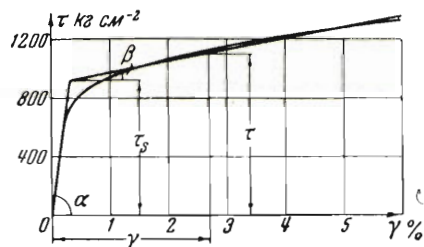


ОБ ИЗГИБЕ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

А. С. Григорьев

(Москва)

В работе приводятся результаты теоретического и экспериментального исследования изгиба за пределом упругости круглой плиты, закрепленной по контуру и нагруженной осесимметричной поперечной нагрузкой. Принимаются обычные допущения теории тонких пластин. Дополнительно предполагается, что материал плиты несжимаем и характеризуется кривой сдвига, которая может быть аппроксимирована диаграммой с линейным упрочнением (фиг. 1). По оси абсцисс здесь отложен угол сдвига γ , по оси ординат — касательное напряжение τ . При $|\tau| > \tau_s$



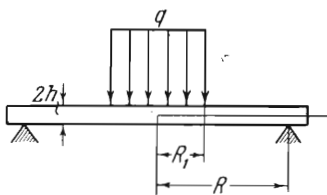
Фиг. 1

$$\tau = \chi \tau_s (1 - K) + KG\gamma \quad (1)$$

$(\chi = \text{sign } \gamma)$

где τ_s — условный предел текучести при сдвиге, $K = \text{tg } \beta / \text{tg } \alpha$ — отношение модуля упрочнения при сдвиге к модулю сдвига G .

Полагая τ равным наибольшему по модулю из главных касательных напряжений, а γ — соответствующему главному углу сдвига, будем рассматривать уравнение (1) как условие пластичности.



Фиг. 2

Введем безразмерные функции

$$\alpha = -\frac{2}{3} \frac{E}{\sigma_s} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \left(2 \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dW}{dx}\right) \quad (2)$$

$$\zeta = -\frac{2}{3} \frac{E}{\sigma_s} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \left(\frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dW}{dx}\right)$$

где E — модуль упругости материала пластины, σ_s — предел текучести, h — половина толщины, а R — радиус пластины (на фиг. 2), W — прогиб пластины, отнесенный к h , и x — радиальная координата, отнесенная к R .

Между α и ζ существует зависимость, выражающая условие совместности деформаций:

$$\frac{d\alpha}{dx} - 2 \frac{d\zeta}{dx} = \frac{3(\zeta - \alpha)}{x} \quad (3)$$

Уравнение равновесия элемента изогнутой пластины можно представить в виде

$$\frac{dM_r}{dx} + \frac{M_r - M_\theta}{x} = -RQ(x) \quad (4)$$

где $Q(x)$ — перерезывающая сила, а M_r и M_θ — погонные изгибающие моменты в круговых и диаметральных сечениях, определяющиеся по формулам

$$M_r = 2h^2 \int_0^1 \sigma_r z dz, \quad M_\theta = 2h^2 \int_0^1 \sigma_\theta z dz \quad (5)$$

где z — координата по толщине пластинки, отнесенная к h , σ_r и σ_θ — радиальное и кольцевое напряжения.

При упругих деформациях

$$\sigma_r = \sigma_s \alpha z, \quad \sigma_\theta = \sigma_s \zeta z \quad (6)$$

При пластических деформациях, как вытекает из уравнений Генки

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_\theta} = \frac{\alpha}{\zeta} \quad (\text{при несжимаемом материале}) \quad (7)$$

Решение задачи было проведено для свободно опертой пластины при нагрузке интенсивности q , равномерно распределенной по площади круга радиуса R_1 , концентричного контуру (фиг. 2). Подобные задачи рассматривались В. В. Соколовским [1] и А. А. Ильюшиным [2].

Введем обозначения

$$\frac{qR^2}{\sigma_s h^2} = p, \quad \frac{R_1}{R} = b$$

Тогда

$$Q(x) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_s h^2}{R} px \quad \text{при } 0 \leq x \leq b \quad (8)$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_s h^2}{R} \frac{pb^2}{x} \quad \text{при } b \leq x \leq 1 \quad (9)$$

Используя (5), (6), (8) и (9), получим на основании (4) два дифференциальных соотношения между α и ζ : одно для $0 \leq x \leq b$, другое для $b \leq x \leq 1$; решая уравнение (3) совместно с каждым из них найдем, что при упругих деформациях:

для $0 \leq x \leq b$

$$\alpha = -\frac{21}{64} px^2 + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_1}{2}, \quad \zeta = -\frac{15}{64} px^2 - \frac{C_2'}{x^2} + \frac{C_1'}{2} \quad (10)$$

для $b \leq x \leq 1$

$$\alpha = -\frac{3}{32} pb^2 (1 + 6 \ln x) + \frac{C_2'}{x^2} + \frac{C_1'}{2}, \quad \zeta = \frac{3}{32} pb^2 (1 - 6 \ln x) - \frac{C_2'}{x^2} + \frac{C_1'}{2} \quad (11)$$

Постоянные определяются из условий непрерывности α и ζ при $x = b$ и граничных условий

$$\frac{dW}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad M_r = 0 \quad \text{при } x = 1 \quad (12)$$

Если вся пластина находится в упругом состоянии, то:

для $0 \leq x \leq b$

$$\alpha = \frac{3}{64} pb^2 \left(8 - 12 \ln b - b^2 - \frac{7}{b^2} x^2 \right), \quad \zeta = \frac{3}{64} pb^2 \left(8 - 12 \ln b - b^2 - \frac{5}{b^2} x^2 \right) \quad (13)$$

$$W = \frac{3}{512} \frac{\sigma_s}{E} p \left(\frac{R}{h} \right)^2 b^2 \left[28 + b^2 (12 \ln b - 17) - 2x^2 (8 - 12 \ln b - b^2) + \frac{3}{b^2} x^4 \right]$$

для $b \leq x \leq 1$

$$\alpha = \frac{3}{64} pb^2 \left[b^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) - 12 \ln x \right], \quad \zeta = \frac{3}{64} pb^2 \left[4(1 - 3 \ln x) - b^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \right] \quad (14)$$

$$W = \frac{3}{256} \frac{\sigma_s}{E} p \left(\frac{R}{h} \right)^2 b^2 [(14 - b^2)(1 - x^2) + 6(2x^2 + b^2) \ln x]$$

Из (6), (13) и (14) видно, что в центрах внешних поверхностей пластины $|\sigma_\theta| = |\sigma_r|$ достигает максимальной величины, а во всех остальных точках пластины $|\sigma_\theta| > |\sigma_r|$, причем знаки σ_r и σ_θ одинаковы. Следовательно, наибольшее из главных касательных напряжений будет равно $1/2 \sigma_\theta$.

При превышении величиной p значения

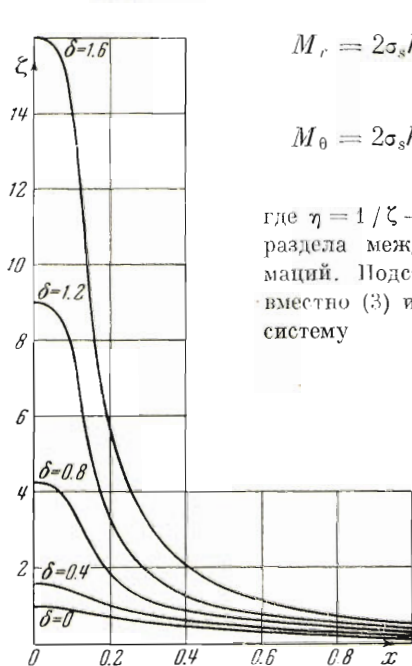
$$P_s = \frac{64}{3b^2(8 - 12 \ln b - b^2)} \quad (15)$$

в окрестностях точек $x = 0, |z| = 1$ появятся области пластических деформаций; напряжения в этих областях на основании (1) и (7) определятся по уравнениям

$$\sigma_r = \sigma_s [x(1 - K) + K\zeta z] \frac{\alpha}{\zeta}, \quad \sigma_\theta = [x(1 - K) + K\zeta z] \quad (x = \text{sign } z) \quad (16)$$

В пределах цилиндра $x = r$ будет упруго-пластическое напряженное состояние, в остальной части пластины — упругое состояние; причем $\zeta = 1$ при $x = r$.

При $x \leq r$



Фиг. 3

$$M_r = 2\sigma_s h^2 \left[\int_0^\eta \alpha z^2 dz + \int_\zeta^1 (1 - K + K\zeta z) \frac{\alpha}{\zeta} z dz \right] \quad (17)$$

$$M_\theta = 2\sigma_s h^2 \left[\int_0^\eta \zeta z^2 dz + \int_\zeta^1 (1 - K + K\zeta z) z dz \right]$$

где $\eta = 1/\zeta$ — абсолютная величина ординаты поверхности раздела между областями упругих и пластических деформаций. Подстановка M_r, M_θ и $Q(x)$ в (4) и решая совместно (3) и (4) относительно $d\alpha/dx$ и $d\zeta/dx$, получим систему

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{2\Phi_3 + 3(\zeta - \alpha)\Phi_2 - 2xQ_*}{(\Phi_2 + 2\Phi_1)x}$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{\Phi_3 - 3(\zeta - \alpha)\Phi_1 - xQ_*}{(\Phi_2 + 2\Phi_1)x} \quad (18)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{2}{3}K + \frac{1-K}{\zeta} \left(1 - \frac{1}{3\zeta^2}\right)$$

$$\Phi_2 = -(1-K) \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) \frac{\alpha}{\zeta^2}$$

$$\Phi_3 = \left(1 - \frac{\alpha}{\zeta}\right) \left[\frac{2K\zeta}{3} + (1-K) \left(1 - \frac{1}{3\zeta^2}\right)\right]$$

$$Q_* = \frac{R}{\sigma_s h^2} Q(x)$$

Определение α и ζ при выбранной величине $p > p_s$ приводится к своеобразной краевой задаче. Надо интегрировать (18) при граничных условиях

$$\alpha = \zeta \quad \text{при } x = 0, \quad \alpha = \alpha_r \quad \text{при } x = r \quad (19)$$

Интегрирование приходится вести численно, задаваясь значением ζ при $x = 0$, определяя r в процессе вычислений и стремясь удовлетворить второму из условий (19). При этом

$$\alpha_r = \frac{3p}{32(1+r^2)} [b^2(8 - 12 \ln b - b^2) - (6 + r^2)r^2] - \frac{1-r^2}{1+r^2} \quad \text{для } r \leq b$$

$$\alpha_r = \frac{3pb^2}{16(1+r^2)} (1 - 6 \ln r - r^2) - \frac{1-r^2}{1+r^2} \quad \text{для } r > b$$

Заметим, что $d\alpha/dx = d\zeta/dx = 0$ при $x = 0$. При $x > r$ α и ζ определяются по формулам (10) и (11), если $r < b$, и только по формулам (11), если $r \geq b$. Постоянные C_1, C_2, C_1' и C_2' определяются по условиям непрерывности α и ζ . Второе из условий (12) используется при выводе формул для α .

Зная α и ζ , можем построить поверхность раздела, определить напряжения по формулам (6) и (16) и прогиб по формуле

$$w = \frac{\sigma_s R^2}{2Eh} \int_x^1 (2\zeta - \alpha) x dx \quad (20)$$

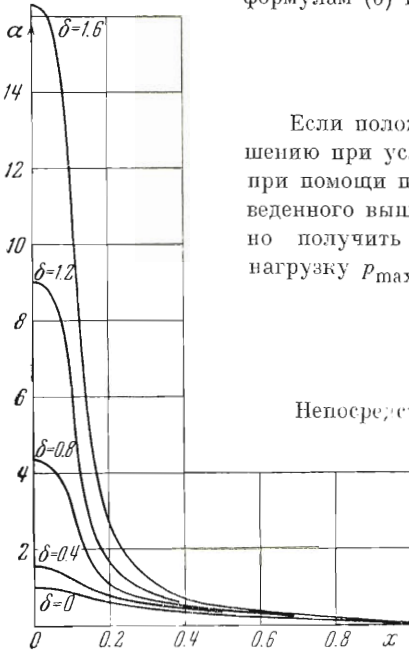
Если положить $K = 0$ в (1) и (16), то приходим к решению при условиях пластичности Сен-Венана. При этом при помощи предельного перехода ($x = 0, \zeta \rightarrow \infty$) из приведенного выше решения упруго-пластической задачи можно получить соотношение, определяющее предельную нагрузку P_{\max} :

$$\int_0^1 x Q_*(x, p_{\max}) dx = 1 \quad (21)$$

Непосредственно из рассмотрения предельного равновесия пластины аналогичная формула была получена А. А. Ильюшиным [2], а для случая равномерно распределенной нагрузки В. В. Соколовским [1] и при $b = 1$ А. А. Гвоздевым [3].

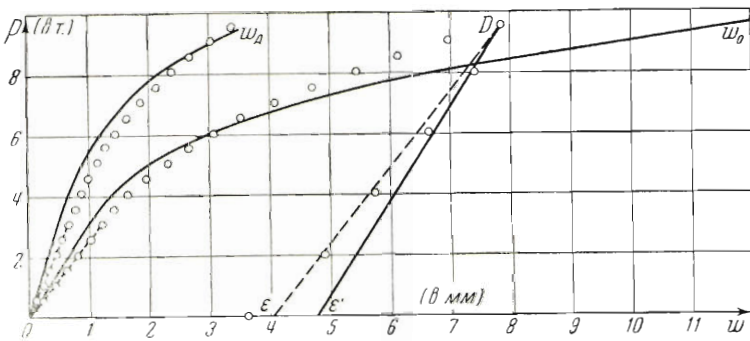
Из (21) найдем, что

$$q_{\max} = \frac{6Rh^2\sigma_s}{R_1^2(3R - 2R_1)} \quad (22)$$



Фиг. 4

С целью проверки результатов, полученных теоретическим путем, и оценки основных допущений был проведен небольшой эксперимент. На фиг. 1 показан начальный участок диаграммы сдвига для дурала, из которого изготовились испытывавшиеся плиты ($R = 20$ см, $2h = 18.5$ см, $R_1 = 2$ см), и показана диаграмма положения в основу расчетов ($\tau_s = 920$ кг см⁻², $G = 3 \times 10^5$ кг см⁻², $K = 0.0235$).



Фиг. 5

На фиг. 3 и 4 даны графики α и ζ , построенные по параметру $\delta = p/p_s - 1$.

На фиг. 5 приведены полученные расчетным путем кривые зависимости между суммарной нагрузкой P и прогибами пластины $w_0 = w_0(P)$ в центре и $w_A = w_A(P)$ при $x = 0.6$. Нанесенные на фиг. 5 точки соответствуют значениям этих прогибов,

найденным из эксперимента. Намеченные этими точками кривые ложатся весьма близко к полученным по расчету. Несовпадение опытных и теоретических кривых при упругих деформациях объясняется принятой нами гипотезой о несжимаемости. Начальные участки теоретических кривых, полученных с учетом сжимаемости (коэффициент Пуассона $\mu = 0.339$), показанные пунктиром, как видно, полностью совпадают с экспериментальными, что указывает, по нашему мнению, на удовлетворительную постановку опыта.

По мере развития пластических деформаций в средней части пластины неучет сжимаемости, особенно при определении прогиба в центре, начинает играть все меньшую роль, и относительное расхождение кривых уменьшается.

Однако с увеличением абсолютной величины прогибов на ходе теоретической кривой начинают все в большей мере сказываться допущения, положенные в основу технической теории изгиба пластин, — прогибы, получаемые по расчету, оказываются все более завышенными. Погрешность, вызванная аппроксимацией, не может быть существенной, как видно из фиг. 1 (при $P = 8000$ кг $\gamma_{\max} = 6.35\%$).

Разрушающая нагрузка оказалась равной 22 000 кг. Предельная нагрузка, найденная из соотношения (22), $P_{\max} = \pi R_1^2 q_{\max} = 15\,600$ кг, если σ_s — предел текучести на идеализированной диаграмме растяжения принять равным пределу прочности — 2700 кг см⁻².

Уменьшение расчетной предельной нагрузки на 30% по сравнению с экспериментальной объясняется на наш взгляд изменением самого характера работы плиты при больших прогибах (порядка двух толщин), наблюдавшихся при опыте к моменту разрушения; пластина фактически становится полой оболочкой, и ее несущая способность, как указывал В. В. Власов^[4], должна резко повыситься.

При эксперименте после нагружения до $P = 9500$ кг, проводилась разгрузка пластины с целью проверки закона разгрузки. На фиг. 4 нанесены точки экспериментальной кривой и прямые DE и DE' — теоретические линии нагрузки, начало которых совмещено с началом экспериментальной кривой.

Как видно, обычное предположение, что материал при разгрузке ведет себя как упругий, в общем хорошо подтверждается, но начальный участок экспериментальной кривой ложится ближе к линии DE' , соответствующей несжимаемому материалу.

Поступила 26 VI 1951

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат. 1950.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат. 1948.
3. Гвоздев А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Стройиздат. 1949.
4. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат. 1949.