенциал скоростей является гармонической функцией неподвижных декартовых координат в плоскости течения $z = x + iy$ и удовлетворяет следующим граничным условиям: на свободной поверхности равно нулю импульсивное давление, откуда согласно (1.1) имеем



Фиг. 2

$$\varphi = 0 \tag{1.2}$$

на контуре задана нормальная скорость v_n, т. е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = v_n \tag{1.3}$$

После нахождения φ импульс **I** находится суммированием подействовавших на пластинку импульсивных давлений.

§ 2. Общее решение задачи. При решении задачи об ударе следует исходить из предположения, что установившееся обтекание контура (фиг. 1) известно. Пусть задача об установившемся обтекании контура AOB решена путем отображения комплексного потенциала w_0 и комплексной скорости dw_0 / dz на верхнюю полуплоскость параметрического переменного u (фиг. 2). Зная w_0 и dw_0 / dz в функции от u, легко найти dz / du и z. Так как перемещением частиц при рассмотрении задач об ударах пренебрегают, то считающаяся известной функция $z(u)$ будет одной и той же и для установившегося течения и для течения непосредственно после удара. Поэтому задача о нахождении комплексного потенциала w возмущенного движения может решаться в плоскости u. На соответствующих поверхностям струй бесконечных частях BC и CA действительной оси u вместо условия $\varphi = 0$ можно, очевидно, взять условие

$$\operatorname{Re}\frac{dw}{du} = 0 \tag{2.1}$$

Преобразуем теперь условие (1.3). При конформном отображении нормальное к границе направление переходит в нормальное. Поэтому, чтобы из нормальной производной $\partial\varphi / \partial n$ в плоскости z получить нормальную производную потенциала скоростей $-\operatorname{Im} dw / du$ в плоскости u, следует только умножить $\partial\varphi / \partial n$ на отношение масштабов $|dz / du|$. Таким образом, условие (1.3) может быть записано в виде

$$\operatorname{Im}\frac{dw}{du} = -v_n\left|\frac{dz}{du}\right| \tag{2.2}$$

Итак, задача определения w или, что равносильно, dw / du сводится к нахождению функции комплексного переменного в верхней полуплоскости u при условиях, что на части действительной оси задана действительная, а на части оси мнимая часть dw / du. Как и в случае удара о невозмущенную поверхность жидкости [3] в бесконечности dw / du должно иметь нуль порядка u^{-2}, а у кромок пластинки dw / du будет обращаться в бесконечность порядка минус половина.

Задача может быть легко решена с помощью методов теории тонкого крыла и удара о несжимаемую жидкость [3]. Введем функцию

$$f(u) = \frac{dw}{du}\sqrt{(u+a)(u-b)}$$

где $-a$ и b — абсциссы отображенных на плоскость u концов пластинки A и B. Согласно (2.1) и (2.2) функция $f(u)$ будет удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\operatorname{Re} f(u) = 0 \qquad \text{на } BC \text{ и } CA$$

$$\operatorname{Re} f(u) = v_n\,|dz / du|\sqrt{(u+a)(b-u)} \qquad \text{на } AOB$$

Определяя $f(u)$ в верхней полуплоскости по ее действительной части, заданной на действительной оси, находим

$$f(u) = \frac{dw}{du}\sqrt{(u+a)(u-b)} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{b} v_n\,(\xi)\left|\frac{dz}{d\xi}\right|\sqrt{(\xi+a)(b-\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi-u} \tag{2.3}$$

Формула (2.3) является общим решением поставленной задачи при условии, что установившееся обтекание контура известно. Очевидно, что, пользуясь граничными условиями вида (2.1) и (2.2), можно решать задачи об ударе и при более сложных схемах течения, например, можно исследовать случай удара нескольких пластинок.

§ 3. Пример прямого удара плоской пластинки. Пусть контур AOB (фиг. 1) представляет собой плоскую пластинку, расположенную вдоль оси y, причем ординаты точек A и B равны $-{}^1/_2\, l$ и ${}^1/_2\, l$ соответственно. Полагая $a = b = 1$, можно из известного решения о струйном, установившемся обтекании плоской пластинки [4] получить

$$z(u) = \frac{il}{\pi+4}\left(u\sqrt{1-u^2} + \arcsin u + 2u\right) \tag{3.1}$$

$$\left|\frac{dz}{d\xi}\right| = \frac{2l}{\pi+4}\left(\sqrt{1-\xi^2}+1\right) \tag{3.2}$$

Вставляя $|dz/d\xi|$ из (3.2) в (2.3), находим, что при $v_n = \text{const}$ (прямой удар в направлении отрицательной оси x)

$$f(u) = \frac{2lv_n}{\pi i(\pi+4)} \int_{-1}^{1} \frac{1-\xi^2+\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - u}\, d\xi$$

Откуда после взятия интеграла получаем

$$\frac{dw}{du} = \frac{2lv_n}{i\pi(\pi+4)} \left(\sqrt{u^2-1}\ln\frac{u+1}{u-1} - \frac{(2+\pi)u}{\sqrt{u^2-1}} + \pi\right) \tag{3.3}$$

Правильность формулы (3.3) легко проверить непосредственно. Вычислим импульс сил I_x, подействовавший на пластинку при ударе. Легко видеть, что так как на краях пластинки φ должно обращаться в нуль, то

$$I_x = \int_{-l/2}^{l/2} p\,dy = -\rho \int_{-1}^{1} \varphi \frac{dy}{du}\,du = \rho \int_{-1}^{1} y \frac{d\varphi}{du}\,du$$

Откуда с помощью (3.1) и (3.3) получается

$$I_x = \frac{\rho v_n}{\pi}\left(\frac{2l}{\pi+4}\right)^2 \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-u^2}\ln\frac{1+u}{1-u} + \frac{(2+\pi)u}{\sqrt{1-u^2}}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{u}{2}\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2}\arcsin u + u\right) du \tag{3.4}$$

и после взятия некоторых интегралов

$$I_x = \frac{2\rho v_n l^2}{\pi(\pi+4)^2}\left(\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\arcsin u \ln\frac{1+u}{1-u}\,du + \frac{18+16\pi+3\pi^3}{3}\right) \tag{3.5}$$

Наконец, после численного вычисления входящего в (3.5) интеграла будем иметь окончательно

$$I_x = \rho l^2 v_n 0.4224 \tag{3.6}$$

Если бы пластинка ударилась о невозмущенную поверхность жидкости, то мы, как известно [3], нашли бы для импульса значение

$$I_x^\circ = \rho l^2 v_n \frac{\pi}{8} = \rho l^2 v_n 0.3927 \tag{3.7}$$

Сравнивая (3.6) и (3.7), находим, что

$$\frac{I_x}{I_x^\circ} = \frac{m}{m_0} = 1.077 \tag{3.8}$$

где m и m_0 — присоединенные массы плоской пластинки, обтекаемой с отрывом струй и касающейся невозмущенной поверхности воды соответственно.

Поступила 6 XI 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Об ударе двух шаров, из которых один плавает в жидкости. Избранные сочинения, т. 1. Гостехиздат. 1948.
2. Лаврентьев М. А. и Келдыш М. В. О решении задач на удар о воду. Труды ЦАГИ. 1935. Вып. 152.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат. 1950.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. Гостехиздат. 1948.