Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ОБ УПРУГОМ РАВНОВЕСИИ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ С НАЧАЛЬНЫМИ НЕПРАВИЛЬНОСТЯМИ В ФОРМЕ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Х. М. Муштари

(Казань)

В статье выведены основные зависимости теории упругого равновесия тонкой оболочки, срединная поверхность которой имеет начальные прогибы порядка толщины оболочки. В виде приложения этой теории рассматривается напряженное состояние сплюснутой оболочки вращения положительной гауссовой кривизны под действием внутреннего давления, имеющей местные начальные неправильности, причем выводится формула для определения верхнего предела критического давления, показывающая ошибочность аналогичной формулы И. В. Геккелера.

1. Обозначения и основные величины. Будем пользоваться обозначениями, принятыми в курсе теории упругости Лява. Пусть $A, B, k_1 = 1 / R_1$, $k_2 = 1 / R_2$ — соответствующие величины, характеризующие срединную поверхность S оболочки до деформации, отнесенную к линиям кривизны, без учета начальных отклонений от этой поверхности; w_0 — проекция на внутреннюю нормаль перемещения, приводящего эту поверхность к срединной поверхности S° рассматриваемой оболочки с начальными отклонениями от S; $\varepsilon_1^\circ, \varepsilon_2^\circ, \omega^\circ$ — соответствующие перемещению деформации поверхности S. Будем рассматривать лишь случаи, в которых это перемещение самое большее одного порядка с толщиной оболочки.

Тогда по формулам (16′) работы [1]

$$\varepsilon_1^\circ = \frac{1}{2} e_{13}^{\circ 2} - k_1 w_0, \qquad \varepsilon_2^\circ = \frac{1}{2} e_{23}^{\circ 2} - k_2 w_0, \qquad \omega^\circ = e_{13}^\circ e_{23}^\circ \tag{1.1}$$

где

$$e_{13}^\circ = \frac{1}{A} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha}, \qquad e_{23}^\circ = \frac{1}{B} \frac{\partial w_0}{\partial \beta}$$

Параметры изменения кривизны от начальных погибей можно определять по линейной теории

$$\varkappa_1^\circ = \frac{1}{A} \frac{\partial e_{13}^\circ}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} e_{23}^\circ \tag{1.2}$$

$$\varkappa_2^\circ = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} e_{13}^\circ + \frac{1}{B} \frac{\partial e_{23}^\circ}{\partial \beta}$$

$$\tau^\circ = \frac{1}{A} \frac{\partial e_{23}^\circ}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} e_{13}^\circ$$

Будем предполагать далее, что либо поверхность S мало отличается от плоскости, либо начальные отклонения от поверхности S быстро изменяются так, что производные от w_0 по безразмерным координатам α и β велики по сравнению с w_0. Это значит, что в случае непологой оболочки мы предполагаем наличие либо местных, быстро затухающих складок или ямок, либо искривлений, изменяющихся периодически с большой частотой. Таким образом, из рассмотрения исключаются медленно изменяющиеся неправильности, как, например, эллиптичность малого эксцентриситета цилиндрической оболочки кругового сечения. Будем также предполагать, что нагрузка, действующая на непологую оболочку, при данных граничных условиях не может вызывать деформации с превалирующим изгибом, т. е. рассматривать комбинацию безмоментного напряженного состояния со смешанным напряженным состоянием. Эти ограничения мало суживают область применимости излагаемой теории, но они существенны, так как позволяют пренебрегать влиянием тангенциального перемещения на повороты и искривления элементов срединной поверхности.

Пусть $u^{\mathrm{I}}, v^{\mathrm{I}}, w^{\mathrm{I}}$ — проекции перемещения от нагрузки на основные векторы поверхности S до потери устойчивости, u, v, w — проекции на те же оси добавочного перемещения при потере устойчивости (например, при хлопке). Тогда проекции полного перемещения на эти оси и соответствующие им удлинения суть

$$u^* = u^\circ + u^{\mathrm{I}} + u, \ldots, \qquad \varepsilon_1^* = \varepsilon_1^\circ + \varepsilon_1^{\mathrm{I}} + \varepsilon_1 = e_{11}^* + \frac{1}{2} e_{13}^{*2}$$

$$\varepsilon_2^* = e_{22}^* + \frac{1}{2} e_{23}^{*2}, \qquad \omega^* = e_{12}^* + e_{21}^* + e_{13}^* e_{23}^*, \qquad \varkappa_1^{\mathrm{I}} = \varkappa_1^\circ + \varkappa_1^{\mathrm{I}} + \varkappa_1$$

где

$$e_{km}^* = e_{km}^\circ + e_{km} + e_{km} \qquad (k, m = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

$$e_{11}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{A}\frac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial \alpha} + \frac{v^{\mathrm{I}}}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} - k_1 w^{\mathrm{I}}, \quad e_{12}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{A}\frac{\partial v^{\mathrm{I}}}{\partial \alpha} - \frac{u^{\mathrm{I}}}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad e_{13}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{A}\frac{\partial w^{\mathrm{I}}}{\partial \alpha}$$

$$e_{21}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{B}\frac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial \beta} - \frac{v^{\mathrm{I}}}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad e_{22}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{B}\frac{\partial v^{\mathrm{I}}}{\partial \beta} + \frac{u^{\mathrm{I}}}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} - w^{\mathrm{I}} k_2, \quad e_{23}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{B}\frac{\partial w^{\mathrm{I}}}{\partial \beta}$$

Деформации e_{km} выражаются аналогично через u, v, w. Следовательно, удлинения до потери устойчивости, зависящие от нагрузки, определяются формулами

$$\begin{gathered} \varepsilon_1^{\mathrm{I}} = e_{11}^{\mathrm{I}} + \frac{1}{2} e_{13}^{\mathrm{I}2} + e_{13}^{\mathrm{I}} e_{13}^\circ \\ \varepsilon_2^{\mathrm{I}} = e_{22}^{\mathrm{I}} + \frac{1}{2} e_{23}^{\mathrm{I}2} + e_{23}^{\mathrm{I}} e_{23}^\circ \\ \omega^{\mathrm{I}} = e_{12}^{\mathrm{I}} + e_{21}^{\mathrm{I}} + e_{13}^{\mathrm{I}} e_{23}^{\mathrm{I}} + e_{13}^{\mathrm{I}} e_{23}^\circ + e_{23}^{\mathrm{I}} e_{13}^\circ \end{gathered} \tag{1.4}$$

Так же находим

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = e_{11} + \frac{1}{2} e_{13}^2 + e_{13}(e_{13}^\circ + e_{13}^{\mathrm{I}}), \\ \varepsilon_2 = e_{22} + \frac{1}{2} e_{23}^2 + e_{23}(e_{23}^\circ + e_{23}^{\mathrm{I}}) \\ \omega = e_{12} + e_{21} + e_{13}e_{23} + e_{13}(e_{23}^\circ + e_{23}^{\mathrm{I}}) + e_{23}(e_{13}^\circ + e_{13}^{\mathrm{I}}) \end{gathered} \tag{1.5}$$

Изменения кривизны и кручения $\varkappa_1^{\mathrm{I}}, \ldots, \tau^{\mathrm{I}}$ определяем по формулам (1.2), заменяя в них $e_{13}^\circ, e_{23}^\circ$ соответственно через $e_{13}^{\mathrm{I}}, e_{23}^{\mathrm{I}}$ и e_{13}, e_{23}.

Мембранные усилия и изгибающие моменты до потери устойчивости будут

$$T_1{}^{\mathrm{I}} = K(\varepsilon_1{}^{\mathrm{I}} + \nu\varepsilon_2{}^{\mathrm{I}}), \qquad T_2{}^{\mathrm{I}} = K(\varepsilon_2{}^{\mathrm{I}} + \nu\varepsilon_1{}^{\mathrm{I}}), \qquad S^{\mathrm{I}} = \frac{K(1-\nu)}{2}\,\omega^{\mathrm{I}}$$
$$G_1{}^{\mathrm{I}} = -D(\varkappa_1{}^{\mathrm{I}} + \nu\varkappa_2{}^{\mathrm{I}}), \quad G_2{}^{\mathrm{I}} = -D(\varkappa_2{}^{\mathrm{I}} + \nu\varkappa_1{}^{\mathrm{I}}), \quad H^{\mathrm{I}} = -D(1-\nu)\,\tau^{\mathrm{I}} \qquad (1.6)$$

где

$$K = \frac{2Eh}{1-\nu^2}, \qquad D = \frac{2}{3}\,\frac{Eh^3}{1-\nu^2}, \qquad 2h \text{ — толщина оболочки}$$

Так же определяем добавочные усилия и моменты:

$$T_1 = K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \ldots, \qquad H = -D(1-\nu)\,\tau \qquad (1.7)$$

2. Уравнения равновесия и условия совместности деформаций. Пренебрегая попрежнему удлинениями по сравнению с единицей, из общих уравнений (2.1) и (2.2) статьи [2] легко выводим следующие уравнения равновесия в линиях кривизны:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1{}^{\mathrm{I}}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AS^{\mathrm{I}}) + S^{\mathrm{I}}\frac{\partial A}{\partial\beta} - T_2{}^{\mathrm{I}}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + ABX = 0 \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BS^{\mathrm{I}}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AT_1{}^{\mathrm{I}}) - \frac{\partial A}{\partial\beta}T_1{}^{\mathrm{I}} + S^{\mathrm{I}}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + ABY = 0 \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BN_1{}^{\mathrm{I}}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AN_2{}^{\mathrm{I}}) + AB\{T_1{}^{\mathrm{I}}(k_1 + \varkappa_1{}^{\circ} + \varkappa_1{}^{\mathrm{I}}) +$$
$$+ T_2{}^{\mathrm{I}}(k_2 + \varkappa_2{}^{\circ} + \varkappa_2{}^{\mathrm{I}}) + 2(\tau^{\circ} + \tau^{\mathrm{I}})S^{\mathrm{I}}\} + ABZ = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BH^{\mathrm{I}}) - \frac{\partial}{\partial\beta}(AG_2{}^{\mathrm{I}}) + G_1{}^{\mathrm{I}}\frac{\partial A}{\partial\beta} + H^{\mathrm{I}}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + N_2{}^{\mathrm{I}}AB = 0 \qquad (2.3)$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BG_1{}^{\mathrm{I}}) - \frac{\partial}{\partial\beta}(AH^{\mathrm{I}}) - H^{\mathrm{I}}\frac{\partial A}{\partial\beta} - G_2{}^{\mathrm{I}}\frac{\partial B}{\partial\alpha} - N_1{}^{\mathrm{I}}AB = 0$$

В статье [2] было дано подробное обоснование упрощений, аналогичных тем, которые сделаны при выводе этих уравнений. Не останавливаясь здесь на этом вопросе, отметим лишь, что в уравнениях (2.1) и (2.2) мы пренебрегли членами, содержащими произведения перерезывающих сил па главные кривизны, так как они являются величинами порядка $Dk_1(\partial\varkappa_1{}^{\mathrm{I}} / \partial\alpha)$, а при наших предположениях о характере рассматриваемых деформаций $h\varkappa_1{}^{\mathrm{I}}$ меньше или одного порядка с $\varepsilon_1{}^{\mathrm{I}}, \ldots$, поэтому эти члены содержат малые множители h / R_1 или меньшие их по сравнению с остальными членами уравнений. Точно так же, считая удлинения малыми, мы коэффициенты первой квадратичной формы деформированной срединной поверхности заменили соответствующими коэффициентами недеформированной поверхности.

При этом из двух последних уравнений, учитывая формулы (1.2) и (1.6), находим выражения перерезывающих сил через перемещение:

$$N_1{}^{\mathrm{I}} = -\frac{D}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\nabla^2 w^{\mathrm{I}}, \qquad N_2{}^{\mathrm{I}} = -\frac{D}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\nabla^2 w^{\mathrm{I}} \qquad (2.4)$$

Здесь и далее

$$\nabla^2 (\ ) = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right](\ ) \tag{2.5}$$

Добавочные перемещения, появляющиеся при потере устойчивости, определяем при помощи формул (1.5) и (1.7) из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AS) + S\frac{\partial A}{\partial\beta} - T_2\frac{\partial B}{\partial\alpha} = 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BS) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AT_2) - T_1\frac{\partial A}{\partial\beta} + S\frac{\partial B}{\partial\alpha} = 0 \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\alpha}(BN_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AN_2) + AB\{T_1{}^{\mathrm{I}}\varkappa_1 + T_2{}^{\mathrm{I}}\varkappa_2 + 2S^{\mathrm{I}}\tau + \\ + T_1(k_1 + \varkappa_1{}^\circ + \varkappa_1{}^{\mathrm{I}} + \varkappa_1) + T_2(k_2 + \varkappa_2{}^\circ + \varkappa_2{}^{\mathrm{I}} + \varkappa_2) + 2S(\tau^\circ + \tau' + \tau)\} = 0\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$N_1 = -\frac{D}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\nabla^2 w, \qquad N_2 = -\frac{D}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\nabla^2 w$$

Если оболочка не имеет точек, в которых гауссова кривизна поверхности S отрицательна, для приложений удобнее напряженное состояние I рассматривать как сумму безмоментного состояния и напряженного состояния типа краевого эффекта. Проекции соответствующих перемещений будем обозначать через $u_б{}^{\mathrm{I}}, v_б{}^{\mathrm{I}}, w_б{}^{\mathrm{I}}$ и $u_k{}^{\mathrm{I}}, v_k{}^{\mathrm{I}}, w_k{}^{\mathrm{I}}$. Таким образом,

$$\begin{gathered} u^{\mathrm{I}} = u_б{}^{\mathrm{I}} + u_k{}^{\mathrm{I}}, \ldots, \\ T_1{}^{\mathrm{I}} = T_{1б}{}^{\mathrm{I}} + T_{1k}{}^{\mathrm{I}}, \quad T_{1б}{}^{\mathrm{I}} = K(\varepsilon_{1б}{}^{\mathrm{I}} + \nu\varepsilon_{2б}{}^{\mathrm{I}}), \quad T_{1k}{}^{\mathrm{I}} = K(\varepsilon_{1k}{}^{\mathrm{I}} + \nu\varepsilon_{2k}{}^{\mathrm{I}}), \ldots \end{gathered} \tag{2.9}$$

При этом удлинения, соответствующие безмоментному состоянию, определяем по обычной линейной теории, а удлинения краевого эффекта выражаются формулами типа (1.4), в которых $u^{\mathrm{I}}, \ldots$ следует заменить через $u_k{}^{\mathrm{I}}, v_k{}^{\mathrm{I}}, w_k{}^{\mathrm{I}}$. Изменениями кривизны в безмоментном состоянии пренебрегаем, поэтому по формулам типа (1.2)

$$\begin{gathered} \varkappa_1{}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w_k{}^{\mathrm{I}}}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w_k{}^{\mathrm{I}}}{\partial\beta} \\ \varkappa_2{}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w_k{}^{\mathrm{I}}}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w_k{}^{\mathrm{I}}}{\partial\alpha} \\ \tau^{\mathrm{I}} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w_k{}^{\mathrm{I}}}{\partial\beta}\right) - \frac{1}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w_k{}^{\mathrm{I}}}{\partial\alpha} \end{gathered} \tag{2.10}$$

Учитывая уравнения равновесия для безмоментного состояния, из (2.1) — (2.3) получаем уравнения для определения напряженного состояния типа краевого эффекта:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_{1k}{}^{\mathrm{I}}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AS_k{}^{\mathrm{I}}) + S_k{}^{\mathrm{I}}\frac{\partial A}{\partial\beta} - T_{2k}{}^{\mathrm{I}}\frac{\partial B}{\partial\alpha} = 0 \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BS_k{}^{\mathrm{I}}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AT_{2k}{}^{\mathrm{I}}) - \frac{\partial A}{\partial\beta}T_{1k}{}^{\mathrm{I}} + S_k{}^{\mathrm{I}}\frac{\partial B}{\partial\alpha} = 0 \tag{2.12}$$

$$- D\nabla^2\nabla^2 w_k{}^{\mathrm{I}} + T_{1k}{}^{\mathrm{I}} k_1 + T_{2k}{}^{\mathrm{I}} k_2 + \tag{2.13}$$

$$+ (T_{1б}{}^{\mathrm{I}} + T_{1k}{}^{\mathrm{I}})\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)(w^\circ + w_k{}^{\mathrm{I}}) +$$

$$+ (T_{2б}{}^{\mathrm{I}} + T_{2k}{}^{\mathrm{I}})\left(\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)(w^\circ + w_k{}^{\mathrm{I}}) +$$

$$+ 2(S_б{}^{\mathrm{I}} + S_k{}^{\mathrm{I}})\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{1}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)(w^\circ + w_k{}^{\mathrm{I}}) = 0$$

Так как деформации рассматриваемого типа быстро изменяются, перемещениями можно пренебречь по сравнению со вторыми производными их по безразмерным координатам. Поэтому, допуская погрешность, присущую теории тонких оболочек, можем удовлетворить уравнениям (2.11) и (2.12), полагая

$$T_{1k}{}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\Phi_k{}^{\mathrm{I}}}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial\Phi_k{}^{\mathrm{I}}}{\partial\alpha} \tag{2.14}$$

$$T_{2k}{}^{\mathrm{I}} = \left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\Phi_k{}^{\mathrm{I}}$$

$$S_k{}^{\mathrm{I}} = \left(\frac{1}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\Phi^{k\mathrm{I}}$$

Принятые нами выражения полных удлинений ε_1^*, ε_2^*, ω^* и изменений кривизны $\varkappa_1^*$, $\varkappa_2^*$, τ^* при сделанных нами предположениях о форме начальных отклонений от поверхности приближенно удовлетворяют условиям совместности деформаций (2.7) статьи [2]. А условие совместности (2.8) той же статьи после некоторых вычислений с учетом формул (2.14) может быть приведено к уравнению

$$\frac{1}{2Eh}\nabla^2\nabla^2\Phi_k{}^{\mathrm{I}} + k_1\varkappa_2{}^{\mathrm{I}} + k_2\varkappa_1{}^{\mathrm{I}} + \varkappa_1{}^{\mathrm{I}}\varkappa_2{}^{\mathrm{I}} - \tau^{\mathrm{I}2} + \varkappa_1{}^0\varkappa_2{}^{\mathrm{I}} + \varkappa_2{}^0\varkappa_1{}^{\mathrm{I}} - 2\tau^0\tau^{\mathrm{I}} = 0 \tag{2.15}$$

Система уравнений (2.13) и (2.15) может служить для определения функции напряжения $\Phi_k{}^{\mathrm{I}}$ и нормального перемещения $w_k{}^{\mathrm{I}}$, соответствующих деформациям типа краевого эффекта. Если оболочка пологая и $X = Y = 0$, можно ввести функцию напряжения и без разложения напряженного состояния на безмоментную часть и краевой эффект. В этом случае уравнения (2.1) и (2.2) приближенно удовлетворяем, полагая

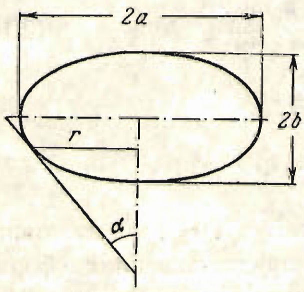
$$T_1{}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{B}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\Phi^{\mathrm{I}}$$

$$T_2{}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{B^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\Phi^{\mathrm{I}} \tag{2.16}$$

$$S^{\mathrm{I}} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\Phi^{\mathrm{I}}$$

Условие совместности (2.15) также имеет место при замене в нем $\Phi_k{}^{\mathrm{I}}$ на Φ^{I}. Оно вместе с уравнением (2.3) образует систему уравнений, определяющих Φ^{I} и w^{I}. В частном случае, когда начальные неправильности срединной поверхности пренебрежимо малы и все величины выражены в декартовых прямоугольных координатах, эти уравнения переходят в уравнения (19.9³) и (19.10³) монографии В. З. Власова [3], если в последних знаки членов, содержащих k_1 и k_2, изменить на обратные и если учесть, что в данной работе w^{I} считается положительной при направлении нормального перемещения в сторону вогнутости поверхности. В правильности приведенных уравнений и ошибочности, например, уравнения (19.9³) можно убедиться, проследив его вывод. В самом деле, уравнение (19.9³) получено путем исключения из формул (19.1³) величин u и v, причем при переходе к формуле (19.2³) автор допустил описку, результаты которой перешли и на последующие формулы § 19.

3. Определение напряженного состояния сплюснутой оболочки вращения положительной гауссовой кривизны с малыми неправильностями под действием внутреннего давления (фиг. 1). В этом случае



Фиг. 1

$$X = Y = 0, \quad Z = -p, \quad A = R_1$$

$$B = r = R_2 \cos\alpha, \qquad \frac{\partial A}{\partial \beta} = 0 \tag{3.1}$$

Введем обозначения

$$x = R_1 \alpha, \qquad \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial y}$$

Будем предполагать, что неправильности формы в виде складок или ямок расположены в узкой зоне

$$x_c - \delta x \leqslant x \leqslant x_c + \delta x$$

далекой от полюсов. Тогда и деформации типа краевого эффекта будут иметь место также в узкой зоне.

Пусть, кроме того, протяженность складки по параллели значительно меньше ее протяженности по меридиану, так, что если

$$\frac{\partial w^{\circ}}{\partial x} \sim m w^{\circ}, \qquad \frac{\partial w^{\circ}}{\partial y} \sim n w^{\circ}$$

где символ $\sim$ обозначает одинаковость порядка сравниваемых величин, то

$$m^2 \ll n^2 \tag{3.2}$$

Кроме того, очевидно,

$$\frac{\partial w_k^{\mathrm{I}}}{\partial x} \sim m w_k^{\mathrm{I}}, \qquad \frac{\partial w_k^{\mathrm{I}}}{\partial y} \sim n w_k^{\mathrm{I}}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_k^{\mathrm{I}}}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 \Phi_k^{\mathrm{I}}}{\partial y^2}$$

Поэтому уравнение (2.15) может быть заменено приближенным линейным уравнением

$$\frac{1}{2Eh}\frac{\partial^4 \Phi_k^{\mathrm{I}}}{\partial y^4} \approx -k_1 \frac{\partial^2 w_k^{\mathrm{I}}}{\partial y^2}$$

из которого следует, что

$$\frac{\partial^2 \Phi_k^{\mathrm{I}}}{\partial y^2} \approx -2Ehk_1 w_k^{\mathrm{I}} \tag{3.3}$$

Подставляя это выражение в (2.13) и пренебрегая попрежнему m^2 / n^2 по сравнению с единицей, получаем приближенное уравнение

$$-D\frac{\partial^4 w_k{}^{\mathrm{I}}}{\partial y^4} - \frac{2Eh}{R_1{}^2} w_k{}^{\mathrm{I}} + T_{2б}{}^{\mathrm{I}}\left(\frac{\partial^2 w^\circ}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_k{}^{\mathrm{I}}}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (3.4)$$

Будем предполагать, что начальное отклонение оболочки вращения косинусоидальное, а именно

$$w^\circ = W^\circ f(x) \cos \frac{n_0 B}{\sqrt{R_1}} \beta \qquad (3.5)$$

где f — функция, затухающая к краям зоны краевого эффекта, причем $f(x_c) = 1$. Тогда деформация под действием нагрузки будет определяться перемещениями

$$w_k{}^{\mathrm{I}} = W_k f(x) \cos \frac{n_0 B}{\sqrt{R_1}} \beta \qquad (3.6)$$

где W_k — искомая постоянная величина. При этом для удовлетворения уравнения (3.4) необходимо выполнение равенства

$$Dn_0{}^4 + 2Eh + T_{2б}{}^{\mathrm{I}} n_0{}^2 \left(1 + \frac{W^\circ}{W_k}\right) R_1 = 0 \qquad (3.7)$$

Но в оболочке вращения

$$T_{2б}{}^{\mathrm{I}} = pR_2\left(1 - \frac{R_2}{2R_1}\right), \qquad T_{1б}{}^{\mathrm{I}} = \frac{pR_2}{2} \qquad (3.8)$$

Поэтому для возможности удовлетворения уравнения (3.7) необходимо, чтобы величина

$$\psi = -R_2\left(R_1 - \frac{R_2}{2}\right) = -\frac{T_{2б}{}^{\mathrm{I}}}{p} R_1 = \mathrm{const}$$

В случае эллипсоидальной оболочки

$$R_1 = \frac{a^2}{b} Q^3, \qquad R_2 = \frac{a^2}{b} Q, \qquad Q = 1 : \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 \alpha\right)^{1/2}$$

В зоне $0 \leqslant \alpha \leqslant 30^\circ$ величина ψ изменяется очень медленно. Поэтому, если неправильности формы расположены в этой зоне, уравнение (3.7) приближенно удовлетворяется при

$$\psi = \psi_c = \psi_c(x_c)$$

Таким образом, приходим к характеристическому уравнению

$$p\psi_c\left(1 + \frac{W^\circ}{W_k}\right) = Dn_0{}^2 + \frac{2Eh}{n_0{}^2} \qquad (3.9)$$

При данных W° и W_k минимальному значению p соответствует

$$n_0{}^2 = \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2}}$$

причем

$$p_{\min} = \frac{2\sqrt{D\cdot 2Eh}}{\psi_c\,(1 + W^\circ / W_k)}, \qquad T_{2б,\,c}{}^{\mathrm{I}} = -\frac{2}{R_{1,\,c}}\,\frac{\sqrt{2EhD}}{(1 + W^\circ / W_k)} \qquad (3.10)$$

При

$$W^\circ : W_k \to 0, \qquad T_{2б,\,c}{}^{\mathrm{I}} \to -\frac{2}{R_{1,\,c}}\sqrt{2EhD} \qquad (3.11)$$

Если оболочка сплюснута так, что $b < a$, то в экваториальной зоне $T_{2б}{}^{\mathrm{I}} < 0$, $\psi_c > 0$ и формулы (3.10) возможны при $p_{\min} > 0$.

Тогда возможна потеря устойчивости оболочки под действием внутреннего давления. Критическое значение окружного усилия, определяемое по формуле (3.11), нами было найдено ранее иными методами путем детального исследования всех возможных форм выпучивания оболочки. Не останавливаясь здесь на изложении этих результатов, отметим лишь, что правильное выражение верхнего предела критического внутреннего давления нами дается впервые, ибо соответствующая формула И. В. Геккелера [4], полученная им путем рассмотрения экваториальной зоны эллипсоидальной оболочки как сжатого кольца, находящегося под действием упругого поперечного основания, ошибочна ввиду неправильного определения им коэффициента постели упругого основания. Этот коэффициент И. В. Геккелер в рассматриваемом им случае считает таким же, как и в случае цилиндрической полоски, выделенной из цилиндрической оболочки и находящейся под воздействием реакции остальной части этой оболочки. В действительности же действие на сжатую зону, оказываемое остальной частью оболочки двоякой кривизны, гораздо сложнее, чем в случае цилиндрической оболочки.

В заключение отметим, что ошибочная формула Геккелера приведена без каких-либо исправлений и в работе А. Н. Динника [5].

Поступила 8 III 1951

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. Известия физ.-мат. общества. Казань. 1938.
2. Муштари Х. М. Качественное исследование напряженного состояния упругой оболочки при малых деформациях и произвольных смещениях. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 2.
3. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат. 1949. § 19.
4. Геккелер И. В. Статика упругого тела. ГИТТЛ. 1933.
5. Динник А. Н. Устойчивость упругих систем. Изд. АН СССР. 1950.