Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О ПРИБЛИЖЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Л. Э. Эльсгольц (Москва)

Рассмотрим простейшее уравнение с запаздывающим аргументом

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad x(t) = \varphi(t) \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$$

Будем пока предполагать τ постоянным, а функции f и φ непрерывно дифференцируемыми s раз. Как известно, при этих условиях существует единственное решение рассматриваемого уравнения, непрерывно дифференцируемое $s+1$ раз во всех точках $t \geqslant t_0 + \tau$, за исключением точек $t_0 + k\tau$, где k целое число, не превышающее $s+1$. В этих точках $t_0 + k\tau$ решение, вообще говоря, имеет разрыв первого рода производной порядка k, но производная порядка $k-1$ всегда непрерывна.

Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений, основанные на аппроксимации искомого решения параболами некоторого порядка, не могут быть непосредственно применены к уравнениям с отстающим аргументом ввиду наличия точек $t_0 + k\tau$ разрыва производных у решений этих уравнений. Однако все эти методы с успехом могут быть применены, начиная с тех значений t, с которых решение $x(t)$ становится дифференцируемым достаточное число раз. Следовательно, для численного интегрирования дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом можно рекомендовать комбинированный метод, заключающийся в нахождении искомого решения на отрезках $(t_0+\tau,\ t_0+2\tau)$, $(t_0+2\tau,\ t_0+3\tau), \cdots, [t_0+(p-1)\tau,\ t_0+p\tau]$ методом последовательного интегрирования, которое, конечно, тоже может быть выполнено приближенно, после чего применяется один из численных методов, основанных на аппроксимации решения параболами степени не выше p, например, метод Адамса-Штермера.

Все сказанное выше с очевидными незначительными изменениями применимо и к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом более высокого порядка, а также к системам таких уравнений. Если τ переменно и является непрерывной s раз непрерывно дифференцируемой функцией t, нигде не обращающейся в нуль, то изложенные выше соображения остаются справедливыми, но только разности Δt удобнее брать переменными.

При малых τ часто применяется метод разложения $x(t-\tau)$ по степеням τ который заключается в том, что уравнение с запаздывающим аргументом

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t),\ x(t-\tau)), \quad x(t) = \varphi(t) \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\tau; \quad \frac{\partial f}{\partial x(t-\tau)} \neq 0 \tag{1}$$

заменяется дифференциальным уравнением порядка m без запаздывания

$$\begin{gathered}\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t),\ x(t) - \tau\dot{x}(t) + \cdots + \frac{(-1)^m\tau^m}{m!}x^m(t)\right) \\ x^{(k)}(t_0+\tau) = \varphi^{(k)}(t_0+\tau) \qquad (k = 0, 1, \ldots, (m-1))\end{gathered} \tag{2}$$

Однако очевидно, что ввиду наличия разрыва производной $\dot{x}(t)$ в точке $t_0+\tau$ начальные значения $x^{(k)}(t_0+\tau) = \varphi^{(k)}(t_0+\tau)$ при $m > 1$ оказываются выбранными совершенно необоснованно. Но если даже заменить уравнение (1) уравнением (2), лишь начиная с тех значений t, с которых $x(t)$ уже дифференцируемо достаточное число раз, то и в этом случае лишь при $m = 1$ рассматриваемый метод дает хорошие результаты. Действительно, уравнение (1) эквивалентно в случае достаточной гладкости решения $x(t)$ уравнению

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), z_1(t)) \qquad (0 < \theta(t) < 1)$$

$$z_1(t) = x(t) - \tau\dot{x}(t) + \cdots + \frac{(-1)^m \tau^m}{m!} x^{(m)}(t) + \frac{(-1)^{m+1} \tau^{m+1}}{(m+1)!} x^{(m+1)}(t - \theta\tau) \tag{3}$$

(уравнение (1) эквивалентно уравнению (3) лишь в том смысле, что решение уравнения (1) является решением уравнения (3)).

При $m > 2$ в выражении $z_1(t)$ нельзя пренебречь последним членом, так как уравнение (3) содержит малый коэффициент при старшей производной и всегда имеет неустойчивый тип. В самом деле, при применении к уравнению (3) метода последовательного интегрирования будем на некотором интервале иметь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), z_2(t)) \tag{4}$$

$$z_2(t) = x(t) - \tau\dot{x}(t) + \cdots + \frac{(-1)^m \tau^m}{m!} x^{(m)}(t) + \frac{(-1)^{m+1} \tau^{m+1}}{(m+1)!} \varphi_q{}^{m+1}(t - \theta\tau) \tag{5}$$

Или, разрешая (4) и (5) относительно $x^{(m)}(t)$, получим

$$x^{(m)}(t) = \frac{m}{\tau} x^{(m-1)}(t) + \cdots + \frac{\tau}{m+1} \varphi_q{}^{(m+1)}(t - \theta\tau) + \psi(t, x(t), \dot{x}(t)) \tag{6}$$

где $\varphi_q(t)$ — решение уравнения (3) на предыдущем интервале. Это уравнение при $m > 2$ имеет неустойчивый тип, так как $m/\tau > 0$, а при $m = 2$ может иметь как устойчивый, так и неустойчивый тип, причем при достаточно малом τ тип всегда неустойчивый. Так как для решений уравнения вида

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} = \frac{1}{\mu} \Phi(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(m-1)}(t), \mu) \tag{7}$$

имеем

$$\frac{d^{m+1} x(t)}{dt^{m+1}} = \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{(m-1)}} \Phi + \cdots \tag{8}$$

то отбрасываемый в выражении (5) последний член имеет, вообще говоря, порядок τ^{-1} и, следовательно, отнюдь не является малым. Лишь при $m = 1$ уравнение (6) не является уравнением с малым коэффициентом при старшей производной $x^{(m)}(t)$ и поэтому можно воспользоваться теоремой о непрерывной зависимости решения от параметра τ. При $m = 2$ в устойчивом случае можно перейти к уравнению (2), однако в силу устойчивости решение будет мало отличаться от решения при $m = 1$. Все изложенное выше распространяется на случай переменного τ, если $\tau > 0$, а также на системы уравнений

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, x_j(t), x_j(t - \tau_j)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, \ j = 1, 2, \ldots, m) \tag{9}$$

В уравнениях порядка n

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n-1)}(t), x(t - \tau)) \tag{10}$$

исходя из тех же соображений $x(t - \tau)$ может быть заменено суммой

$$x(t) - \tau\dot{x}(t) + \cdots + \frac{(-1)^m \tau^m}{m!} x^{(m)}(t) \tag{11}$$

лишь при $m \leqslant n$, а в уравнениях

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{n-1}(t), x(t - \tau), \dot{x}(t - \tau), \ldots, x^{(s)}(t - \tau))$$

лишь при $m \leqslant n - s$.

Поступила 15 VI 1951