

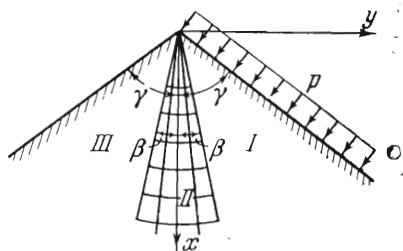
УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ КЛИНА И РАЗРЫВНЫЕ
 РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Г. С. Шапиро

(Москва)

Рассматривается упруго-пластическое равновесие клина в условиях плоской деформации и идеальной пластичности материала в случае, когда постоянная нормальная нагрузка приложена к одной из граней (фиг. 1). При этом необходимо различать два случая: а) тупоугольного и б) остроугольного клина.

В первом случае пластическая область возникает вначале в средней части клина (зона II, $0 \leq |\theta| \leq \beta$ на фиг. 1). Далее по мере увеличения нагрузки зона II расширяется, угол β растет и принимает предельное значение $\beta = \gamma - 1/4\pi$. При этом области I и III, а потому и весь клин в целом переходят в пластическое состояние.



Фиг. 1

В случае остроугольного клина зона II остается вначале упругой, и при предельном значении нагрузки вырождается в линию разрыва $\theta = 0$. Краткий обзор разрывных решений в теории пластичности дан в § 3.

§ 1. Не представляет труда получить решение упруго-пластической задачи для случая тупоугольного клина, распространяя решение для полуплоскости, данное В. В. Соколовским [1].

Решение упругой задачи, справедливое при $0 < \gamma \leq 1/2\pi$, дается формулами [2]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = \frac{p}{k_1} \left[-k_1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\gamma + \theta - \gamma \pm \frac{1}{2} (\sin 2(\theta - \gamma) - \operatorname{tg} 2\gamma \cos 2(\theta - \gamma)) \right] \\ \tau_{r\theta} = \frac{p}{2k_1} [1 + \operatorname{tg} 2\gamma \sin 2(\theta - \gamma) - \cos 2(\theta - \gamma)] \quad (1.1)$$

Здесь $k_1 = \operatorname{tg} 2\gamma - 2\gamma$. Так как интенсивность касательных напряжений

$$S = \frac{p}{k_1} \sqrt{\sin^2(\theta - \gamma) + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 2\gamma + \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\gamma \sin 2(\theta - \gamma)}$$

имеет максимум при $\theta = 0$, то пластическое состояние начнется вдоль биссектрисы угла раствора клина. Как будет видно из дальнейшего решения, пластическая зона образуется в случае тупоугольного клина при значении

$$p \geq 2k \frac{\sin 2\gamma - 2\gamma \cos 2\gamma}{1 - \cos 2\gamma}$$

В упругой зоне I будем искать напряжения в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = A - 2D\theta \pm (B \sin 2\theta + C \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = D + B \cos 2\theta - C \sin 2\theta$$

В пластической зоне $0 \leq |\theta| \leq |\beta|$ напряжения должны быть взяты в виде

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -k(2\theta + H), \quad \tau_{r\theta} = k$$

Произвольные постоянные A, B, C, D, H и угол β определяются из двух заданных условий для напряжений на границе $\theta = \gamma$, условия $\sigma_r = \tau_{r\theta} = -\frac{1}{2}p$ при $\theta = 0$ и трех условий непрерывности компонент напряжений на границе между упругой и пластической зонами.

При этом приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} D + B \cos 2\gamma - C \sin 2\gamma &= 0, & A - 2\gamma D - B \sin 2\gamma - C \cos 2\gamma &= -p \\ A - 2\beta D + B \sin 2\beta + C \cos 2\beta &= -2k\beta - \frac{1}{2}p \\ A - 2\beta D - B \sin 2\beta - C \cos 2\beta &= -2k\beta - \frac{1}{2}p \\ D + B \cos 2\beta - C \sin 2\beta &= k, & kH &= \frac{1}{2}p \end{aligned}$$

Решая ее, находим

$$\begin{aligned} A &= -p + \frac{k}{\Delta} [-2\gamma \cos 2(\gamma - \beta) + \sin 2(\gamma - \beta)] \\ B &= k \frac{\cos 2\beta}{\Delta}, & C &= -\frac{k \sin 2\beta}{\Delta} \\ D &= -k \frac{\cos 2(\gamma - \beta)}{\Delta}, & H &= \frac{p}{2k}, & \Delta &= 1 - \cos 2(\gamma - \beta) \end{aligned}$$

В результате имеем следующие выражения для напряжений:
в упругой зоне I при $\gamma \geq \theta \geq \beta$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} &= -p + \frac{k}{\Delta} \{2(\theta - \gamma) \cos 2(\gamma - \beta) + \sin 2(\gamma - \beta) \pm \sin 2(\theta - \beta)\} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{k}{\Delta} [\cos 2(\beta - \theta) - \cos 2(\gamma - \beta)] \end{aligned} \quad (1.2)$$

в упругой зоне II при $-\beta \geq \theta \geq -\gamma$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} &= -\frac{k}{\Delta} [-2(\theta + \gamma) \cos 2(\gamma - \beta) + \sin 2(\gamma - \beta) \mp \sin 2(\theta + \beta)] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{k}{\Delta} [\cos 2(\beta + \theta) - \cos 2(\gamma - \beta)] \end{aligned} \quad (1.3)$$

в пластической зоне III при $|\theta| \leq \beta$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\left(2k\theta + \frac{1}{2}p\right), \quad \tau_{r\theta} = k \quad (1.4)$$

Нагрузка p и угол β , определяющий пластическую зону, связаны уравнением

$$p = 2k \left[2\gamma + \frac{2(\beta - \gamma) + \sin 2(\gamma - \beta)}{1 - \cos 2(\gamma - \beta)} \right] \quad (1.5)$$

На фиг. 2 представлены кривые $p = p(\beta)$ при различных значениях угла раствора клина 2γ , полученные на основании (1.5). Верхняя кривая для $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, отвечающая полуплоскости, построена В. В. Соколовским. При увеличении давления пластический сектор $|\theta| < \beta$ расширяется и максимальное значение β будет

$$\beta_m = \gamma - \frac{1}{4}\pi \quad (1.6)$$

При $\beta = \beta_m$ весь клин целиком переходит в пластическое состояние, причем согласно (1.5) значение предельной нагрузки

$$p_m = k(2 + 4\gamma - \pi) \quad (1.7)$$

Формула (1.7) была найдена Прандтлем.

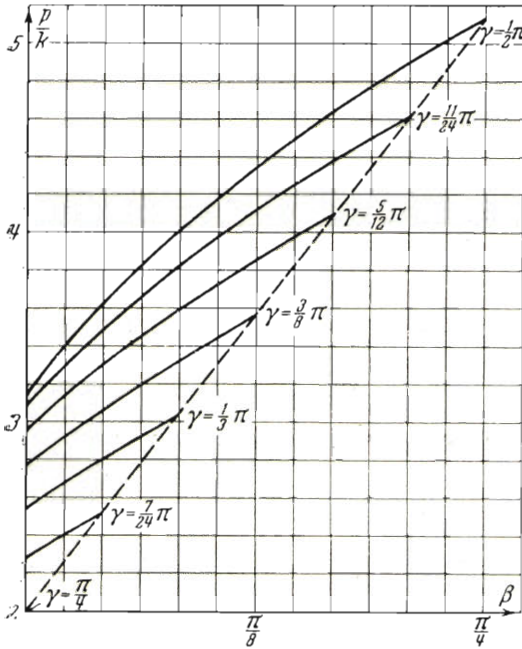
На фиг. 3 представлена сетка линий скольжения, отвечающая предельному значению нагрузки p_m . В областях I и III, где линии скольжения прямолинейны и наклонены под углом 45° к соответствующим граням клина, имеем однородное напряженное состояние. В области I главные напряжения будут

$$\sigma_1 = (2 - p)k, \quad \sigma_2 = -pk,$$

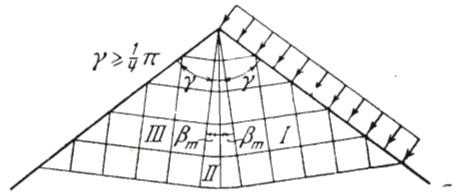
а в области III соответственно

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -2k.$$

Максимальная величина пластического сектора получается в случае полуплоскости $\gamma = 1/2\pi$, тогда $\beta = 1/4\pi$.



Фиг. 2



Фиг. 3

По мере уменьшения угла раствора клина уменьшается и пластический сектор. В случае прямоугольного клина пластический сектор пропадает. При этом, если нагрузка $p < 2k$, то клин находится в упругом состоянии, а если $p > 2k$, то клин сразу целиком перейдет в пластическое состояние.

§ 2. В случае остроугольного клина интенсивность касательных напряжений S имеет минимум при $\theta = 0$ и пластическое состояние начнется вдоль границ клина $\theta = \pm \gamma$. В областях I и III, отвечающих фиг. 1, будем иметь зоны пластических деформаций при однородном напряженном состоянии, а в средней части II — зону упругих деформаций.

Как будет видно из дальнейшего, пластическая зона образуется в случае остроугольного клина при значении

$$p \geq 2k(1 - 2\gamma \operatorname{ctg} 2\gamma)$$

В пластической зоне I напряжения будут

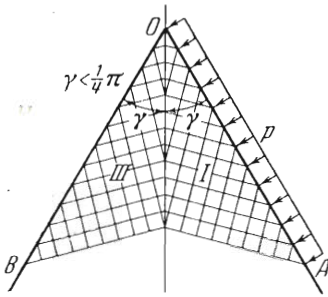
$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = -p + k \pm k \cos 2(\gamma - \theta), \quad \tau_{r\theta} = k \sin 2(\gamma - \theta)$$

В пластической зоне III главные напряжения будут $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = -2k$. В упругой зоне II будем искать напряжения поперечно в виде

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = A - 2D\theta \pm (B \sin 2\theta + C \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = D + B \cos 2\theta - C \sin 2\theta$$

Определяя произвольные постоянные из условий, аналогичных § 1, находим

$$\begin{aligned} A &= -\frac{p}{2}, & B &= k \sin 2\gamma (1 + \operatorname{ctg} 2\beta \operatorname{ctg} 2\gamma) \\ C &= 0, & D &= \frac{p}{4\beta} - \frac{k}{2\beta} \end{aligned}$$



Фиг. 4

Нагрузка p и угол β , определяющий границу пластической зоны, связаны уравнением

$$p = 2k \left[1 - \frac{2\beta}{\sin 2\beta} \cos 2\gamma \right]$$

Значению $\beta = 0$ отвечает предельная величина нагрузки

$$p_{\max} = 2k (1 - 2 \cos 2\gamma) \quad (2.1)$$

При этом прямая $\theta = 0$ будет линией разрыва (фиг. 4). Формулу (2.1) иным путем (см. § 3) нашел В. Прагер^[3].

В случае прямоугольного клина $\gamma = 1/4\pi$, решения (2.1) и (1.7) совпадают.

Решение (2.1) удовлетворяет крайним условиям в напряжениях и при $\gamma > 1/4\pi$, однако можно показать^[4], что такое решение приводит к противоречащему смыслу задачи условию, что скорости вдоль нагруженной грани клина равны нулю.¹

Таким образом, на данном примере видно, что, вводя линии разрыва в напряжениях, можно построить неоднозначные решения «статически определенной» системы уравнений плоской задачи теории пластичности в напряжениях

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 4k^2 \quad (2.2)$$

Из этих решений следует выбрать то, которое совместно с системой уравнений

$$\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y = 0, \quad \frac{\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\dot{\varepsilon}_{xy}}{\tau} \quad (2.3)$$

и удовлетворяет заданным условиям для скоростей и напряжений на контуре.

Важность совместного рассмотрения уравнений теории пластичности в напряжениях (2.2) и в скоростях деформации (2.3) особенно очевидна в тех случаях, когда на части поверхности тела заданы условия в напряжениях, а на другой части — в скоростях деформации. Сюда относятся задачи о вдавливании штампов, прокатке, волочении и т. п. В настоящее время имеются лишь попытки решения этих задач в такой постановке методом последовательных приближений^[5], повидимому, мало эффективных.

Заметим, что если на одной грани остроугольного клина приложено давление p , а на другой — давление q , то [на основании (2.1)] предельные значения p и q связаны зависимостью

$$q = p - 2k (1 - \cos 2\gamma) \quad (2.4)$$

Результат (2.4) может быть использован, при определении давления сыпучей среды на «пологую»^[6] подпорную стенку в тех случаях, когда можно пренебречь собственным весом грунта и считать углы трения грунта и стенки равными нулю.

Разрывные решения можно ввести при рассмотрении задач статики сыпучей среды и в том случае, когда угол трения грунта ρ не равен нулю. Если S есть поверхность разрыва, то условия равновесия требуют непрерывности только нормального

¹ Вопрос о распределении скоростей деформаций в клине требует дальнейших исследований. В работе^[4] предположено, что заданное распределение скоростей деформаций на грани клина $\theta = \gamma$ зависит от координаты r и при некотором $r = r_0$ скорости деформации равны нулю. Правильнее считать заданные скорости деформации не зависящими от координаты r .

напряжения σ_s и касательного напряжения τ_s ; нормальные напряжения σ_t , действующие на элемент, перпендикулярный к S , могут претерпевать разрыв.

Условие предельного состояния для сыпучей среды имеет вид [6]:

$$(\sigma_s - \sigma_t)^2 + 4\tau_s^2 = \sin^2 \rho (\sigma_s + \sigma_t + 2k \operatorname{ctg} \rho)^2$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sigma_{t1,2} = & \frac{1}{1 - \sin^2 \rho} [\sigma_s (1 + \sin^2 \rho) + 2k \operatorname{ctg} \rho \sin^2 \rho] \pm \\ & \pm \frac{1}{1 - \sin^2 \rho} \{[\sigma_s (1 + \sin^2 \rho) + 2k \operatorname{ctg} \rho \sin^2 \rho]^2 - \\ & - (1 - \sin^2 \rho) [\sigma_s (1 - \sin^2 \rho) + 4\tau_s^2 - \sin^2 \rho (4k^2 \operatorname{ctg}^2 \rho + 4k\tau_s \operatorname{ctg} \rho)]\}^{1/2} \end{aligned}$$

Скачок в значениях σ_{t1} , и σ_{t2} будет

$$\begin{aligned} \sigma_{t2} - \sigma_{t1} = & \pm \frac{2}{1 - \sin^2 \rho} \{[\sigma_s (1 + \sin^2 \rho) + 2k \operatorname{ctg} \rho \sin^2 \rho]^2 - \\ & - (1 - \sin^2 \rho) [\sigma_s (1 - \sin^2 \rho) + 4\tau_s^2 - \sin^2 \rho (4k^2 \operatorname{ctg}^2 \rho + 4k\tau_s \operatorname{ctg} \rho)]\}^{1/2} \end{aligned}$$

Случай пластической среды получается отсюда при условии $\rho = 0$, тогда [3]

$$\sigma_{t2} - \sigma_{t1} = \pm 4 \sqrt{k^2 - \tau_s^2} \quad (2.5)$$

§ 3. В заключение остановимся кратко на некоторых известных результатах, относящихся к разрывным решениям в теории пластичности. Заметим, что с разрывными решениями в теории пластичности встречаются при решении многих задач. Примером может служить образование «пластического шарнира» при изгибе балок, когда нормальные напряжения в соседних волокнах при переходе через нейтральную ось меняют знак скачком. В случае кручения стержней полигонального сечения, рассмотренном Надаи [7] и Л. А. Галиным [8], имеют место разрывы в напряжениях постоянной интенсивности, а при кручении стержней овального сечения, изученном В. В. Соколовским [4], получаются разрывы переменной интенсивности (характер этих разрывных решений исследован в работе [9]).

В плоской задаче теории пластичности мы имеем дело с дифференциальными уравнениями гиперболического типа. Наряду с решениями, допускающими вдоль характеристик разрыв в первых производных от напряжений, естественно рассматривать сильные разрывы подобно тому, как в газовой динамике вводятся в рассмотрение ударные волны. Ряд важных теорем о разрывных решениях теории пластичности дан С. А. Христиановичем [10]. В частности, им показано, что если область, занятая пластической средой, односвязна и контур этой области — замкнутая кривая с непрерывно изменяющейся касательной, то внутри контура необходимо существует линия разрыва.

Основные зависимости для разрывных решений в плоской задаче теории пластичности даны Прагером [3]. Приведем некоторые из полученных им результатов. Пользуясь известными формулами М. Леви [11], можно выразить компоненты напряжений на поверхности разрыва через функции ω и θ в виде

$$\sigma_s = k [2\omega + \sin 2(\theta - \alpha)], \quad \sigma_t = k [2\omega - \sin 2(\theta - \alpha)], \quad \tau = -k \cos 2(\theta - \alpha) \quad (3.1)$$

Так как σ_r и τ непрерывны, то скачок в значениях ω и θ должен удовлетворять условиям

$$2(\omega_2 - \omega_1) + \sin 2(\theta_2 - \alpha) - \sin 2(\theta_1 - \alpha) = 0 \quad (3.2)$$

$$\cos 2(\theta_2 - \alpha) - \cos 2(\theta_1 - \alpha) = 0 \quad (3.3)$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум сторонам поверхности разрыва. Из (3.3) имеем

$$\theta_2 = 2\alpha_1 - \theta_1 \quad (3.4)$$

Так как θ_1 , θ_2 и α — углы, образованные соответственно касательными линиями скольжения по обе стороны поверхности разрыва и, наконец, касательной к самой поверхности разрыва [11] с осью x , то на основании (3.4) заключаем, что касательная к поверхности разрыва является биссектрисой угла, образованного двумя касательными к соответствующим линиям скольжения на каждой стороне S . Пользуясь (3.4) и (3.2), находим

$$\omega_2 = \omega_1 + \sin 2(\theta_1 - \alpha), \quad \text{или} \quad \omega_2 - \omega_1 = -\sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.5)$$

В случае клина, представленного на фиг. 4, имеем

$$\theta_1 = -\gamma - \frac{1}{4}\pi, \quad \omega_1 = \frac{1}{2}(1 - p); \quad \theta_2 = \gamma + \frac{1}{4}\pi, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2}$$

Условие (3.4) показывает, что поверхность разрыва будет биссектрисой угла раствора клина. Уравнение (3.5) дает

$$p = 2(1 - \cos 2\gamma)$$

Поступила 23 X 1951

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. ГТТИ. 1950.
2. Тимошенко С. П. Теория упругости. ГТТИ. 1934.
3. Prager W. Discontinuous solutions in the theory of plasticity. Courant Anniversary Volume. 1948.
4. Lee E. On stress discontinuities in plane plastic flow. Proceed. of the Third Sympos. in Appl. Mathem. 1950. Vol. III.
5. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. 1950.
6. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. АН СССР. 1942.
7. Надаи А. Пластичность. ОНТИ. 1936.
8. Галин Л. А. Упруго-пластическое кручение призматических стержней polygonального сечения. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 4.
9. Winzer A. and Carrier G. Discontinuities of stress in plane plastic flow. Journ. of Appl. Mech. 1949. Vol. XVI. No 4.
10. Христианович С. А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре. Математический сборник. 1936. Т. I.
11. Христианович С. А., Михлин С. Г. и Девисон Б. В. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд. АН СССР. 1938.