Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

В. Я. Булыгин

(Казань)

В заметке рассматривается задача об упруго-пластическом кручении призматических стержней в полуобратной постановке, а именно определяется контур поперечного сечения стержня, соответствующий заданной форме упругого ядра.

В такой постановке задача рассматривалась В. В. Соколовским [1]. Заметим, что Л. А. Галин, которому принадлежит ряд исследований [2—5] этой задачи в прямой постановке, в работе [4] приводит также и решение полуобратной задачи.

1. Будем предполагать, что упругая зона E целиком лежит внутри пластической P, так что с контуром стержня Г граничит пластическая зона.

В пластической области функция напряжений удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial F^p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F^p}{\partial y}\right)^2 = 1 \tag{1.1}$$

и условию на границе Г

$$F^p = C_1 \tag{1.2}$$

постоянную C_1 можно принять равной нулю.

В упругой области функция напряжений F удовлетворяет уравнению

$$\triangle_{xy} F = C \qquad \left(C = \frac{G\theta}{k}\right) \tag{1.3}$$

где G — модуль сдвига, θ — угол закручивания, k — постоянная.

Для непрерывности компонент напряжений на контуре L, разделяющем упругую и пластическую области, имеем условия

$$F_0 = F_0{}^p, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_0 = \left(\frac{\partial F^p}{\partial n}\right)_0 \tag{1.4}$$

Здесь производная берется по нормали к контуру L; индексом 0 обозначаются значения функций на контуре L. Будем предполагать контур упругого ядра $x = u(\psi)$, $y = v(\psi)$ и граничные значения $F_0 = F_{0p} = F_0(\psi)$ заданными.

Решая задачу Коши, построим функцию F^p. Полный интеграл уравнения (1.1)

$$F^p = x\cos\alpha + y\sin\alpha + \beta$$

где α, β — произвольные постоянные. Из условий на границе

$$F_0(\psi) = u(\psi)\cos\alpha + v(\psi)\sin\alpha + \beta, \quad F_0'(\psi) = u'(\psi)\cos\alpha + v'(\psi)\sin\alpha$$

определяем

$$\sin\alpha = \frac{F_0' v' \pm u'\sqrt{u'^2 + v'^2 - F_0'^2}}{u'^2 + v'^2}, \qquad \cos\alpha = \frac{F_0' u' \mp v'\sqrt{u'^2 + v'^2 - F_0'^2}}{u'^2 + v'^2} \tag{1.5}$$

Интегральная поверхность, касающаяся кривой L, F_0, будет

$$F - F_0 = \cos\alpha\,[x - u(\psi)] + \sin\alpha\,[y - v(\psi)]$$

Полагая $F = 0$ и отыскивая огибающую, находим уравнения контура сечения стержня:

$$x = u(\psi) - F_0(\psi)\cos\alpha, \qquad y = v(\psi) - F_0(\psi)\sin\alpha \tag{1.6}$$

Функцию напряжений в упругой области, удовлетворяющую уравнению (1.3), можно представить в виде

$$F = F_1 + F_2$$

где F_1 — гармоническая функция, F_2 — частное решение уравнения (1.3), которое возьмем в виде $F_2 = {}^1/_4 C(x_1 + y_2)$. Преобразуем область упругого ядра во внутренность единичного круга при помощи аналитической функции $z = \omega(\zeta)$ обращения функции $\zeta = f(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$. Пусть

$$x = P(R, \varphi), \qquad y = Q(R, \varphi)$$

Условия Коши-Римана будут

$$\frac{\partial Q}{\partial\varphi} = R\frac{\partial P}{\partial R}, \qquad \frac{\partial P}{\partial\varphi} = -R\frac{\partial Q}{\partial R}$$

Тогда уравнения (1.1) и (1.3) можно представить соответственно в виде

$$\left(\frac{\partial F^p}{\partial R}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial F^p}{\partial\varphi}\right)^2 = |\omega'(\zeta)|^2, \qquad \triangle_{R,\varphi} F = C\,|\omega'(\zeta)|^2$$

где

$$|\omega'(\zeta)|^2 = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\right)^2\right]\frac{1}{R^2}$$

Пользуясь условием (1.4), получим при $R = 1$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)_0^2 = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial\varphi}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\right)_0^2\right], \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)_0 = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial P_0}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_0}{\partial\varphi}\right)^2 - \left(\frac{\partial F_0}{\partial\varphi}\right)^2}$$

Здесь и в дальнейшем индекс 0 означает, что в выражении положено $R = 1$. Так как $F = F_1 + F_2$, где в новых переменных

$$F_2 = \frac{1}{4}C\,[P^2(R, \varphi) + Q^2(R, \varphi)]$$

то

$$\pm\sqrt{\left(\frac{\partial P_0}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_0}{\partial\varphi}\right)^2 - \left(\frac{\partial F_{1,0}}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_{2,0}}{\partial\varphi}\right)^2} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial R}\right)_0 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial R}\right)_0$$

Воспользуемся свойством гармонических функций на границе

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial R}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial\varphi}\right)_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{F_{1,0}(\theta) - F_{1,0}(\varphi)}{\sin^2 {}^1/_2(\varphi - \theta)}\,d\theta \tag{1.7}$$

где $\bar{F}_1$ — сопряженная F_1 гармоническая функция.

Тогда для определения граничных значений получим уравнение (1.8)

$$\pm\sqrt{\left(\frac{\partial P_0}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_0}{\partial\varphi}\right)^2 - \left(\frac{\partial F_{1,0}}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_{2,0}}{\partial\varphi}\right)^2} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial R}\right)_0 - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{F_{1,0}(\theta) - F_{1,0}(\varphi)}{\sin^2 {}^1/_2(\varphi - \theta)}\,d\theta$$

где F_2 — функция известная, если известна отображающаяся функция. Отыскав решение $F_{1,0}$ определяем граничные значения $F_0 = F_{1,0} + F_{2,0}$ и по уравнениям (1.6) находим контур сечения стержня.

2. Получить решение нелинейного интегрального сингулярного уравнения (1.8) в общем виде весьма трудно. Однако в некоторых случаях можно привести к линейному. К такому случаю сводится решение задачи об отыскании границы сечения стержня, если упругое ядро близко к какому-нибудь упругому ядру с известной функцией кручения. Пусть D и d — соответственно область упругого ядра с известной функцией кручения и близкая к ней. При равных углах закручивания постоянная C в уравнении (1.3) для областей D и d совпадает, следовательно, совпадает и частное решение, т. е. функция упругого кручения может различаться только гармоническим членом σ.

Таким образом функция кручения, соответствующая области d, будет

$$f = F_1 + F_2 + \sigma = F + \sigma$$

Преобразуем область d на внутренность единичного круга при помощи аналитической функции. Из уравнений пластичности, как и раньше, получаем

$$\pm\sqrt{\left(\frac{\partial P_0}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_0}{\partial\varphi}\right)^2 - \left[\frac{\partial\,(F_{1,\,0} + F_{2,\,0})}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_0}{\partial\varphi}\right]^2} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial R}\right)_0 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial R}\right)_0 + \left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial R}\right)_0$$

Если контур упругого ядра достаточно гладок, то член $\partial\sigma_0/\partial\varphi$ мал и его квадратом можем пренебречь. Тогда, вводя обозначения

$$\sqrt{\left(\frac{\partial P_0}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_0}{\partial\varphi}\right)^2 - \left(\frac{\partial F_0}{\partial\varphi}\right)^2} = B, \qquad F_{1,\,0} + F_{2,\,0} = F_0$$

получаем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)_0 B - B^2 + \frac{\partial\bar{\sigma}_0}{\partial\varphi} B + \frac{\partial\sigma_0}{\partial\varphi}\frac{\partial F_0}{\partial\varphi} = 0 \tag{2.1}$$

Если отыскивать σ_0 в виде ряда, то его коэффициенты определяются из (2.1) уравнением. Граничные значения f_0 определяются как сумма $f_0 = F_0 + \sigma_0$; здесь F_0 — известная функция, а σ_0 — определена из (2.1).

Рассмотрим кручение цилиндрических стержней, упругое ядро которых близко к круговому. Контур упругого ядра можно задать в виде

$$\rho = 1 + 2\pi\delta(\psi) \qquad (|\delta(\psi)| < \varepsilon,\ |\delta'(\psi)| < \varepsilon,\ |\delta''(\psi)| < \varepsilon)$$

где ε — величина малая.

Функцию, отображающую единичный круг на контур упругого ядра, возьмем в виде [6]

$$z = \zeta\left[1 + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \zeta e^{-i\theta}}{1 - \zeta e^{-i\theta}}\,\delta(\theta)\,d\theta\right]$$

Оценивая члены, входящие в левую часть (1.8), с точностью до величин второго порядка малости, получаем

$$\pm\sqrt{\left(\frac{\partial P_0}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_0}{\partial\varphi}\right)^2 - \left(\frac{\partial F_{1,\,0}}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_{2,\,0}}{\partial\varphi}\right)^2} \approx \pm\left[1 + \Delta(\varphi) + 2\pi\delta(\varphi)\right] \tag{2.2}$$

где

$$\Delta(\varphi) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\delta(\theta) - \delta(\varphi)}{\sin^2 {}^1\!/_2\,(\varphi - \theta)}\,d\theta$$

Вычислим граничные значения производной от функции $F_2 = \frac{1}{4}C(P^2 + Q^2)$ по радиусу. Имеем

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial R}\right) \approx \frac{C}{2}\left[1 + \Delta(\varphi) + 4\pi\delta(\varphi)\right] \tag{2.3}$$

Подставляя (2.2) и (2.3) в (1.8), получим

$$\pm [1 + \Delta(\varphi) + 2\pi\delta(\varphi)] + \tfrac{1}{2} C [1 + \Delta(\varphi) + 4\pi\delta(\varphi)] -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_{10}(\theta) - F_{10}(\varphi)}{\sin^2 {}^1/_2 (\varphi - \theta)} d\theta = 0 \qquad (2.4)$$

Положим

$$2\pi\delta(\varphi) = \varepsilon (a_0 + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \cdots)$$

и отыскиваем $F_{10}(\varphi)$ в виде ряда

$$F_{10}(\varphi) = \varepsilon_1 (C_1 \cos\varphi + D_1 \sin\varphi + C_2 \cos 2\varphi + \cdots) + C_0$$

Подставляя в (2.4) и сравнивая коэффициенты, получаем

$$F_{10} = -\sum_1^\infty \left\{ \left[\left(\frac{C}{2} \pm 1 \right) \varepsilon + \left(\frac{C \pm 1}{n} \right) \right] a_n \cos n\varphi + \left[\left(\frac{C}{2} \pm 1 \right) \varepsilon + \left(\frac{C \pm 1}{n} \right) \right] b_n \sin n\varphi \right\}$$

Из сравнения свободных членов имеем

$$C = \frac{\pm 2(1 + a_0 \varepsilon)}{1 + 2\varepsilon a_0}$$

Так как

$$F_0 = F_{10} + F_{20} \approx \tfrac{1}{4} C [1 + 4\pi\delta(\varphi)] + F_{10}$$

то для граничных значений получаем

$$F_0 = \tfrac{1}{4} C + \left(\tfrac{c}{2} \pm 1 \right) a_0 \varepsilon \mp 2\pi\delta(\varphi) - \sum_1^\infty \left[\frac{(C \pm 1)\varepsilon}{n} a_n \cos n\varphi + \frac{(C \pm 1)\varepsilon}{n} b_n \sin n\varphi \right]$$

Уравнение контура сечения стержня в старых переменных находится из (1.6) в виде

$$r = 1 + 2\pi\delta(\psi) + F_0(\psi) + C_1 \qquad (2.5)$$

Поступила 3 VII 1951

Казанский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Об одной задаче упруго-пластического кручения. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 2—3.
2. Галин Л. А. Упруго-пластическое кручение призматических стержней полигонального сечения. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 4.
3. Галин Л. А. Аналогия для плоской упруго-пластической задачи. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 6.
4. Галин Л. А. Упруго-пластическое кручение призматических стержней. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 3.
5. Галин Л. А. О существовании решения упруго-пластической задачи кручения призматических стержней. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 6.
6. Лаврентьев М. А. Конформные отображения. ОГИЗ. Гостехиздат. 1946.