

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ
 (III. ВЛИЯНИЕ СЛОЖНОСТИ НАГРУЖЕНИЯ)

Л. М. Качанов

(Ленинград)

В настоящей заметке, являющейся развитием работ [1, 2], дается новая постановка задачи об устойчивости плоской формы изгиба, учитывающая сложный характер нагружения при выпучивании. При этом оказывается, что развитая ранее теория [1, 2] упрощается, а новая граница устойчивости близка к прежней.

§ 1. О сложном нагружении при выпучивании. Теория малых упруго-пластических деформаций приводит к правильным результатам, если нагрузки возрастают пропорционально некоторому параметру [3]. В задаче об устойчивости плоской формы изгиба такое нагружение не имеет места. До потери плоской формы равновесия отлично от нуля только напряжение растяжения (сжатия) σ_2 ; при выпучивании появляется касательное напряжение $\delta\tau_{xz}$, вызываемое скручиванием полосы. Поэтому теория устойчивости плоской формы изгиба при деформациях за пределом упругости должна основываться на теории пластичности, справедливой при сложном нагружении. Такой общей теорией пластичности в настоящее время мы не располагаем. Однако применительно к задаче о выпучивании полосы можно указать достаточно надежную теорию пластичности, подтверждаемую экспериментами, в которых на состояние растяжения накладывались дополнительные деформации кручения (см., например, [4, 5]). Мы имеем в виду теорию Прандтля-Рейса [6], несколько развитую в работах Хилла, Ли и Танпера [7], Хандельмана, Лина и Прагера [8], Шеферда [9] и др.; условимся называть ее теорией пластического течения.

Полные приращения компонентов деформации состоят из упругой ($d\varepsilon_x', \dots$) и пластической ($d\varepsilon_x'', \dots$) частей:

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x' + d\varepsilon_x'', \dots, \quad d\gamma_{xy} = d\gamma_{xy}' + d\gamma_{xy}'', \dots \quad (1.1)$$

причем

$$d\varepsilon_x'' + d\varepsilon_y'' + d\varepsilon_z'' = 0 \quad (1.2)$$

Согласно экспериментам главные оси приращений пластической деформации совпадают с главными осями напряжений, причем справедливы соотношения Леви-Мизеса

$$\frac{d\varepsilon_1'' - d\varepsilon_2''}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{d\varepsilon_2'' - d\varepsilon_3''}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{d\varepsilon_3'' - d\varepsilon_1''}{\sigma_3 - \sigma_1} = d\gamma \quad (1.3)$$

где индексы 1, 2, 3 отвечают главным направлениям. Величина $d\gamma$ пропорциональна приращению работы пластической деформации и характеризует развитие последней. Компоненты упругой деформации определяются законом Гука; суммируя их с компонентами пластической деформации, определенными в (1.2), (1.3), получаем исходные соотношения

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)] + d\gamma(\sigma_x - \sigma) \quad \text{и т. п.} \\ d\gamma_{xy} &= \frac{1}{G} d\tau_{xy} + 2d\gamma\tau_{xy} \quad \text{и т. п.} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где E — модуль Юнга, G — модуль сдвига, ν — число Пуассона. При этом

$$\begin{aligned} d\gamma &= 0 && \text{при } T < \tau_s \quad (\text{разгрузка}) \\ d\gamma &= 0 && \text{при } dT < 0 \\ d\gamma &= f_1(T) dT && \text{при } T > \tau_s, \quad dT > 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь T — интенсивность касательных напряжений, τ_s — предел текучести при чистом сдвиге. Если $dT = 0$, $T > \tau_s$, то $T = \text{const}$.

В этом случае $d\gamma$ остается неопределенным. Последнее условие представляется более правильным, чем условие $d\gamma = 0$, выдвинутое в работе [8].

Функция $f_1(T)$ характерна для данного материала и не зависит от вида деформации; ее можно определять, например, из опытов на растяжение. Если направляющий девиатор напряжения постоянен [3], то уравнения (1.4) совпадают с уравнениями теории малых упруго-пластических деформаций.

§ 2. Основные соотношения. Используем уравнения (1.4) в рассматриваемой нами задаче, причем, как и ранее [2], ограничимся случаем линейного упрочнения. Применяя равенства (1.4) к случаю чистого сдвига, легко находим, что

$$f_1(T) = \frac{G - G_*}{2GG_*} \frac{1}{T} \quad (2.4)$$

где G_* — модуль упрочнения.

В момент, предшествующий выпучиванию,

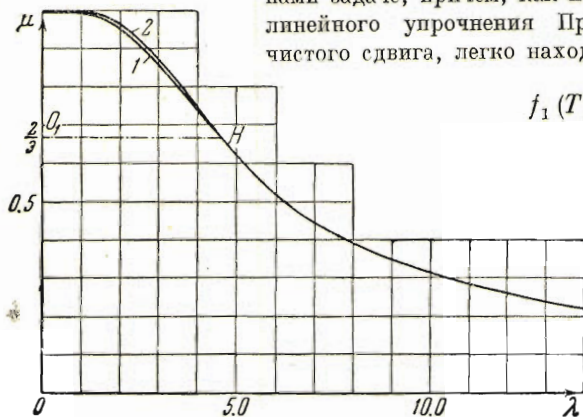
$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xz} = 0$$

Следовательно,

$$T = |\sigma_z| / \sqrt{3}$$

Пренебрегая, как и ранее [1, 2], компонентами σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yz} при выпучивании, находим

$$dT = (\text{sign } \sigma_z) \frac{d\sigma_z}{\sqrt{3}}$$



Фиг. 1

Тогда уравнения (1.4) принимают следующий вид (при $\nu = 1/3$):

$$d\varepsilon_z = \frac{8G + G_*}{24GG_*} d\sigma_z, \quad d\gamma_{xz} = \frac{1}{G} d\tau_{xz} \quad (2.2)$$

Первая из этих формул совпадает с соответствующей формулой (1.7), найденной по теории малых упруго-пластических деформаций в работе [2]; вторая формула значительно проще соответствующей формулы (1.8) и утверждает, что в зонах нагрузки приращения сдвига $d\gamma_{xz}$ и касательного напряжения $d\tau_{xz}$ связаны законом Гука. Таким образом, основные зависимости, найденные в [1, 2] по теории упруго-пластических деформаций, в общем сохраняются при использовании соотношений (1.4). В частности, положение линии раздела определяется теми же уравнениями (2.2) и (2.3) работы [2]; величина $A^*(\zeta, k)$ также остается без изменения. Что же касается $C^*(\zeta, k)$, то в силу второго из соотношений (2.2), справедливого как в области разгрузки, так и в области нагружения, мы получим, что

$$C^*(\zeta, k) = 1 \quad (2.3)$$

При этом следует заметить, что хотя новые и прежние значения $C^*(\zeta, k)$ заметно отличаются, но это различие мало сказывается на расположении границ устойчивости, так как определяющую роль играет величина $A^*(\zeta, k)$, как это видно, например, из энергетического уравнения.

§ 3. Устойчивость плоской формы изгиба полосы, изгибаемой парами. Для выяснения различия в решениях по обеим теориям рассмотрим пример чистого изгиба полосы, ранее приведенный в § 6 (в работе [1] и в § 4 работы [2]). Вместо формулы (4.1) работы [2] будем иметь

$$\lambda = \frac{\pi}{\mu} \sqrt{A^*(\zeta, k)} \quad (3.1)$$

Наибольшее расхождение будет при $k=1$, когда $C^*(\zeta, k)$, определенное по теории малых упруго-пластических деформаций, наиболее значительно отклоняется от единицы (см. фиг. 4 в работе [2]); для этого случая вычисляем границу устойчивости. Из приводимого графика (фиг. 1) видно, что новое решение (кривая 2) для $\mu < 0.95$ очень мало отличается от прежнего решения (кривая 1).

Таким образом, если исключить из рассмотрения значения изгибающих моментов, близкие к предельным (заметим, что рассмотрение таких значений носит условный характер, поскольку при этом очень быстро возрастают прогибы), то границы устойчивости, найденные по обеим теориям, весьма близки друг к другу. С этой точки зрения выбор той или иной схемы расчета безразличен. Однако так как теория и вычисления значительно упрощаются, если основываться на теории пластического течения, более правильно описывающей процесс пластической деформации, то последний вариант теории представляется более целесообразным.

Упрощения, которые необходимо внести в прежнее построение, очевидны, и мы на них не останавливаемся.

В заключение сделаем одно замечание относительно формулы (2.13), приведенной в работе [1] для величины крутящего момента L_z . При выводе этого соотношения рассматривалось напряженное состояние прямой полосы, независимое от z (изгиб и кручение парами). Тогда для вариаций $\delta\tau_{xz}$, $\delta\tau_{yz}$ мы имеем те же самые дифференциальное уравнение равновесия и граничное условие, что и в задаче чистого кручения (упругого или пластического). Отсюда следует справедливость указанной формулы для L_z в задаче о выпучивании.

Поступила 25 III 1951

Ленинградский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Устойчивость плоской формы изгиба за пределом упругости. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 2.
2. Качанов Л. М. Устойчивость плоской формы изгиба за пределом упругости. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 5.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат. 1948.
4. Morrison a. Shepherd. An Experimental Investigation Plastic Stress-Strain Relations. The Inst. Mechan. Eng. Proc. 1950. Vol. 163. No. 55.
5. Taylor a. Quinney. The Plastic Distortion of Metals. Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1931. A-233.
6. Рейс. Учет упругой деформации в теории пластичности. Теория пластичности. Сб. переводов. Изд. ин. лит. 1948.
7. Hill, Lee a. Tupper. The Theory of Combined Plastic and Elastic Deformation. Proc. Roy. Soc. 1947. A-191. No. 1026.
8. Handelman, Lin a. Prager. On the Behaviour of Metals in the Strain-Hardening Range. Quart. Appl. Mathem. 1946. Vol. IV. No. 4.
9. Shepherd. Plastic Stress-Strain Relations. Proc. Inst. Mechan. Eng. Appl. Mech. 1948. Vol. 159. No. 39.