Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

И. А. Биргер
(Москва)

В рассматриваемых ниже методах решение задач теории пластичности сводится к решению последовательности задач теории упругости (последовательности линейных задач) с некоторыми дополнительными условиями. Эта идея была впервые применена А. А. Ильюшиным [1] в его методе упругих решений.

§ 1. Основные зависимости. Если $\sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{zx}$ — компоненты напряженного состояния, а $e_x, e_y, \ldots, \gamma_{zx}$ — компоненты деформации, то, как известно, при упруго-пластических деформациях

$$e_x - e = \frac{\psi}{2G}(\sigma_x - \sigma), \qquad \gamma_{xy} = \frac{\psi}{G}\tau_{xy} \qquad (xyz) \tag{1.1}$$

Здесь символ (xyz) указывает, что остальные соотношения получаются круговой перестановкой этих букв. Величины σ и e равны

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \qquad e = e_x + e_y + e_z \tag{1.2}$$

Между σ и e существует зависимость

$$e = \frac{1-2\mu}{E}\sigma + \alpha t \tag{1.3}$$

где αt — температурная деформация. Величина

$$\psi = G\frac{\gamma_i}{\tau_i} \tag{1.4}$$

где

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \tag{1.5}$$

интенсивность напряжений, а

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{(e_x - e_y)^2 + (e_y - e_z)^2 + (e_z - e_x)^2 + \frac{1}{3}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^3 + \gamma_{zx}^2)} \tag{1.6}$$

интенсивность деформаций.

При $\psi \equiv 1$ уравнения (1.1) и (1.3) выражают обычный закон Гука.

§ 2. Линейные задачи с дополнительными нагрузками. Этот метод в иной постановке принадлежит А. А. Ильюшину [1]. Из уравнений (1.1) и (1.3)

$$\sigma_x = \left(\frac{E}{1-2\mu} - \frac{2G}{\psi}\right)e + \frac{2G}{\psi}e_x - \frac{E\alpha t}{1-2\mu}, \qquad \tau_{xy} = \frac{G}{\psi}\gamma_{xy} \qquad (xyz) \tag{2.1}$$

Предположим, что среда является упругой и в ней имеют место те же самые деформации $e_x, \ldots, \gamma_{xy}, \ldots$, что и в упруго-пластической среде. Напряжения $\sigma_x^*, \ldots, \tau_{xy}^*, \ldots$ в упругой среде, соответствующие деформациям $e_x, \ldots,$

$\gamma_{xy}, \ldots$, определяются из равенств (2.1), если положить в них $\psi \equiv 1$.

$$\sigma_x^* = \left(\frac{E}{1-2\mu} - 2G\right)e + 2Ge_x - \frac{E\alpha t}{1-2\mu}, \qquad \tau_{xy}^* = G\gamma_{xy} \qquad (xyz) \qquad (2.2)$$

Вычитая из равенств (2.1) соотношения (2.2), получим

$$\sigma_x = \sigma_x^* - \sigma_x^\circ, \qquad \tau_{xy} = \tau_{xy}^* - \tau_{xy}^\circ \qquad (xyz) \qquad (2.3)$$

где $\sigma_x^*, \ldots, \tau_{xy}^*, \ldots$ — напряжения в упругом теле, в котором имеются те же деформации, что и в упруго-пластическом теле; $\sigma_x^\circ, \ldots, \tau_{xy}^\circ, \ldots$ — дополнительные напряжения, определяемые формулами:

$$\sigma_x^\circ = 2G\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)(e_x - e), \qquad \tau_{xy}^\circ = G\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\gamma_{xy} \qquad (xyz) \qquad (2.4)$$

или, учитывая равенства (1.1) при $\psi \equiv 1$,

$$\sigma_x^\circ = \left(1 - \frac{1}{\psi}\right)(\sigma_x^* - \sigma^*), \qquad \tau_{xy}^\circ = \left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\tau_{xy}^* \qquad (2.5)$$

где

$$\sigma^* = \frac{1}{3}(\sigma_x^* + \sigma_y^* + \sigma_z^*)$$

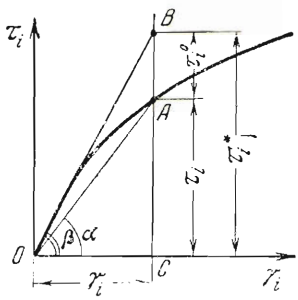
— среднее (гидростатическое) напряжение в упругой (линейной) задаче.

Равенства (2.3) могут быть теперь записаны в форме

$$\sigma_x = \frac{1}{\psi}\sigma_x^* + \left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\sigma^*, \qquad \tau_{xy} = \frac{1}{\psi}\tau_{xy}^* \qquad (xyz) \qquad (2.6)$$

Используя соотношение (1.4) и равенства (2.4), (1.5) и (1.6), можно обнаружить, что между интенсивностями напряжений существует зависимость

$$\tau_i = \tau_i^* - \tau_i^\circ \qquad \left(\tau_i^\circ = G\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\gamma_i\right) \qquad (2.7)$$



Фиг. 1

Физический смысл равенства (2.7) устанавливается из рассмотрения обобщенной кривой деформирования (фиг. 1). Учитывая равенство (1.4), имеем

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{G}{\operatorname{tg}\alpha} = \psi \qquad (2.8)$$

$$\gamma_i(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) = \gamma_i G\left(1 - \frac{1}{\psi}\right) = \tau_i^\circ \qquad (2.9)$$

Таким образом, исходя из имеющейся деформации γ_i и предполагая материал упругим, мы получаем точку B. Поправка τ_i° «возвращает» расчетную точку на кривую деформирования. Соотношение (2.7) по существу является следствием коллинеарности девиаторов напряжений в рассматриваемых упругом и упруго-пластическом телах, что вытекает из равенства тензоров деформаций.

Отметим простое соотношение между величинами τ_i и τ_i^*

$$\tau_i = \frac{1}{\psi}\tau_i^* \qquad (2.10)$$

Напряжения $\sigma_x, \ldots, \tau_{xy}, \ldots$ должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \qquad (x\ y\ z) \qquad (2.11)$$

где $X, \ldots$ — компоненты объемной силы.

Учитывая равенства (2.3), получим

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial z} + X + X^\circ = 0 \qquad (xyz) \qquad (2.12)$$

где X° — дополнительные объемные силы

$$X^\circ = -\left(\frac{\partial \sigma^\circ}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}^\circ}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^\circ}{\partial z}\right) = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[2G\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)(e_x - e_y)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left[G\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\gamma_{yx}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[G\left[1 - \frac{1}{\psi}\right)\gamma_{zx}\right]\right\} \qquad (xyz) \qquad (2.13)$$

В другой форме

$$X^\circ = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)(\sigma_x^* - \sigma)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\tau_{yx}^*\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\tau_{zx}^*\right]\right\} \qquad (2.14)$$

На поверхности тела напряжения $\sigma_x, \ldots, \tau_{xy}, \ldots$ должны удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = X_\nu \qquad (xyz) \qquad (2.15)$$

где X_ν — компоненты поверхностной нагрузки, l, m, n — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности. Внося в последние равенства соотношения (2.3), находим

$$\sigma_x^* l + \tau_{xy}^* m + \tau_{xz}^* n = X_\nu + X_\nu^\circ \qquad (xyz) \qquad (2.16)$$

где $X_\nu^\circ, \ldots$ — компоненты дополнительной поверхностной нагрузки

$$X_\nu^\circ = \sigma_x^\circ l + \tau_{xy}^\circ m + \tau_{xz}^\circ n = 2G\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\left[(e_x - e)\, l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\, m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}\, n\right] \qquad (2.17)$$

или в другой форме

$$X_\nu^\circ = \left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\left[(\sigma_x^* - \sigma^*)\, l + \tau_{xy}^* m + \tau_{xz}^* n\right] \qquad (xyz) \qquad (2.18)$$

Если граничные условия задаются относительно перемещений или деформаций, то дополнительных факторов эти условия не содержат.

Напряжения $\sigma_x, \ldots, \tau_{xy}, \ldots,$ в упруго-пластическом теле должны удовлетворять условиям совместности деформаций (при решении задачи в напряжениях).

Эти условия будут удовлетворены, если напряжения $\sigma_x^*, \ldots, \tau_{xy}^*, \ldots$ соответствуют условиям совместности в упругом теле (уравнениям Бельтрами-Митчеля с учетом температурных членов), так как деформации в упругом и упруго-пластическом теле одинаковы.

В результате приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Деформации в упруго-пластическом теле будут одинаковыми с деформациями в упругом теле, если на последнее действуют дополнительные объемные и поверхностные нагрузки, определяемые равенствами (2.14) и (2.18).

Напряжения в упруго-пластическом и упругом телах связаны простыми соотношениями (2.6).

Теорема 1 еще не дает возможности построить решение, так как сами дополнительные силовые факторов подлежат определению.

Однако можно применить, следуя А. А. Ильюшину, процесс последовательных приближений.

1°. В первом приближении считаем все дополнительные объемные и поверхностные силы равными нулю.

Тогда получим обычную задачу теории упругости, из которой определяем напряжения $\sigma_x^{*(1)}, \ldots, \tau_{xy}^{*(1)}, \ldots$ и соответствующие им деформации $e_x^{(1)}, \ldots, \gamma_{xy}^{(1)}, \ldots$ По данным деформациям определяем величину $\gamma_i^{(1)}$ и затем по кривой деформирования, которая может быть задана также аналитически, величину $\psi^{(1)}$.

Существенно, что величина $\psi^{(1)}$ определяется по $\gamma_i^{(1)}$, а не по $\tau_i^{*(1)}$, что приводит к другому ее значению.

Напряжения первого приближения в упруго-пластическом теле $\sigma_x^{(1)}, \tau_{xy}^{(1)}, \ldots$ находим по формуле (2.3) с учетом (2.4)

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{*(1)} - 2G\left(1 - \frac{1}{\psi^{(1)}}\right)(e_x^{(1)} - e^{(1)}), \ldots$$

или по формуле (2.6)

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{1}{\psi^{(1)}}\sigma_x^{*(1)} + \left(1 - \frac{1}{\psi^{(1)}}\right)\sigma^{*(1)}, \ldots$$

Отметим, что в первом приближении в упруго-пластическом теле предполагаются такие же деформации, как и в упругом теле (под действием заданных внешних нагрузок и нагрева).

2°. В следующем (втором) приближении считаем, что к упругому телу приложены дополнительные нагрузки, определяемые формулами (2.13) и (2.17) или (2.14) и (2.18) по деформациям или напряжениям, определенным в предыдущем (первом) приближении.

Решая вторую задачу (теории упругости), находим напряжения $\sigma_x^{*(2)}, \ldots, \tau_{xy}^{*(2)}, \ldots$ и деформации $e_x^{(2)}, \ldots, \gamma_{xy}^{(2)}, \ldots$ Для их определения достаточно напряжения и деформации, возникающие при действии дополнительных объемных сил и поверхностных нагрузок, сложить с напряжениями и деформациями для первой линейной задачи.

По известным деформациям определяем $\gamma_i^{(2)}$ и затем $\psi^{(2)}$.

По формулам (2.6) находим вторые приближения для напряжений в упруго-пластическом теле $\sigma_x^{(2)}, \ldots, \tau_{xy}^{(2)}, \ldots$ и т. д.

§ 3. Линейные задачи с дополнительными деформациями. Из уравнений (1.1) и (1.3) находим

$$e_x = \frac{\psi}{2G}\sigma_x + \left(\frac{1-2\mu}{E} - \frac{\psi}{2G}\right)\sigma + \alpha t, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\psi}{G}\tau_{xy} \qquad (xyz) \qquad (3.1)$$

Предположим, что среда является упругой и в ней имеют место те же самые апряжения $\sigma_x, \ldots, \tau_{xy}, \ldots$, что и в упруго-пластическом теле.

Напряжениям $\sigma_x, \ldots \tau_{xy}, \ldots$ соответствуют в упругой среде деформации $e_x^*, \ldots, \gamma_{xy}, \ldots$, определяемые из равенств (3.1) при $\psi \equiv 1$

$$e_x^* = \frac{1}{2G}\sigma_x + \left(\frac{1-2\mu}{E} - \frac{1}{2G}\right)\sigma + \alpha t, \qquad \gamma_{xy}^* = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad (xyz) \qquad (3.2)$$

Вычитая из равенств (3.1) соотношения (3.2), получаем известные соотношения Генки — Беляева

$$e_x = e_x^* + e_x^\circ, \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^* + \gamma_{xy}^\circ \qquad (xyz) \qquad (3.3)$$

где

$$e_x^\circ = \frac{\psi - 1}{2G}(\sigma_x - \sigma), \qquad \gamma_{xy}^\circ = \frac{\psi - 1}{G}\tau_{xy} \qquad (xyz \qquad (3.4)$$

Здесь $e_x^*, \ldots, \gamma_{xy}^*, \ldots$ представляют собой упругие деформации, а $e_x^\circ, \ldots, \gamma_{xy}^\circ, \ldots$ — пластические деформации в упруго-пластическом теле. Эти деформации можно представить на основании равенств (3.1) и (3.4) в следующей форме:

$$e_x^{\ *} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha t, \qquad \gamma_{xy}^{\ *} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad (xyz) \qquad (3.5)$$

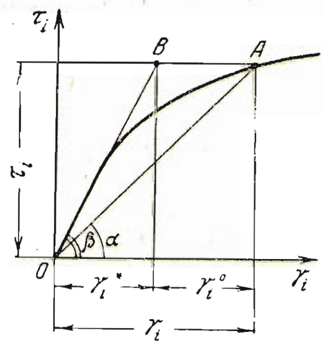
$$e_x^{\ \circ} = \frac{\psi - 1}{3G}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right], \qquad \gamma_{xy}^{\ \circ} = \frac{\psi - 1}{G}\tau_{xy} \qquad (xyz) \qquad (3.6)$$

Используя соотношение (1.4) и равенства (3.4), (1·5) и (1.6), устанавливаем, что

$$\gamma_i = \gamma_i^{\ *} + \gamma_i^{\ \circ} \qquad (3.7)$$

где γ_i^* и γ_i° — интенсивность упругих и пластических деформаций.

Соотношение (3.7) является следствием коллинеарности девиаторов деформаций в рассматриваемых упругом и упруго-пластическом телах, что вытекает из равенства тензоров напряжений. Физический смысл равенства (3.7) пояснен на фиг. 2.



Фиг. 2

Так как напряжения в упругом и упруго-пластическом телах одинаковы, то уравнения равновесия и граничные условия (в напряжениях) останутся без изменений. В условиях совместности деформаций появляются дополнительные члены, которые повлияют на величину напряжений в упругом теле.

В результате приходим к следующей теореме.

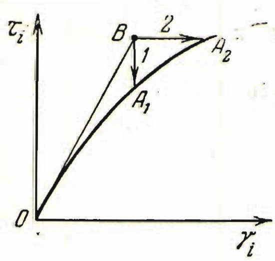
Теорема 2. Напряжения в упруго-пластическом теле будут одинаковыми с напряжениями в упругом теле, если в последнем имеются дополнительные деформации, определяемые равенствами (3.4).

Примером задач с дополнительными деформациями являются задачи о температурных напряжениях. Процесс решения упруго-пластической задачи последовательными приближениями аналогичен изложенному выше.

1°. В первом приближении все дополнительные деформации принимаются равными нулю, и из обычной задачи теории упругости находятся напряжения $\sigma_x^{(1)}, \ldots, \tau_{xy}^{(1)}, \ldots$

По данным напряжениям (а не деформациям!) определяем величину $\psi^{(1)}$ и дополнительные деформации $e_x^{\circ(1)}, \ldots, \gamma_{xy}^{\circ(1)}, \ldots$ по формулам (3.6).

Отметим, что в первом приближении в упруго-пластическом теле предполагаются такие же напряжения, как и в упругом теле (под действием заданных внешних нагрузок и нагрева).



Фиг. 3

2°. В следующем (втором) приближении решается линейная задача (задача теории упругости) с дополнительными деформациями $e_x^{\circ(1)}, \ldots, \gamma_{xy}^{\circ(1)}, \ldots$ и т. д.

Легко установить, что методы линейных задач с дополнительными нагрузками или деформациями дают различные процессы решения.

Различие этих методов показано на фиг. 3. Получив в результате решения задачи теории упругости точку B, дальнейшее «движение» в первом методе осуществляем по стрелке 1, тогда как во втором методе — по стрелке 2.

Критерием сходимости процесса в обоих методах служит близость напряжений исходного и последующего приближений.

Это дает право комбинировать или чередовать приближения в обоих методах например, первое приближение определять по методу дополнительных нагрузок, второе по методу дополнительных деформаций и т. д. Из физических соображений есть основания ожидать, что указанные методы будут давать приближения с различных сторон.

§ 4. Линейные задачи с переменными параметрами упругости. Уравнения (1.1) и (1.3) могут быть представлены в обычной форме закона Гука

$$e_x = \frac{1}{E^*}[\sigma_x - \mu^*(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha t, \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G^*}\tau_{xy} \qquad (xyz) \tag{4.1}$$

$$E^* = E\,\frac{3}{2(1+\mu)\psi + 1 - 2\mu}, \qquad \mu^* = \frac{1-(1-2\mu)/\psi(1+\mu)}{2+(1-2\mu)/\psi(1+\mu)} \tag{4.2}$$

$$G^* = \frac{E^*}{2(1+\mu^*)} = \frac{G}{\psi}, \qquad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{4.3}$$

где E, G, μ — обычные параметры упругости.

При $\mu = {}^1/_2$ соотношения (4.2) и (4.3) значительно упрощаются

$$E^* = \frac{E}{\psi}, \qquad \mu^* = \frac{1}{2} \tag{4.4}$$

Так как процесс активной деформации упруго-пластического тела может рассматриваться как процесс деформирования нелинейно упругого тела, то приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Решение задачи теории пластичности сводится к решению соответствующей задачи теории упругости с параметрами упругости, определяемыми формулами (4.2) и (4.3).

Отметим, что в большинстве практических задач можно считать $\mu = 0{,}5$, тем более, что исходные кривые деформирования получают обычно при этом предположении. Процесс последовательных приближений для рассматриваемого случая следующий.

1°. Полагая в первом приближении $\psi \equiv 1$, решаем обычную задачу теории упругости, из которой определяем напряжения $\sigma_x^{(1)}\, \tau_{xy}^{(1)}, \ldots$ и деформации $e_x^{(1)}, \gamma_{xy}^{(1)}, \ldots$

По найденным деформациям определяем величину $\gamma_i^{(1)}$ и $\psi^{(1)}$.

Зная $\psi^{(1)}$, определяем параметры упругости по формулам (4.2) и (4.3).

2°. В следующем (втором) приближении решается линейная задача с параметрами упругости $E^{*(1)}$, $\mu^{*(1)}$ или $G^{*(1)}$, $\mu^{*(1)}$, определенными в первом приближении, и т. д.

В основе методов линейных задач с дополнительными условиями (методов «упругих решений») лежит процесс последовательных приближений.

В ряде случаев можно улучшить его сходимость, применяя, например, для исходного приближения полусумму двух предыдущих или какую-нибудь линейную их комбинацию. Доказательство сходимости рассматриваемых методов представляет значительные трудности.

В настоящий момент оно проведено для метода линейных задач с дополнительными нагрузками в работе В. М. Панферова [2].

Рассмотренные методы в равной мере относятся и к случаю, когда в различных точках изотропного тела обобщенные кривые деформирования отличаются друг от друга, например вследствие влияния температуры.

Поступила 7 I 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. ОГИЗ. 1948.
2. Панферов В. М. О сходимости метода упругих решений в теории упруго-пластических деформаций оболочек. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 1.