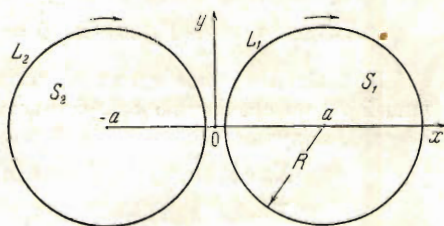


О НАПРЯЖЕНИЯХ В ПЛОСКОЙ ВЕСОМОЙ СРЕДЕ С ДВУМЯ ОДИНАКОВЫМИ
 СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Д. П. Шерман
 (Москва)

§ 1. Предположим, что изотропный и однородный упругий материал заполняет полубесконечную трехсвязную область S^* , ограниченную прямой L_0 и окружностями L_1 и L_2 . При этом пусть S — бесконечная двусвязная область с границами L_1 и L_2 , и S_1 и S_2 — конечные односвязные области, внутренние к L_1 и L_2 . Обозначим радиусы окружностей L_1 и L_2 через R , а расстояние их центров до прямой L_0 через f и будем считать величину отношения R к f пренебрежимо малой по сравнению с единицей. Начало декартовых координат плоскости $z = x + iy$, в которой расположена упругая среда, поместим в середине (параллельного прямой L_0) отрезка, соединяющего центры окружностей L_1 и L_2 , и направим ось абсцисс вдоль этого отрезка в сторону первой окружности L_1 ; ось ординат направим в сторону границы L_0 , как указано на фиг. 1. Аффиксы центров L_1 и L_2 назовем a_1 и a_2 , считая $a_1 = -a_2 = a > 0$. Наконец, обход контура L_0 условимся вести против движения часовой стрелки, а кривых L_1 и L_2 — по направлению ее вращения.



Фиг. 1

Будем считать, что среда S^* подвержена действию силы тяжести, а ее границы L_0 , L_1 и L_2 свободны от внешних усилий. В этом случае искомые компоненты напряжений $X_x^{(1)}$, $X_y^{(1)}$ и $Y_y^{(1)}$ удовлетворяют в области S^* дифференциальным уравнениям равновесия и совместности

$$\frac{\partial X_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial X_y^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X_y^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial Y_y^{(1)}}{\partial y} - \rho g = 0 \quad (1.1)$$

$$\Delta (X_x^{(1)} + Y_y^{(1)}) = 0 \quad (1.2)$$

где ρ — плотность среды, g — ускорение силы тяжести, и затем предельным равенствам (n — нормаль к L_1 и L_2 , направленная внутрь S_1 и S_2)

$$X_y^{(1)} = 0, \quad Y_y^{(1)} = 0 \quad \text{на } L_0 \quad (1.3)$$

$$X_x^{(1)} \cos(n, x) + X_y^{(1)} \cos(n, y) = 0 \quad \text{на } L_1 \text{ и } L_2 \quad (1.4)$$

$$X_y^{(1)} \cos(n, x) + Y_y^{(1)} \cos(n, y) = 0$$

Будем искать составляющие $X_x^{(1)}$, $X_y^{(1)}$ и $Y_y^{(1)}$ в виде суммы

$$X_x^{(1)} = X_x^{(0)} + X_x, \quad X_y^{(1)} = X_y^{(0)} + X_y, \quad Y_y^{(1)} = Y_y^{(0)} + Y_y \quad (1.5)$$

Здесь $X_x^{(0)}$, $X_y^{(0)}$ и $Y_y^{(0)}$ — некоторое частное решение уравнений (1.1) и (1.2), характеризующее напряженное состояние весоной среды до образования упомянутых

отверстий, а составляющие X_x , X_y и Y_y — дополнительные напряжения, обусловленные наличием этих отверстий. Возьмем частное решение в форме

$$X_x^{(0)} = n\rho g(y + C_1^{(0)}), \quad Y_y^{(0)} = \rho g(y + C_2^{(0)}), \quad X_y^{(0)} = 0 \quad (1.6)$$

где $C_1^{(0)}$ и $C_2^{(0)}$ — постоянные интегрирования и n — так называемый коэффициент распора, зависящий от свойств упругой среды. Выбирая постоянные из условия обращения в нуль на прямой L_0 составляющих $X_x^{(0)}$ и $Y_y^{(0)}$, будем иметь

$$X_x^{(0)} = n\rho g(y - f), \quad Y_y^{(0)} = \rho g(y - f), \quad X_y^{(0)} = 0 \quad (1.7)$$

Дополнительные напряжения X_x , X_y и Y_y , очевидно, удовлетворяют уже однородным уравнениям (1.1) и (1.2); кроме того, допустим, что они равны нулю на бесконечности. Граничные равенства для них получим из (1.3) и (1.4), учитывая (1.5) и (1.7). Они имеют вид:

$$X_y = 0, \quad Y_y = 0 \quad \text{на } L_0 \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) &= -n\rho g(y - f) \cos(n, x) \\ X_y \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) &= -\rho g(y - f) \cos(n, y) \end{aligned} \quad \text{на } L_1 \text{ и } L_2 \quad (1.9)$$

Пренебрегая в последних соотношениях величиной y (численно не превосходящей R) по сравнению с f , что возможно, так как по условию $f \gg R$, и положив $h = \rho g f$, получим

$$\begin{aligned} X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) &= nh \cos(n, x) \\ X_y \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) &= h \cos(n, y) \end{aligned} \quad \text{на } L_1 \text{ и } L_2 \quad (1.10)$$

В данном случае нас преимущественно интересует напряженное состояние в окрестности кривых L_1 и L_2 . Имея это в виду и взяв во внимание то же условие $f \gg R$, можно, не делая практически сколь-либо заметной погрешности, отказаться от точного удовлетворения предельному равенству (1.8). Таким образом, будем считать, что компоненты X_x , X_y и Y_y при тех же граничных условиях (1.10) удовлетворяют в области S однородной системе уравнений (1.1) и (1.2) (обращаясь в нуль на бесконечности).

Введем функции [1] $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, регулярные в области S , обращающиеся в нуль на бесконечности и связанные с компонентами X_x , X_y и Y_y известными формулами Г. В. Колосова

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z), \quad Y_y - X_x + 2i X_y = 2 [\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)] \quad (1.11)$$

С помощью этих функций граничные равенства (1.10) могут быть преобразованы к форме

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) \quad \text{на } L_1 \text{ и } L_2 \quad (1.12)$$

где t — аффикс точки L_1 и L_2 ,

$$\begin{aligned} f(t) &= 2h_1(t - a_j) + 2h_2 \frac{R^2}{t - a_j} + C_j \quad (j = 1, 2) \\ 2h_1 &= \frac{1}{2}(1 + n)h, \quad 2h_2 = \frac{1}{2}(1 - n)h, \quad (h = \rho g f) \end{aligned} \quad (1.13)$$

и C_1 и C_2 — некоторые, пока неизвестные постоянные; ни одна из них (поскольку согласно условию каждая из функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ исчезает на бесконечности) не может быть фиксирована произвольно.

За исключением немногочисленных случаев, когда решение задачи может быть более или менее просто получено в замкнутой форме (это преимущественно имеет место для односвязной области), определение функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, вообще говоря,

сопряжено со значительными математическими трудностями. Используемый обычно при одновременном отыскании названных функций метод рядов весьма часто приводит для нахождения коэффициентов разложения к бесконечной системе линейных уравнений, не поддающейся по своей неблагоприятной структуре достаточно быстрому и не чреватому специфическими осложнениями рассмотрению; помимо этого ряды для искомым напряжений, как правило, оказываются медленно сходящимися и главная часть из них далеко не всегда может быть легко выделена. Анализ некоторых частных задач дает известное основание думать, что причина осложнений нередко лежит в наличии функции $\psi(z)$, производная которой в отличие от функции $\varphi(z)$, как ясно из (1.11), не выражается непосредственно через составляющие тензора напряжений. Поэтому во многих случаях представляется целесообразным ввести вместо $\psi(z)$ новую вспомогательную функцию

$$\chi(z) = z \varphi'(z) + \psi(z) \quad (1.14)$$

также регулярную в области S (ее производная по крайней мере на вещественной оси связана непосредственно с составляющими напряжений). Кроме того, чтобы получить более удобное решение, быстрее ведущее к цели при численных расчетах, мы займемся сначала определением функции $\varphi(z)$, взяв для нее представление в форме степенного ряда и предварительно исключив из рассмотрения при помощи приема Н. И. Мухелишвили функцию $\psi(z)$; затем, зная $\varphi(z)$, найдем $\chi(z)$ посредством интегралов типа Коши. Подобное расчленение процесса решения с использованием различных форм представления для искомым функций имеет в подавляющем числе случаев явное преимущество перед обычным методом рядов, и ему почти всегда нужно следовать, если только, разумеется, это возможно.

Примечание. Как известно [2], используя для рассматриваемой задачи биполярные координаты, мы придем к совокупности тождественных по структуре изолированных систем конечного числа уравнений (на которые распадается бесконечная система), позволяющих сравнительно просто найти точные значения коэффициентов разложения. Однако ряды для составляющих напряжений при этом все же будут медленно сходящимися, в особенности, если границы L_1 и L_2 близки друг к другу; между тем этот случай нас здесь главным образом интересует.

§ 2. В связи с (1.14) граничные равенства (1.12) принимают форму:

$$\varphi(t) + (t - \bar{t}) \overline{\varphi'(t)} + \overline{\chi(t)} = f(t) \quad (2.1)$$

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, регулярные в S и равные нулю на бесконечности, могут быть взяты в виде степенных рядов

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k^{(1)} \left(\frac{R}{z-a} \right)^k + \alpha_k^{(2)} \left(\frac{R}{z+a} \right)^k \right\} \\ \psi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \beta_k^{(1)} \left(\frac{R}{z-a} \right)^k + \beta_k^{(2)} \left(\frac{R}{z+a} \right)^k \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где коэффициенты $\alpha_k^{(n)}$ и $\beta_k^{(n)}$ ($n=1, 2$) являются вещественными величинами. Последнее легко усмотреть, учитывая характер свободного члена $f(t)$ и расположение границ L_1 и L_2 .

В исследуемом случае имеет место геометрическая и силовая симметрия; поэтому, например, в симметричных точках вещественного отрезка $-(a-R) < z < (a-R)$ соответственные значения составляющих X_x и Y_y между собой совпадают. Приняв это во внимание и обращаясь к формулам (1.11), без труда убедимся, что

$$\alpha_k^{(1)} = (-1)^{k+1} \alpha_k^{(2)}, \quad \beta_k^{(1)} = (-1)^{k+1} \beta_k^{(2)} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

Таким образом, опустив у первых из этих величин верхний индекс 1, имеем

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left\{ \left(\frac{R}{z-a} \right)^k + (-1)^{k+1} \left(\frac{R}{z+a} \right)^k \right\} \\ \psi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left\{ \left(\frac{R}{z-a} \right)^k + (-1)^{k+1} \left(\frac{R}{z+a} \right)^k \right\}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Очевидно, в аналогичной форме может быть взята также функция $\chi(z)$.

Далее весьма элементарные преобразования дают

$$\overline{\varphi}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{(n-1)(k+1)} \xi_k \left(\frac{t-a_n}{R} \right)^k \quad \text{на } L_n \quad (n=1, 2) \quad (2.5)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}\xi_k &= \alpha_k \quad (k=1, 2, \dots), \\ \xi_{-k} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} C_{-\nu}^k \varepsilon^{k+\nu} \alpha_{\nu} \quad (k=0, 1, \dots), \quad \varepsilon = \frac{R}{2a}\end{aligned}\quad (2.6)$$

Поступая несколько иначе, получим вместо (2.5) следующие равенства:

$$\overline{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)(k+1)} \alpha_k \left\{ \left(\frac{t-a_n}{R} \right)^k + (-1)^{k+1} \chi_{nk}(t) \right\} \quad \text{на } L_n \quad (n=1, 2) \quad (2.7)$$

Здесь функция $\chi_{nk}(z)$, регулярная вне L_n и ограниченная на бесконечности:

$$\chi_{nk}(z) = \left\{ \frac{R(z-a_n)}{R^2 + 2a_n(z-a_n)} \right\}^k \quad (n=1, 2) \quad (2.8)$$

Для ее производной имеем

$$\chi'_{nk}(z) = \frac{k}{R} \left(\frac{R}{z-a_n} \right)^2 \chi_{n, k+1}(z) \quad (2.9)$$

Не представляет труда выписать также разложение функции $\chi_{nk}(z)$ в ряд Тейлора во внутренней L_{n+1} (индекс 3 при $n=2$ нужно заменить на 1). Именно, проделав несложные выкладки, получим

$$\chi_{nk}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{(2-n)(k+\nu)} p_{k\nu} \left(\frac{z-a_{n+1}}{R} \right)^{\nu} \quad \text{на } L_{n+1} \quad (n=1, 2) \quad (2.10)$$

где коэффициенты разложения определяются формулой

$$p_{k\nu} = (-1)^k \mu^k \sum_{k_1=0}^{E(\nu, k)} C_k^{k_1} C_{-k}^{\nu-k_1} \varepsilon^{k_1} \mu^{\nu-k_1}, \quad \mu = \frac{2aR}{4a^2 - R^2} \quad (2.11)$$

причем $E(\nu, k) = \nu$, если $\nu \leq k$, и $E(\nu, k) = k$, если $\nu > k$.

Формула (2.11) удобна, если оба индекса k и ν или по крайней мере один из них невелик. С увеличением же индексов ее использование становится все более затруднительным и, вообще говоря, практически почти невозможным для k и ν , превосходящих примерно 12. Дело в том, что коэффициенты $p_{k\nu}$, будучи численно весьма малыми при сравнительно больших k и ν , составляются в то же время по формуле (2.11) из знакопеременной конечной суммы, отдельные слагаемые которой достигают по абсолютной величине весьма больших значений; благодаря этому принятая точность расчета вообще недопустимо резко снижается, а подчас и целиком съедается, приводя к ошибке в первой же значащей цифре. Однако, нетрудно

получить иную прямую (не рекуррентную) формулу для величин $p_{k\nu}$, свободную от указанного недостатка. Для этого нужно в интегральном выражении для $p_{k\nu}$ рассмотреть поведение подинтегральной функции вне соответствующей окружности L_{n+1} (а не внутри ее, как было сделано при выводе (2.11)). Несложные выкладки, аналогичные по характеру ранее использованным, при этом дадут

$$p_{k\nu} = (-1)^{k+\nu} \sum_{k_1=1}^k C_k^{k_1} C_{\nu+k_1-1}^{\nu} \varepsilon^{k+k_1} \mu^{\nu+k_1} \quad (2.12)$$

Отметим, что вычисление коэффициентов $p_{k\nu}$ иногда предпочтительней вести по рекуррентным соотношениям

$$p_{k\nu} = \sum_{\nu_1=0}^{\nu} p_{1\nu_1} p_{k-1, \nu-\nu_1}$$

Они позволяют найти $p_{k\nu}$ последовательно один за другим и более удобны, нежели (2.11), когда оба индекса велики, и нежели (2.12) при большем первом индексе k .

Значения $p_{k\nu}$ ($k = 1, 2, \dots, 12$; $\nu = 0, 1, \dots, 12$) для $\varepsilon = 1/2.2$ приведены в табл. 1.

В силу первого из равенств (2.4) имеем на L_n ($n = 1, 2$)

$$(\bar{t}-t) \varphi'(t) = - \left(\frac{R}{t-a_n} - \frac{t-a_n}{R} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k \sum_{j=1}^2 \left\{ (-1)^{j-1} \frac{R}{t-a_j} \right\}^{k+1}$$

Отсюда, проделав преобразования, сходные с предшествующими, получим

$$(\bar{t}-t) \varphi'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{(n-1)(k+1)} g_k \left(\frac{t-a_n}{R} \right)^k \quad \text{на } L_n \quad (n = 1, 2) \quad (2.13)$$

где положено

$$\begin{aligned} g_{-1} &= \alpha_1 - \delta_0, & g_{-k} &= k\alpha_k - (k-2)\alpha_{k-2} & (k = 2, 3, \dots) \\ g_k &= \delta_{k-1} - \delta_{k+1} & (k = 0, 1, \dots) \end{aligned} \quad (2.14)$$

причем

$$\delta_{-1} = 0, \delta_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \nu C_{-(\nu+1)}^k \varepsilon^{\nu+1+k} \alpha_{\nu} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2.15)$$

Последние соотношения позволяют записать вторые из величин (2.14) в виде

$$g_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \nu (C_{-(\nu+1)}^{k-1} - \varepsilon^2 C_{-(\nu+1)}^{k+1}) \varepsilon^{k+\nu} \alpha_{\nu} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2.16)$$

§ 3. Имея в виду соотношения (2.5) и (2.7) и взяв точку z лежащей внутри L_1 , без труда найдем (при обусловленном направлении обхода границ L_1 и L_2)

$$\sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{\overline{\varphi(t)}}{t-z} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} p_{\nu k} - \alpha_k \right\} \left(\frac{z-a}{R} \right)^k - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \varepsilon^{\nu} \alpha_{\nu} \quad (3.1)$$

Аналогично для той же точки z будем иметь

$$\sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{(\bar{t}-t) \varphi'(t)}{t-z} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \left(\frac{z-a}{R} \right)^k \quad (3.2)$$

где постоянные η_k равны:

$$\eta_k = -g_k + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} C_{-\nu}^k g_{-\nu} \varepsilon^{k+\nu} \quad (k=0, 1, \dots) \quad (3.3)$$

Последней формуле по использованию (2.14), (2.16) и соотношения

$$C_{-(k+1)}^{k_1+1} - C_{-(k+2)}^{k_1} = (-1)^{k_1+1} C_{k_1-k_1+2}^{k_1+1}$$

можно придать вид:

$$\eta_k = (-1)^k \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \nu \varepsilon^{\nu+k} \{C_{\nu+k}^k - \varepsilon^2 (1 + C_{k+\nu+2}^{k+1})\} \alpha_{\nu} \quad (3.4)$$

Обращаясь теперь к предельным условиям, сопряженным с (2.1), умножим обе их части на ядро Коши $\{2\pi i(t-z)\}^{-1}$, где z — точка области S_1 , и проинтегрируем каждую из них по совокупности кривых L_1 и L_2 . Учитывая затем формулы (3.1), (3.2) и (3.4), и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях двучлена $(z-a)$, приходим к бесконечной системе линейных уравнений относительно всех α_{ν} и постоянной C_1 ; подвергнув ее легким преобразованиям, окончательно имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu k} \alpha_{\nu} = f_k \quad (k=0, 1, \dots) \quad (3.5)$$

Здесь введены обозначения

$$c_{kk} = 1 - \gamma_{kk}, \quad c_{\nu k} = -\gamma_{\nu k} \quad (\nu \neq k)$$

$$\gamma_{\nu k} = p_{\nu k} + (-1)^{k+\nu+1} \nu \varepsilon^{\nu+k} \{C_{\nu+k}^k - \varepsilon^2 (1 + C_{k+\nu+2}^{k+1})\}$$

$$f_0 = 2h_1 R \left(\frac{C_1}{2h_1 R} - \varepsilon \right), \quad f_1 = 2h_1 R (q + \varepsilon^2)$$

$$f_k = 2h_1 R (-1)^{k+1} \varepsilon^{k+1} \quad (k=2, 3, \dots), \quad q = \frac{h_2}{h_1}$$

Постоянную C_1 содержит лишь первое уравнение системы, отвечающее $k=0$; она легко определится после того, как будут найдены неизвестные α_{ν} ($\nu=1, 2, \dots$).

Предполагая, что точка z лежит внутри L_2 , и проделав аналогичные выкладки, мы, как нетрудно убедиться, приходим к системе, тождественно совпадающей с (3.6), за исключением первого уравнения, в которое входит постоянная C_2 . Сопоставление его с первым же уравнением (3.5) дает, что $C_1 = -C_2$.

Допустив, что система (3.5) каким-либо образом разрешена, умножим далее равенство, сопряженное с (2.1), на упомянутое ядро Коши и проинтегрируем его также по контуру, состоящему из кривых L_1 и L_2 , но считая точку z уже лежащей в области S . При этом выкладки, аналогичные предшествующим, дадут

$$\begin{aligned} \chi(z) = 2h_1 R \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^k \alpha_k^* \{ \chi_{1k}(z) + (-1)^{k+1} \chi_{2k}(z) \} + \right. \\ \left. + \beta_k^* \left\{ \left(\frac{R}{z-a} \right)^k + (-1)^{k+1} \left(\frac{R}{z+a} \right)^k \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

где для удобства положено

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 2h_1 R \alpha_k^* \quad (k=1, 2, \dots), & 2h_1 R - g_{-1} &= 2h_1 R \beta_1^*, \\ -g_{-k} &= 2h_1 R \beta_k^* \quad (k=2, \dots) \end{aligned}$$

Таблица 1

$\nu \backslash k$	1	2	3	4
0	-0.5729167	0.3282335	-0.1880504	0.1077372
1	0.678168 10^{-1}	-0.777068 10^{-1}	0.667793 10^{-1}	-0.510120 10^{-1}
2	-0.388534 10^{-1}	0.491186 10^{-1}	-0.461637 10^{-1}	0.382831 10^{-1}
3	0.222598 10^{-1}	-0.307758 10^{-1}	0.312886 10^{-1}	-0.278370 10^{-1}
4	-0.127530 10^{-1}	0.191416 10^{-1}	-0.208778 10^{-1}	0.197614 10^{-1}
5	0.73064 10^{-2}	-0.118314 10^{-1}	0.137548 10^{-1}	-0.137651 10^{-1}
6	-0.41860 10^{-2}	0.72739 10^{-2}	-0.89666 10^{-2}	0.94414 10^{-2}
7	0.23982 10^{-2}	-0.44512 10^{-2}	0.57930 10^{-2}	-0.63930 10^{-2}
8	-0.13740 10^{-2}	0.27128 10^{-2}	-0.37140 10^{-2}	0.42819 10^{-2}
9	0.7872 10^{-3}	-0.16474 10^{-2}	0.23652 10^{-2}	-0.28410 10^{-2}
10	-0.4510 10^{-3}	0.9972 10^{-3}	-0.14973 10^{-2}	0.18696 10^{-2}
11	0.2584 10^{-3}	-0.6019 10^{-3}	0.9430 10^{-3}	-0.12214 10^{-2}
12	-0.1480 10^{-3}	0.3624 10^{-3}	-0.5911 10^{-3}	0.7929 10^{-3}

$\nu \backslash k$	5	6	7	8
0	-0.617245 10^{-1}	0.353630 10^{-1}	-0.202600 10^{-1}	0.116073 10^{-1}
1	0.365320 10^{-1}	-0.251157 10^{-1}	0.167874 10^{-1}	-0.109918 10^{-1}
2	-0.295784 10^{-1}	0.218217 10^{-1}	-0.155792 10^{-1}	0.108512 10^{-1}
3	0.229247 10^{-1}	-0.179332 10^{-1}	0.135171 10^{-1}	-0.99040 10^{-2}
4	-0.172064 10^{-1}	0.141621 10^{-1}	-0.111878 10^{-1}	0.85637 10^{-2}
5	0.125979 10^{-1}	-0.108504 10^{-1}	0.89380 10^{-2}	-0.71135 10^{-2}
6	-0.90420 10^{-2}	0.81160 10^{-2}	-0.69449 10^{-2}	0.57267 10^{-2}
7	0.63843 10^{-2}	-0.59528 10^{-2}	0.52757 10^{-2}	-0.44949 10^{-2}
8	-0.44460 10^{-2}	0.42950 10^{-2}	-0.39331 10^{-2}	0.34546 10^{-2}
9	0.30598 10^{-2}	-0.30559 10^{-2}	0.28856 10^{-2}	-0.26082 10^{-2}
10	-0.20843 10^{-2}	0.21481 10^{-2}	-0.20881 10^{-2}	0.18803 10^{-2}
11	0.14070 10^{-2}	-0.14940 10^{-2}	0.14928 10^{-2}	-0.14224 10^{-2}
12	-0.9423 10^{-3}	0.10294 10^{-2}	-0.10559 10^{-2}	0.10312 10^{-2}

$\nu \backslash k$	9	10	11	12
0	-0.66500 10^{-2}	0.38099 10^{-2}	-0.21828 10^{-2}	0.12505 10^{-2}
1	0.70845 10^{-2}	-0.45098 10^{-2}	0.28421 10^{-2}	-0.17763 10^{-2}
2	-0.74133 10^{-2}	0.49860 10^{-2}	-0.33104 10^{-2}	0.21742 10^{-2}
3	0.70955 10^{-2}	-0.49912 10^{-2}	0.34577 10^{-2}	-0.23645 10^{-2}
4	-0.63923 10^{-2}	0.46740 10^{-2}	-0.33590 10^{-2}	0.23786 10^{-3}
5	0.55076 10^{-2}	-0.41685 10^{-2}	0.30954 10^{-2}	-0.22615 10^{-2}
6	-0.45838 10^{-2}	0.35801 10^{-2}	-0.27390 10^{-2}	0.20587 10^{-2}
7	0.37100 10^{-2}	-0.29829 10^{-2}	0.23459 10^{-2}	-0.18102 10^{-2}
8	-0.29342 10^{-3}	0.24239 10^{-2}	-0.19559 10^{-2}	0.15467 10^{-2}
9	0.22757 10^{-2}	-0.19283 10^{-2}	0.15941 10^{-2}	-0.12901 10^{-2}
10	-0.17355 10^{-2}	0.15064 10^{-2}	-0.12742 10^{-2}	0.10540 10^{-2}
11	0.13043 10^{-2}	-0.11584 10^{-2}	0.10013 10^{-2}	-0.8457 10^{-3}
12	-0.9676 10^{-3}	0.8783 10^{-3}	-0.7752 10^{-3}	0.6679 10^{-3}

Отсюда для производной функции $\chi(z)$, помня равенство (2.9), получим

$$\begin{aligned} \chi'(z) = 2h_1 \sum_{k=1}^{\infty} k \left[\left(\frac{R}{z-a} \right)^2 \left\{ (-1)^k \alpha_k^* \chi_{1, k+1}(z) - \beta_k^* \left(\frac{R}{z-a} \right)^{k-1} \right\} + \right. \\ \left. + (-1)^{k+1} \left(\frac{R}{z+a} \right)^2 \left\{ (-1)^k \alpha_k^* \chi_{2, k+1}(z) - \beta_k^* \left(\frac{R}{z+a} \right)^{k-1} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Как нетрудно видеть из (1.11) и (1.14), на вещественной оси имеем

$$X_x = 3\varphi'(z) - \chi'(z), \quad Y_y = \varphi'(z) + \chi'(z), \quad X_y = 0 \quad (3.8)$$

Для точек среды с комплексным аффиксом z эти формулы нужно заменить следующими:

$$\begin{aligned} X_x &= \operatorname{Re} \{ -(\bar{z} - z) \varphi''(z) + 3\varphi'(z) - \chi'(z) \} \\ Y_y &= \operatorname{Re} \{ (\bar{z} - z) \varphi''(z) + \varphi'(z) + \chi'(z) \} \\ X_y &= \operatorname{Im} \{ (\bar{z} - z) \varphi''(z) - \varphi'(z) + \chi'(z) \} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Средние значения дополнительных напряжений вдоль вещественного отрезка между окружностями L_1 и L_2 , могут быть найдены [2] из весьма простых формул:

$$\begin{aligned} (X_x)_{\text{ср.}} &= \frac{4}{(a-R)} \varphi(a-R) - (Y_y)_{\text{ср.}} \\ (Y_y)_{\text{ср.}} &= -\frac{1}{(a-R)} (2h_1 R + 2h_2 R - C_1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

В качестве примера, иллюстрирующего решение, рассмотрим случай $\epsilon = \frac{1}{2.2}$ (для него, в частности, составлена табл. 1). При этом границы L_1 и L_2 близко расположены одна к другой в окрестности начала координат, вследствие чего этой части среды следует ожидать значительной концентрации напряжений. Последнее обстоятельство, естественно, увеличивает трудности при проведении численных расчетов. В рядах, определяющих искомые функции, учтем в этом случае слагаемые, зависящие от α_k ($k = 1, 2, \dots, s$; $s = 12$); пренебрежение остальными α_k ($k = s + 1, \dots$), как мы ниже увидим, вносит практически мало заметную погрешность в величины напряжений. В соответствии со сказанным укоротим систему (3.5) отбрасывая пока от уравнения, содержащего C_1 до первых s уравнений. Численные значения коэффициентов $c_{\nu k}$, входящих в эти уравнения, помещены в табл. 2.

Учитывая свойства матрицы коэффициентов укороченной системы ¹, будем искать α_k ($k = 1, 2, \dots, s$) в виде суммы

$$\alpha_k = \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(2)} + \dots \quad (3.11)$$

слагаемые которой — так называемые приближения $\alpha_k^{(e)}$ ($e = 0, 1, 2, \dots$) — находятся последовательно одно за другим из рекуррентных систем

$$\sum_{\nu=1}^k c_{\nu k} \alpha_k^{(e)} = f_k^{(e)} \quad (k = 1, 2, \dots, s; e = 0, 1, \dots) \quad (3.12)$$

со свободным членом

$$f_k^{(0)} = f_k, \quad f_k^{(e)} = - \sum_{\nu=k+1}^s c_{\nu k} \alpha_{\nu}^{(e-1)} \quad (e = 1, 2, \dots) \quad (3.13)$$

В табл. 3 приведены значения $\alpha_k^{(e)} = 2h_1 R (x_{k1}^{(e)} + q x_{k2}^{(e)})$ ($e = 0, 1, 2$) и вычисленные по ним согласно (3.11) искомые $\alpha_k = 2h_1 R (x_{k1} + q x_{k2})$ ($k = 1, 2, \dots, s$).

¹ Подробнее по этому поводу см. в статье [2].

Таблица 2

$\nu \backslash k$	1	2	3	4
1	1.0465879	-0.294480 10^{-1}	0.73751 10^{-2}	0.39331 10^{-2}
2	-0.588959 10^{-1}	1.0927054	-0.686486 10^{-1}	0.377140 10^{-1}
3	0.221254 10^{-1}	-0.1029729	1.1097570	-0.844840 10^{-1}
4	0.157323 10^{-1}	0.754281 10^{-1}	-0.1126453	1.1094558
5	-0.361675 10^{-1}	-0.393374 10^{-1}	0.901027 10^{-1}	-0.1084443
6	0.406218 10^{-1}	0.109796 10^{-1}	-0.596546 10^{-1}	0.901086 10^{-1}
7	-0.359742 10^{-1}	0.57079 10^{-2}	0.326594 10^{-1}	-0.653442 10^{-1}
8	0.280236 10^{-1}	-0.128427 10^{-1}	-0.134616 10^{-1}	0.419424 10^{-1}
9	-0.201067 10^{-1}	0.140326 10^{-1}	0.19887 10^{-2}	-0.236296 10^{-1}
10	0.136184 10^{-1}	-0.123086 10^{-1}	0.36586 10^{-2}	0.111275 10^{-1}
11	-0.88391 10^{-2}	0.96173 10^{-2}	-0.56217 10^{-2}	-0.35748 10^{-2}
12	0.55531 10^{-2}	-0.69784 10^{-2}	0.56031 10^{-2}	-0.40429 10^{-2}

$\nu \backslash k$	5	6	7	8
1	-0.72335 10^{-2}	0.67703 10^{-2}	-0.51392 10^{-2}	0.35029 10^{-2}
2	-0.157350 10^{-1}	0.36599 10^{-2}	0.16308 10^{-2}	-0.32107 10^{-2}
3	0.540616 10^{-1}	-0.298273 10^{-1}	0.139969 10^{-1}	-0.50481 10^{-2}
4	-0.867554 10^{-1}	0.600724 10^{-1}	-0.373395 10^{-1}	0.209712 10^{-1}
5	1.1020190	-0.827298 10^{-1}	0.602586 10^{-1}	-0.402311 10^{-1}
6	-0.992758 10^{-1}	1.0920952	-0.759922 10^{-1}	0.573419 10^{-1}
7	0.843620 10^{-1}	-0.886576 10^{-1}	1.0816588	-0.682795 10^{-1}
8	-0.643698 10^{-1}	0.764559 10^{-1}	-0.780337 10^{-1}	1.0715769
9	0.447226 10^{-1}	-0.602868 10^{-1}	0.679850 10^{-1}	-0.680256 10^{-1}
10	-0.283978 10^{-1}	0.439926 10^{-1}	-0.548537 10^{-1}	0.597052 10^{-1}
11	0.163470 10^{-1}	-0.298883 10^{-1}	0.414046 10^{-1}	-0.489960 10^{-1}
12	-0.82806 10^{-2}	0.189136 10^{-1}	-0.294179 10^{-1}	0.379136 10^{-1}

$\nu \backslash k$	9	10	11	12
1	-0.22341 10^{-2}	0.13618 10^{-2}	-0.8036 10^{-3}	0.4628 10^{-2}
2	0.31183 10^{-2}	-0.24617 10^{-2}	0.17486 10^{-2}	-0.11631 10^{-2}
3	0.6629 10^{-3}	0.10976 10^{-2}	-0.15332 10^{-2}	0.14008 10^{-2}
4	-0.105021 10^{-1}	0.44510 10^{-2}	-0.12999 10^{-2}	-0.1348 10^{-3}
5	0.248459 10^{-1}	-0.141989 10^{-1}	0.74304 10^{-2}	-0.34502 10^{-2}
6	-0.401912 10^{-1}	0.263956 10^{-1}	-0.163027 10^{-1}	0.94568 10^{-2}
7	0.528772 10^{-1}	-0.383976 10^{-1}	0.263484 10^{-1}	-0.171604 10^{-1}
8	-0.604672 10^{-1}	0.477642 10^{-1}	-0.356334 10^{-1}	0.252757 10^{-1}
9	1.0622345	-0.530044 10^{-1}	0.425268 10^{-1}	-0.324081 10^{-1}
10	-0.588937 10^{-1}	1.0537866	-0.461119 10^{-1}	0.374646 10^{-1}
11	0.519772 10^{-1}	-0.507231 10^{-1}	1.0462690	-0.398828 10^{-1}
12	-0.432108 10^{-1}	0.449576 10^{-1}	-0.435085 10^{-1}	1.0396541

Из табл. 3 достаточно убедительно явствует, что неучтенные $\alpha_k^{(e)}$ ($e = 3, \dots$) действительно пренебрежимо малы.

Зная α_k ($k = 1, 2, \dots, s$), найдем по формулам (3.8) и (3.9) составляющие напряжений в любой точке среды. При этом следует иметь в виду, что в части выражения (3.7), зависящей от g_{-k} , нужно, как легко усмотреть из (2.14), учесть $(s+2)$ слагаемых, пренебрегая, разумеется, в $g_{-(s+1)}$ и $g_{-(s+2)}$ соответственно величинами α_{s+1} и α_{s+2} .

Таблица 3

k	x_{k1}^0	x_{k2}^0	x_{k1}^1	x_{k2}^1
1	0.1974145	0.9554858	$-0.46092 \cdot 10^{-2}$	$0.22735 \cdot 10^{-2}$
2	$-0.806264 \cdot 10^{-1}$	$0.257500 \cdot 10^{-1}$	$0.38676 \cdot 10^{-2}$	$0.1492 \cdot 10^{-3}$
3	$0.306433 \cdot 10^{-1}$	$-0.47570 \cdot 10^{-2}$	$-0.17081 \cdot 10^{-2}$	$-0.14261 \cdot 10^{-2}$
4	$-0.131151 \cdot 10^{-1}$	$-0.46248 \cdot 10^{-2}$	$0.6454 \cdot 10^{-3}$	$0.12851 \cdot 10^{-2}$
5	$0.56122 \cdot 10^{-2}$	$0.65086 \cdot 10^{-2}$	$-0.2663 \cdot 10^{-3}$	$-0.7786 \cdot 10^{-3}$
6	$-0.26411 \cdot 10^{-2}$	$-0.53922 \cdot 10^{-2}$	$0.1333 \cdot 10^{-3}$	$0.3726 \cdot 10^{-3}$
7	$0.13968 \cdot 10^{-2}$	$0.36614 \cdot 10^{-2}$	$-0.785 \cdot 10^{-4}$	$-0.1410 \cdot 10^{-3}$
8	$-0.8178 \cdot 10^{-3}$	$-0.22120 \cdot 10^{-2}$	$0.488 \cdot 10^{-4}$	$0.346 \cdot 10^{-4}$
9	$0.5103 \cdot 10^{-3}$	$0.12268 \cdot 10^{-2}$	$-0.295 \cdot 10^{-4}$	$0.40 \cdot 10^{-5}$
10	$-0.3270 \cdot 10^{-3}$	$-0.6320 \cdot 10^{-3}$	$0.164 \cdot 10^{-4}$	$-0.126 \cdot 10^{-4}$
11	$0.2103 \cdot 10^{-3}$	$0.3026 \cdot 10^{-3}$	$-0.78 \cdot 10^{-5}$	$0.108 \cdot 10^{-4}$
12	$-0.1337 \cdot 10^{-3}$	$-0.1332 \cdot 10^{-3}$	$0.24 \cdot 10^{-5}$	$-0.69 \cdot 10^{-5}$

k	x_{k1}^2	x_{k2}^2	x_{k1}	x_{k2}
1	$0.2248 \cdot 10^{-3}$	$-0.275 \cdot 10^{-4}$	0.1930301	0.9577318
2	$-0.2088 \cdot 10^{-3}$	$-0.2548 \cdot 10^{-3}$	$-0.769676 \cdot 10^{-1}$	$0.256444 \cdot 10^{-1}$
3	$0.827 \cdot 10^{-4}$	$0.2028 \cdot 10^{-3}$	$0.290179 \cdot 10^{-1}$	$-0.59803 \cdot 10^{-2}$
4	$-0.315 \cdot 10^{-4}$	$-0.915 \cdot 10^{-4}$	$-0.125012 \cdot 10^{-1}$	$-0.34312 \cdot 10^{-2}$
5	$0.146 \cdot 10^{-4}$	$0.247 \cdot 10^{-4}$	$0.53605 \cdot 10^{-2}$	$0.57547 \cdot 10^{-2}$
6	$-0.79 \cdot 10^{-5}$	$0.7 \cdot 10^{-6}$	$-0.25157 \cdot 10^{-2}$	$-0.50189 \cdot 10^{-2}$
7	$0.44 \cdot 10^{-5}$	$-0.58 \cdot 10^{-5}$	$0.13227 \cdot 10^{-2}$	$0.35146 \cdot 10^{-2}$
8	$-0.23 \cdot 10^{-5}$	$0.43 \cdot 10^{-5}$	$-0.7713 \cdot 10^{-3}$	$-0.21731 \cdot 10^{-2}$
9	$0.11 \cdot 10^{-5}$	$-0.19 \cdot 10^{-5}$	$0.4819 \cdot 10^{-3}$	$0.12289 \cdot 10^{-2}$
10	$-0.5 \cdot 10^{-6}$	—	$-0.3111 \cdot 10^{-3}$	$-0.6446 \cdot 10^{-3}$
11	$0.2 \cdot 10^{-6}$	—	$0.2027 \cdot 10^{-3}$	$0.3134 \cdot 10^{-3}$
12	$-0.1 \cdot 10^{-6}$	—	$-0.1314 \cdot 10^{-3}$	$-0.1401 \cdot 10^{-3}$

Таблица 4

$\frac{z}{R}$	A_x	B_x	A_y	B_y	A_{xy}	B_{xy}
0	1.526	-2.611	-7.917	-10.316	—	—
0.02	1.544	-2.589	-7.952	-10.360	—	—
0.04	1.598	-2.520	-8.060	-10.495	—	—
0.06	1.692	-2.404	-8.243	-10.725	—	—
0.08	1.830	-2.232	-8.508	-11.059	—	—
0.10	2.003	-1.998	-8.849	-11.509	—	—
2.10	1.998	-1.999	-2.937	-6.653	—	—
$1.1+i$	-1.196	5.048	2.009	1.999	0.001	0.0004

В табл. 4 даны значения дополнительных напряжений в некоторых и в том числе наиболее характерных точках среды, выражаемые через величины A_x , B_x , A_y , B_y , A_{xy} , B_{xy} посредством формул

$$X_x = h_1(A_x + qB_x), \quad Y_y = h_1(A_y + qB_y), \quad X_y = h_1(A_{xy} + qB_{xy}) \quad (3.14)$$

В силу исходных условий (1.10) задаются между прочим составляющие напряжений

$$\begin{aligned} X_x &= 2h_1 - 2h_2, & X_y &= 0 & \text{при } z = a \mp R \\ Y_y &= 2h_1 + 2h_2, & X_y &= 0 & \text{при } z = a + iR \end{aligned}$$

Они весьма близки к величинам соответственных напряжений, значащимся в табл. 4. Это позволяет думать, что столь же близки к истинным напряжения, определяемые при помощи предлагаемого приближенного решения всюду в среде S .

Наконец, на основании табл. 3 найдем

$$\begin{aligned} \varphi_1^*(a - R) &= -R(0.1635 h_1 + 0.3279 h_2) \\ C_1 &= R(1.1738 h_1 + 0.9298 h_2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

и затем по формулам (3.10)

$$(X_x)_{\text{ср.}} = 1.722 h_1 - 2.444 h_2, \quad (Y_y)_{\text{ср.}} = -(8.262 h_1 + 10.702 h_2)$$

Примечание. Допустим, что среда S невесома, но подвержена на бесконечности в направлении координатных осей действию, вообще говоря, различных растягивающих или сжимающих напряжений. В этом случае искомые потенциалы Колодова-Мухелишвили имеют вид:

$$\varphi_1(z) = Bz + \varphi(z), \quad \psi_1(z) = B'z + \psi(z)$$

где B и B' — вещественные постоянные, связанные с величинами напряжений на бесконечности соотношениями

$$B = \frac{1}{4}(X_x^{(\infty)} + Y_y^{(\infty)}), \quad B' = \frac{1}{2}(Y_y^{(\infty)} - X_x^{(\infty)}), \quad X_y^{(\infty)} = 0$$

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны всюду в S , включая бесконечно удаленную точку, в которой примем их равными нулю. Считая попрежнему границы L_1 и L_2 свободными от внешних сил, будем иметь для нахождения $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ те же краевые условия (2.1) при

$$h_1 = -B, \quad h_2 = -\frac{1}{2} B'$$

В случае равностороннего растяжения ($X_x^{(\infty)} = Y_y^{(\infty)} = p$) имеем в наиболее опасной точке $z = a - R$ (при взятых в числовом примере размерах) полное напряжение $Y_y = 4.59 p$.

В случае одностороннего растяжения в направлении оси ординат ($X_x^{(\infty)} = 0$, $Y_y^{(\infty)} = p$) найдем, что в той же точке $Y_y = 5.173 p$.

Наконец, для одностороннего растяжения в направлении оси абсцисс ($X_x^{(\infty)} = p$, $Y_y^{(\infty)} = 0$) получим при том же z напряжение $Y_y = -0.583 p$.

Случай среды, симметрично ослабленной двумя круговыми отверстиями и подверженной одноосному или двухосному растяжению на бесконечности, рассматривался [3] К. Лингом способом, основанным на применении биполярных координат и существенно отличным от использованного выше. При этом численные расчеты проведены автором лишь для $\epsilon \leq 1/3$, повидимому, из-за недостаточной удовлетворительной сходимости рядов, выражающих искомые напряжения.

Поступила 27 VIII 1951

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.—Л. 1949.
2. Шерман Д. И. О напряжениях в весомай полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 3.
3. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л. 1951.