Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И ДЕФОРМАЦИЯХ

К. З. Галимов

(Казань)

В первых двух параграфах настоящей статьи дано краткое изложение нелинейной теории оболочек при помощи обычных несимметрических тензоров тангенциальных усилий и моментов $T_*^{\alpha\beta}$ и $H^{\alpha\beta}$. При малых деформациях тонкой оболочки эти тензоры в пределах точности гипотезы Кирхгофа можно считать симметричными: $T_*^{\alpha\beta}=T_*^{\beta\alpha}$, $H^{\alpha\beta}=H^{\beta\alpha}$. В случае оболочки средней толщины это упрощение приводит к погрешности порядка $\sqrt{h/R}$ по сравнению с единицей и еще к большой погрешности для оболочек, материал которых не следует линейному закону Гука. Нарушение же симметричности тензоров усилий и моментов вызывает излишние затруднения при формулировке нелинейных соотношений упругости, общих теорем нелинейной теории оболочек, оценке точности приближенных методов и т. д. Поэтому в § 3 этой работы введены особые тензоры усилий и моментов, симметрические при любых деформациях. При этом вполне естественно пользоваться гипотезой о распределении касательных напряжений по толщине оболочки, а не геометрической гипотезой. При помощи введенных симметрических тензоров усилий и моментов удается найти общее выражение потенциала деформации и выразить общие интегралы однородных уравнений равновесия не через четыре функции, как это делается обычно, а через три.

В § 4 выведены общие соотношения упругости для изотропной оболочки.

В § 5 показано, что уравнения Галеркина в теории конечных деформаций оболочки непосредственно не связаны с принципом минимума потенциальной энергии, как это имеет место в линейной теории.

В § 6 введен функционал R, имеющий стационарное значение при выполнении статических граничных условий и уравнений равновесия. Для упрощенных уравнений соответствующий функционал рассмотрен в статье [1]. Так как при выводе (6.22) гипотеза Кирхгофа не используется и деформации считаются произвольными, то вариационное уравнение $\delta R=0$ применимо к оболочкам средней толщины, а также к физически нелинейным задачам. В функционале (6.22), кроме усилий и моментов, варьируются еще величины $e_{\alpha\beta}$ и ω_α, которые удовлетворяют трем геометрическим тождествам, не являющимся условиями совместности конечных деформаций. Поэтому смежное напряженное состояние не обязано удовлетворять условиям неразрывности конечных деформаций и вариационный принцип $\delta R=0$ по физическому смыслу аналогичен принципу Кастильяно в линейной теории упругости.

В § 7 функционал R преобразован к виду (7.11), не содержащему перемещения.

§ 1. Первый и второй тензоры деформации поверхности. Срединную поверхность S недеформированной оболочки отнесем к гауссовым координатам x^1, x^2 и введем обозначения: $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор точки (x^1, x^2), $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ — координатные векторы поверхности S, $\mathbf{m}$ — единичный вектор нормали к S в точке (x^1, x^2), $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ — компоненты первого и второго метрических тензоров поверхности S, при этом

$$\boldsymbol{\rho}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial x^\alpha}, \quad a_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\rho}_\alpha \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta, \quad b_{\alpha\beta} = -\mathbf{m}_\alpha \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta = -\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^\alpha} \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta$$

$c_{\alpha\beta}$ — компоненты дискриминантного тензора:

$$c_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{\rho}_\alpha \times \boldsymbol{\rho}_\beta)\,\mathbf{m}, \quad c_{\alpha\alpha} = 0, \quad c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a}, \quad a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

Для правой ориентации триэдра $\boldsymbol{\rho}_1\boldsymbol{\rho}_2\mathbf{m}$ имеем

$$\boldsymbol{\rho}_\alpha \times \boldsymbol{\rho}_\beta = c_{\alpha\beta}\mathbf{m}, \qquad \mathbf{m} \times \boldsymbol{\rho}_\alpha = c_{\alpha\beta}\boldsymbol{\rho}^\beta \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\rho}_\beta = a^{\alpha\beta}\boldsymbol{\rho}_\alpha$ — векторы взаимного базиса, $a^{\alpha\beta} = c^{\alpha\pi}c^{\beta\lambda}a_{\pi\lambda}$.

Для векторов ρ_α и $\mathbf{m}$ имеют место формулы

$$\nabla_\alpha \boldsymbol{\rho}_\beta = b_{\alpha\beta}\mathbf{m}, \qquad \nabla_\alpha \boldsymbol{\rho}^\beta = \mathbf{m} b_\alpha^\beta, \qquad \mathbf{m}_\alpha = -b_\alpha^\beta\, \boldsymbol{\rho}_\beta \tag{1.2}$$

Здесь и далее ∇ — знак ковариантного дифференцирования по $a_{\alpha\beta}$

Пусть C — контур срединной поверхности, s — его дуговая абсцисса, $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к C. Компоненты $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ в системе координат x^1, x^2 на S определяются формулами

$$n_\alpha ds = c_{\alpha\beta}dx^\beta, \qquad \tau^\alpha ds = dx^\alpha, \qquad n^\alpha = c^{\alpha\beta}\tau_\beta, \qquad \tau_\beta = c^{\alpha}_{\cdot\beta}\, n_\alpha \tag{1.3}$$

В дальнейшем все геометрические и физические величины, относящиеся к деформированной поверхности S^*, будут обозначены со звездочкой. Приведенные выше формулы имеют место и для деформированной поверхности, если заменить в них $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}_\alpha$, $\mathbf{m}$, $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}, n_\alpha, \tau_\alpha, ds, \ldots$ на $\boldsymbol{\rho}_*, \boldsymbol{\rho}_\alpha^*, \mathbf{m}_*, a_{\alpha\beta}^*, b_{\alpha\beta}^*, c_{\alpha\beta}^*, n_\alpha^*, \tau_\alpha^*, ds^*, \ldots$

Пусть $\mathbf{v}$ — вектор перемещения точки (x^1, x^2) поверхности S, $\boldsymbol{\rho}^* = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}$ — радиус-вектор этой точки после деформации, т. е. точки (x^1, x^2) поверхности S^*. Компоненты первого тензора (p) и второго тензора (q) деформации определяются формулами [2]

$$2p_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^* - a_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha} + a^{\pi\lambda}e_{\alpha\pi}e_{\beta\lambda} + \omega_\alpha\omega_\beta, \; q_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}^* - b_{\alpha\beta} \tag{1.4}$$

$$b_{\alpha\beta}^* = -\mathbf{m}_\alpha^* \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta^* = \sqrt{\frac{a}{a_*}}\,[E\,(b_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}) + E_\gamma \Omega^\gamma_{\alpha\beta}] \tag{1.5}$$

где

$$e_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta - w b_{\alpha\beta}, \qquad \omega_\alpha = \nabla_\alpha \omega + b_\alpha^\lambda\, v_\lambda, \qquad \mathbf{v} = \rho^\alpha v_\alpha + \mathbf{m}w \tag{1.6}$$

$$B_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \omega_\beta + e^\gamma_{\beta\cdot}\, b_{\alpha\gamma}, \qquad \Omega^\gamma_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha e^\gamma_{\beta\cdot} - \omega_\beta b^\gamma_\alpha \tag{1.7}$$

$$2E = c^{\alpha\beta} c_{\pi\lambda}\,(\delta^\pi_\alpha + e^\pi_{\alpha\cdot})\,(\delta^\lambda_\beta + e^\lambda_{\beta\cdot}), \qquad E_\alpha = c^{\pi\nu}c_{\alpha\beta}\omega_\gamma\,(\delta^\beta_\pi + e^\beta_{\pi\cdot}) \tag{1.8}$$

$$a^* = a\,(1 + 2p_1 + 4p_2), \qquad p_1 = a^{\alpha\beta}p_{\alpha\beta}, \qquad 2p_2 = c^{\alpha\beta}\,c^{\pi\lambda}p_{\alpha\pi}p_{\beta\lambda} \tag{1.9}$$

Для коэффициентов связности $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ и $\overset{*}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}$ поверхностей S и S^* существуют соотношения

$$\Gamma^{*\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + a_*^{\gamma\lambda}P_{\lambda,\,\alpha\beta} \quad (P_{\lambda,\,\alpha\beta} = \nabla_\alpha p_{\beta\lambda} + \nabla_\beta p_{\alpha\lambda} - \nabla_\lambda p_{\alpha\beta}) \tag{1.10}$$

Тензор $P_{\gamma,\,\alpha\beta}$ зависит от углов поворота элемента срединной поверхности. Действительно, представляя $\nabla_\alpha^* \rho_\beta^* = b_{\alpha\beta}^*\mathbf{m}_*$ (где ∇^* — знак ковариантного дифференцирования относительно $a_{\alpha\beta}{}^*$) в виде

$$\nabla_\alpha \boldsymbol{\rho}_\beta{}^* = \mathbf{m}_* \, b_{\alpha\beta}{}^* + a_*{}^{\gamma\lambda} P_{\lambda,\,\alpha\beta} \boldsymbol{\rho}_\gamma{}^*$$

имеем

$$P_{\gamma,\,\alpha\beta} = \boldsymbol{\rho}_\gamma{}^* \cdot \nabla_\alpha \boldsymbol{\rho}_\beta{}^* = \boldsymbol{\rho}_\gamma{}^* (\nabla_\alpha \boldsymbol{\rho}_\beta + \nabla_\alpha \nabla_\beta \mathbf{v}) = (\boldsymbol{\rho}_\gamma + \boldsymbol{\rho}_\lambda e^{\lambda}_{\gamma\cdot} + \mathbf{m}\omega_\gamma) \cdot (\mathbf{m} b_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta \mathbf{v})$$

Отсюда находим

$$P_{\gamma,\,\alpha\beta} = \omega_\gamma (b_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}) + \Omega_{\alpha\beta\cdot}{}^{\lambda} (a_{\gamma\lambda} + e_{\gamma\lambda}) \tag{1.11}$$

§ 2. Уравнения равновесия. Пусть оболочка находится в состоянии равновесия под действием заданных сил. Сообщим ее точкам бесконечно малое возможное перемещение, характеризуемое вектором $\delta\mathbf{u}$, совместимое со связями, наложенными на оболочку. Тогда начало возможных перемещений для трехмерного тела выражается соотношением

$$\delta A = \iiint_\Omega \mathbf{F}_* \cdot \delta\mathbf{u}\, d\Omega + \iint_\Pi \mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{u}\, d\Pi = \iiint_\Omega \sigma^{ik} \delta\varepsilon_{ik}\, d\Omega = \iiint_\Omega \sigma^{ik} \overline{r_i}{}^* \boldsymbol{\zeta}_i{}^* \cdot \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial x^k} d\Omega \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{F}_*$ — сила, отнесенная к единице деформированного объема Ω, $\mathbf{p}$ — поверхностная сила, приходящаяся на единицу деформированной поверхности Π, ε_{ik} — компоненты тензора конечных деформаций.

Применяя (2.1) к деформированной оболочке, получим

$$\delta A = \iint_{\sigma^*} (\mathbf{X}_* \cdot \delta\mathbf{v} + C_*{}^{\alpha\beta} \boldsymbol{\rho}_\alpha{}^* M_\beta{}^* \cdot \delta\mathbf{m}_*)\, d\sigma^* + \int_{C^*} (\Phi_* \cdot \delta\mathbf{v} + C_*{}^{\alpha\beta} \boldsymbol{\rho}_\alpha{}^* \cdot C_* \tau_\beta{}^* \delta\mathbf{m}_*)\, ds^* =$$

$$= \iint_{\sigma^*} (T_*{}^{\alpha\beta} \delta p_{\alpha\beta} + {}^*b^\alpha_\gamma \; H^{\gamma\beta} \delta p_{\alpha\beta} - H^{\alpha\beta} \delta q_{\alpha\beta})\, d\sigma^* \tag{2.2}$$

Здесь $T_*{}^{\alpha\beta}$ и $H^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора тангенциальных усилий и моментов:

$$T_*{}^{\alpha\beta} = \int_{-h(-)}^{h(+)} \sqrt{\frac{g_*}{a^*}}\, \sigma^{\alpha\lambda} (\delta^\beta_\lambda - z b^{*\beta}{}_\lambda)\, dz, \qquad N^\alpha = \int_{-h(-)}^{h(+)} \sqrt{\frac{g_*}{a^*}}\, \sigma^{\alpha 3} dz$$

$$H^{\alpha\beta} = \int_{-h(-)}^{h(+)} \sqrt{\frac{g_*}{a^*}}\, \sigma^{\alpha\lambda} (\delta^\beta_\lambda - z^* b^\beta_\lambda)\, z\, dz \tag{2.3}$$

Далее z — координата, нормальная к S^*; $h(+)$, $h(-)$ — уравнения ограничивающих поверхностей; $\mathbf{X}_*$, $\mathbf{M}_*$ — векторы внешних усилий и моментов с компонентами $X_*{}^\alpha$ и $M_*{}^\alpha$ в системе координат деформированной поверхности; $X_*{}^3 = \mathbf{X}_* \mathbf{m}_*$ — отнесенные к единице площади деформированной поверхности σ^*; $\boldsymbol{\Phi}^*$ — вектор контурной нагрузки, отнесенный к единице длины деформированного контура C_*; G^* — изгибающий момент на этом контуре.

Из соотношения (2.2) вытекают уравнения равновесия

$$\begin{gathered} \nabla_\alpha{}^* T_*{}^{\alpha\beta} - {}^*b^\beta_\alpha \, N_*{}^\alpha + X_*{}^\beta = 0, \qquad \nabla_\alpha{}^* N_*{}^\alpha + b_{\alpha\beta}{}^* T_*{}^{\alpha\beta} + X_*{}^3 = 0 \\ \nabla_\alpha{}^* H^{\alpha\beta} - N_*{}^\beta - M_*{}^\alpha a_*{}^{\gamma\beta} c_{\alpha\gamma}{}^* = 0 \end{gathered} \tag{2.4}$$

или в векторной форме

$$\nabla_\alpha{}^*\mathbf{f}_*{}^\alpha + \mathbf{X}_* = 0, \qquad \nabla_\alpha{}^*\mathbf{L}_*{}^\alpha + \boldsymbol{\rho}_\alpha{}^* \times \mathbf{f}_*{}^\alpha + \mathbf{M}_* = 0 \tag{2.5}$$

и статические граничные условия

$$\boldsymbol{\Phi}_* = \mathbf{P} - \frac{\partial\, \mathbf{m}_* H}{\partial s^*}, \qquad G_* = H^{\alpha\beta} n_\alpha{}^* n_\beta \tag{2.6}$$

где

$$\mathbf{P} = \left(T_*{}^{\alpha\beta}\boldsymbol{\rho}_\beta{}^* + N_*{}^\alpha \mathbf{m}_*\right) n_\alpha{}^* \qquad H = -H^{\alpha\beta} n_\alpha{}^* \tau_\beta{}^* \tag{2.7}$$

$$\mathbf{f}_*{}^\alpha = T_*{}^{\alpha\beta}\boldsymbol{\rho}_\beta{}^* + N_*{}^\alpha \mathbf{m}^*, \qquad L_*{}^\alpha = \left(\mathbf{m}_* \times \boldsymbol{\rho}_\beta{}^*\right) H^{\alpha\beta} \tag{2.8}$$

Полагая $\boldsymbol{\Phi}^* = \Phi_*{}^\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha + \Phi_*{}^3 \mathbf{m}_*$, из (2.6) имеем скалярную форму

$$\Phi_*{}^\alpha = T_*{}^{\beta\alpha} n_\beta{}^* + b^{*\alpha}_{\ \beta}\, \tau_\beta{}^* H, \qquad \Phi_3{}^* = N_*{}^\alpha n_\alpha{}^* - \frac{\partial H}{\partial s^*} \tag{2.9}$$

Если пренебречь удлинениями и сдвигами по сравнению с единицей, то соотношение (2.2) запишется в виде

$$\delta A = \iint\limits_{\sigma_*} \left(T^{\alpha\beta}\delta p_{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta}\delta\mu_{\alpha\beta}\right) d\sigma^* \tag{2.10}$$

где

$$\mu_{\alpha\beta} = -q_{\alpha\beta} + {}^*b^\gamma_\alpha\, p_{\gamma\beta} \tag{2.11}$$

может быть принято за второй тензор деформации [3, 4].

Пусть $T^{\alpha\beta}$ — тангенциальные усилия в осях чистой деформации [4], $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора чистой деформации:

$$2p_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon^\gamma_\alpha\, \varepsilon_{\gamma\beta} \tag{2.12}$$

Тогда внося $\delta p_{\alpha\beta}$ из (2.12) в (2.2), находим δW — приращение энергии деформации оболочки, отнесенной к единице площади недеформированной срединной поверхности:

$$\delta W = T_*{}^{\alpha\beta}\delta p_{\alpha\beta} + {}^*b^\alpha_\gamma\, H^{\gamma\beta}\delta p_{\alpha\beta} - H^{\alpha\beta}\delta q_{\alpha\beta} =$$
$$= T^{\alpha\beta}\delta\varepsilon_{\alpha\beta} + \sqrt{\frac{a^*}{a}}\left({}^*b^\alpha_\gamma\, H^{\gamma\beta}\delta\varepsilon_{\alpha\beta} - H^{\alpha\beta}\delta q_{\alpha\beta}\right)$$

где

$$T^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{a_*}{a}}\left[T_*{}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} T_*{}^{\alpha\gamma}\varepsilon^\beta_\gamma + \frac{1}{2} T_*{}^{\beta\gamma}\varepsilon^\alpha_\gamma + \frac{1}{2}\, {}^*b^\alpha_\gamma\left(H^{\gamma\sigma}\varepsilon^\beta_\sigma + H^{\beta\sigma}\varepsilon^\gamma_\sigma\right)\right]$$

Следовательно, при малых деформациях $T^{\alpha\beta} \approx T_*{}^{\alpha\beta}$, $p_{\alpha\beta} \approx \varepsilon_{\alpha\beta}$. Теория оболочек, когда величины отнесены к осям «после вращения» (к осям чистой деформации), построена в работе Н. А. Алумяэ [4].

Основные уравнения нелинейной теории оболочек в переменных Эйлера и их преобразование к переменным Лагранжа даны в статьях Синджа и Чина [5, 6]. Однако точность полученных уравнений превышает точность линейного закона Гука. Поэтому теория, данная в этих работах, становится последовательной лишь в результате больших упрощений [7]. При выводе уравнений равновесия (2.4) за координатную систему приняты гауссовы координаты x^1 и x^2 на S^*, а за третью координату z — расстояние точки деформированной оболочки до поверхности S^*.

Если воспользоваться соотношениями (1.10), то уравнения равновесия (2.4) преобразуются к виду

$$\nabla_\alpha\left(\sqrt{\frac{a_*}{a}}\, T_*^{\ \alpha\beta}\right) + \sqrt{\frac{a_*}{a}}\left(a_*^{\ \beta\lambda} P_{\lambda,\,\alpha\gamma} T_*^{\ \alpha\gamma} - {}^*b_\alpha^\beta\ N_*^{\ \alpha} + X_*^{\ \beta}\right) = 0 \qquad (2.13)$$

$$\nabla_\alpha\left(\sqrt{\frac{a_*}{a}}\, N_*^{\ \alpha}\right) + \sqrt{\frac{a_*}{a}}\left(b_{\alpha\beta}{}^* T_*^{\ \alpha\beta} + X_*^{\ 3}\right) = 0 \qquad (2.14)$$

$$\nabla_\alpha\left(\sqrt{\frac{a_*}{a}}\, H^{\alpha\beta}\right) + \sqrt{\frac{a_*}{a}}\left(a_*^{\ \beta\lambda} P_{\lambda,\,\alpha\gamma} H^{\alpha\gamma} - N_*^{\ \beta} + M_*^{\ \alpha} a_*^{\ \lambda\beta} c_{\alpha\lambda}{}^*\right) = 0 \quad (2.15)$$

а в случае малых деформаций ($a_* \approx a,\ a_*^{\ \alpha\beta} \approx a^{\alpha\beta}$) к виду

$$\nabla_\alpha T_*^{\ \alpha\beta} + a^{\beta\lambda} P_{\lambda,\,\alpha\gamma} T_*^{\ \alpha\gamma} - a^{\beta\gamma}\left(b_{\alpha\gamma} + q_{\alpha\gamma}\right) N_*^{\ \alpha} + X^\beta = 0 \qquad (2.16)$$

$$\nabla_\alpha N_*^{\ \alpha} + \left(b_{\alpha\beta} + q_{\alpha\beta}\right) T_*^{\ \alpha\beta} + X^3 = 0 \qquad (2.17)$$

$$\nabla_\alpha H^{\alpha\beta} - N_*^{\ \beta} + a^{\beta\lambda} P_{\lambda,\,\alpha\gamma} H^{\alpha\gamma} + M^\alpha a^{\lambda\beta} c_{\alpha\lambda} = 0 \qquad (2.18)$$

Здесь X^β, X^3, M^α — компоненты внешних усилий и моментов в системе координат деформированной оболочки и отнесенные к единице площади недеформированной поверхности. Граничные условия (2.9) после введения в них ковариантных компонент векторов нормали и касательной к недеформированному контуру оболочки запишутся в виде

$$\Phi_*^{\ \alpha} \frac{ds^*}{ds} = n_\alpha T_*^{\ \alpha\beta} + \tau^\beta b^{*\alpha}_{\ \beta}\ H, \qquad \Phi_3^{\ *} \frac{ds^*}{ds} = n_\alpha N_*^{\ \alpha} - \frac{\partial H}{\partial s}$$

$$\sqrt{\frac{a}{a_*}}\left(\frac{ds_*}{ds}\right)^2 G_* = H^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \qquad (2.19)$$

где n_α и τ_α — компоненты нормали и касательной к контуру C в системе координат на поверхности S, ds и ds^* — элементы дуг контура оболочки до и после деформации:

$$ds^* = ds\sqrt{1 + 2c^{\alpha\pi} c^{\beta\lambda} p_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}$$

Следует отметить, что (2.16), (2.17) и (2.18) в неявной форме содержат уравнения равновесия теории оболочек при больших перемещениях, полученных Лявом и другими авторами. Если сохранить в них лишь величины второго порядка малости относительно перемещений и их производных, т. е. если положить

$$P_{\gamma,\,\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}\omega_\gamma - b_{\alpha\gamma}\omega_\beta + \nabla_\alpha e_{\beta\gamma}, \qquad q_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} \qquad (2.20)$$

то они переходят в уравнение Лява в общих координатах.

Допустим, что $q_{\alpha\beta} \sim \sqrt{\varepsilon_p}$, $e_{\alpha\beta} \sim \varepsilon_p$, где символ $\sim$ указывает, что сравнимые величины имеют одинаковый порядок, ε_p — максимальное относительное удлинение в пределах пропорциональности. Теория оболочек, основанная на этих предположениях, по точности соответствует теории пластин Кармана. Такой изгиб оболочки назовем средним изгибом. В этом случае справедливы приближенные формулы

$$2p_{\alpha\beta}=e_{\alpha\beta}+e_{\beta\alpha}+\omega_\alpha\omega_\beta,\qquad q_{\alpha\beta}=B_{\alpha\beta}+b^{\gamma}_{\alpha}\omega_\gamma\omega_\beta$$
$$P_{\gamma,\,\alpha\beta}=\omega_\gamma(b_{\alpha\beta}+B_{\alpha\beta})+\Omega_{\alpha\beta\gamma} \tag{2.21}$$

Подставляя отсюда $q_{\alpha\beta}$ и $P_{\gamma,\,\alpha\beta}$ в (2.16), (2.17) и (2.18), получим уравнения для среднего изгиба; отнесенные к линиям кривизны, они совпадают с уравнениями равновесия Х. М. Муштари [8]. Эти уточненные уравнения необходимы в задачах устойчивости и явлениях хлопка.

Если внешние усилия и моменты не зависят от деформаций, то задачи теории оболочек могут быть решены либо в усилиях и моментах, либо в компонентах деформаций, присоединяя к системе (2.16), (2.17) и (2.18) условия совместности деформации.

Уравнения равновесия теории малых деформаций (2.16), (2.17) и (2.18) могут быть упрощены. До потери устойчивости члены, содержащие малые множители $P_{\gamma,\,\alpha\beta}$, можно отбросить, так как они величины порядка $h\varepsilon_p^2$, а при наличии краевого эффекта отношение этих членов к основным будут величинами порядка ε_p. Пренебрежение этими квадратичными членами может привести к значительной погрешности лишь в том случае, когда члены уравнений, рассматриваемые нами как главные, сами оказываются малыми благодаря взаимному уничтожению их главных частей (например, при решении задачи устойчивости весьма длинных цилиндрических трубок при осевом сжатии).

§ 3. Введение симметрических тензоров усилий и моментов. Введем симметрические тензоры тангенциальных усилий и моментов, полагая

$$H^{\alpha\beta}=M_*^{\ \alpha\beta}+Q_*^{\ \alpha\beta},\qquad T_*^{\ \alpha\beta}=s_*^{\ \alpha\beta}-{}^*b^\beta_\gamma\, H^{\gamma\alpha} \tag{3.1}$$

где

$$2M_*^{\ \alpha\beta}=H^{\alpha\beta}+H^{\beta\alpha},\qquad 2Q_*^{\ \alpha\beta}=H^{\alpha\beta}-H^{\beta\alpha}$$

Подставляя $T_*^{\ \alpha\beta}$ в шестое уравнение равновесия

$$c_{\alpha\beta}{}^*T_*^{\ \alpha\beta}+{}^*b^\beta_\gamma\, c_{\alpha\beta}{}^*H^{\gamma\alpha}=0 \tag{3.2}$$

имеем $c_{\alpha\beta}s_*^{\ \alpha\beta}=0$, т. е. $s_*^{\ \alpha\beta}$ — симметричный тензор.

Антисимметрический тензор $Q^{\alpha\beta}=-Q^{\beta\alpha}$ может быть определен из дополнительного недифференциального соотношения, обеспечивающего парность касательных напряжений во всех точках по толщине оболочки.

При сохранении наименьшей степени h это соотношение будет

$$h^2c_{\gamma\alpha}{}^*b^{*\gamma}_{\ \beta}T_*^{\ \alpha\beta}-3c_{\alpha\beta}{}^*H^{\alpha\beta}=0 \tag{3.3}$$

Внося (3.1) в (2.2) и учитывая, что скалярное произведение симметрического тензора на антисимметрический равно нулю, получим

$$\delta A=\iint\limits_{\sigma^*}\left(s_*^{\ \alpha\beta}\delta p_{\alpha\beta}-M_*^{\ \alpha\beta}\delta q_{\alpha\beta}\right)d\sigma^*=$$
$$=\iint\limits_{\sigma^*}\left\{\left(s_*^{\ \alpha\beta}-{}^*b^\beta_\gamma\, M^{\gamma\alpha}\right)\boldsymbol{\rho}_\beta^{\ *}\cdot\delta\boldsymbol{\rho}_\alpha^{\ *}+M_*^{\ \alpha\beta}\boldsymbol{\rho}_\beta^{\ *}\cdot\frac{\partial\delta\mathbf{m}_*}{\partial x^\alpha}\right\}d\sigma^* \tag{3.4}$$

Откуда следуют уравнения равновесия [1]

$$\nabla_\alpha^* (s_*^{\alpha\beta} - {}^*b_\gamma^\beta M_*^{\gamma\alpha}) - {}^*b_\alpha^\beta Q_*^\alpha + X_*^\beta = 0 \tag{3.5}$$

$$\nabla_\alpha^* Q_*^\alpha + b_{\alpha\beta}^* (s_*^{\alpha\beta} - {}^*b_\gamma^\beta M_*^{\gamma\alpha}) + X_*^3 = 0 \tag{3.6}$$

$$\nabla_\alpha^* M_*^{\alpha\beta} - Q_*^\beta - a_*^{\gamma\beta} c_{\alpha\gamma}{}^* M_*^\alpha = 0 \tag{3.7}$$

и статические граничные условия

$$\Phi_*^\alpha = (s_*^{\alpha\beta} - {}^*b_\gamma^\beta M_*^{\gamma\alpha}) n_\beta^* + {}^*b_\beta^\alpha \tau_*^\beta H_1$$
$$\Phi_3^\sigma = Q_*^\alpha n_\alpha^* - \frac{\partial H_1}{\partial s^*}, \qquad G = M_*^{\alpha\beta} n_\alpha^* n_\beta^* \tag{3.8}$$

где $H_1 = - M_*^{\alpha\beta} n_\alpha^* \tau_\beta^*$ — крутящий момент на контуре, Q_*^α — вектор, аналогичный вектору перерезывающих усилий. Таким образом, по существу в уравнения равновесия теории оболочек входят шесть неизвестных $s_*^{\alpha\beta}$ и $M_*^{\alpha\beta}$ вместо восьми. Аналогичные обстоятельства отмечены А. И. Лурье [9]. Так как при изотермическом процессе деформации элементарная работа деформации оболочки является полным дифференциалом, то из (3.4) имеем общие соотношения упругости

$$\sqrt{\frac{a_*}{a}}\, s_* = \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha\beta}}, \qquad \sqrt{\frac{a^*}{a}}\, M_*^{\alpha\beta} = - \frac{\partial W}{\partial q_{\alpha\beta}} \tag{3.9}$$

где W — энергия деформации оболочки, отнесенная к единице площади недеформированной срединной поверхности.

Введем еще новые тензоры усилий и моментов, полагая

$$\sqrt{\frac{a_*}{a}}\, s_*^{\alpha\beta} = s^{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha\beta}}, \qquad \sqrt{\frac{a_*}{a}}\, M_*^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} = -\frac{\partial W}{\partial q_{\alpha\beta}}, \qquad \sqrt{\frac{a_*}{a}}\, Q_*^\alpha = Q^\alpha \tag{3.10}$$

а также векторы внешних усилий и моментов, отнесенных к единице площади недеформированной срединной поверхности:

$$\mathbf{X} = \sqrt{\frac{a_*}{a}}\, \mathbf{X}_*, \qquad \mathbf{M} = \sqrt{\frac{a_*}{a}}\, \mathbf{M}_* \tag{3.11}$$

Тогда из (3.5) — (3.7) получим уравнения равновесия в виде

$$\nabla_\alpha (s^{\alpha\beta} - {}^*b_\gamma^\beta M^{\gamma\alpha}) + a_*^{\beta\lambda} P_{\lambda,\alpha\sigma} (s^{\alpha\sigma} - {}^*b_\gamma^\sigma M^{\gamma\sigma}) - {}^*b_\alpha^\beta Q^\alpha + X^\beta = 0 \tag{3.12}$$

$$\nabla_\alpha Q^\alpha + b^*{}_{\alpha\beta} (s^{\alpha\beta} - {}^*b_\gamma{}^\beta M^{\gamma\alpha}) + X^3 = 0 \tag{3.13}$$

$$\nabla_\alpha M^{\alpha\beta} + a_*^{\beta\lambda} P_{\lambda,\alpha\gamma} M^{\alpha\gamma} - Q^\beta - M^\alpha a_*^{\gamma\beta} c_{\alpha\gamma}{}^* = 0 \tag{3.14}$$

а из (3.8) статические граничные условия в виде

$$\Phi^\alpha = (s^{\alpha\beta} - b^{*\beta}_\gamma M^{\gamma\alpha}) n_\beta + b^{*\alpha}_\beta \tau^\beta H_2, \qquad \Phi_3 = Q^\alpha n_\alpha - \frac{\partial H_2}{\partial s}$$
$$\sqrt{\frac{a}{a_*}}\frac{ds^*}{ds} G = M^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta, \qquad \left(\frac{ds_*}{ds}\right)^2 H_2 = - M^{\alpha\beta} n_\alpha \tau_\beta \tag{3.15}$$

[1] Из (3.5) следует, что упрощение $T_*^{\alpha\beta} = T_*^{\beta\alpha}$ в случае тонкой оболочки допустимо лишь при пренебрежении перерезывающими усилиями N_*^α впервых двух уравнениях равновесия.

В этих уравнениях ∇ — знак ковариантного дифференцирования относительно $a_{\alpha\beta}$; X^α, M^α — контравариантные компоненты векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{M}$ в системе координат деформированной срединной поверхности; $X^3 = \mathbf{m}_*\mathbf{X}$; $\Phi^{\alpha-}$ и Φ_3 — компоненты контурного усилия, отнесенного к единице длины недеформированного контура C оболочки в той же системе координат; G — изгибающий момент, отнесенный к единице длины недеформированного контура. Важно заметить, что при произвольных перемещениях и деформациях первый и второй тензоры деформации допускают потенциал. Действительно, вводя функцию F равенством

$$F = s^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} - W \tag{3.16}$$

из соотношения

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial s^{\alpha\beta}}\,\delta s^{\alpha\beta} + \frac{\partial F}{\partial M^{\alpha\beta}}\delta M^{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}\,\delta^{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta}\,\delta M^{\alpha\beta} + s^{\alpha\beta}\,\delta p_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta}\,\delta q_{\alpha\beta} - \delta W$$

с учетом (3.10) получим формулы, аналогичные формулам Кастильяно в линейной теории:

$$p_{\alpha\beta} = \frac{\partial F}{\partial s^{\alpha\beta}}, \qquad p_{\alpha\beta} = -\frac{\partial F}{\partial M^{\alpha\beta}} \tag{3.17}$$

В случеа малых удлинений и сдвигов имеем

$$2F = s^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} \tag{3.18}$$

В этом случае для упругого состояния оболочки F есть работа деформаций, а для упруго-пластического состояния — дополнительная работа. Представим уравнения (3.5) — (3.7) в векторной форме

$$\nabla_\alpha{}^*\mathbf{f}_1{}^\alpha + \mathbf{X}_* = 0, \quad \nabla_\alpha{}^*\mathbf{L}_*{}^\alpha + \boldsymbol{\rho}_\alpha{}^* \times \mathbf{f}_1{}^\alpha + \mathbf{M}_* = 0 \tag{3.19}$$

где

$$\mathbf{f}_1{}^\alpha = s_*{}^{\alpha\beta}\boldsymbol{\rho}_\beta{}^* + M_*{}^{\alpha\beta}\mathbf{m}_\beta{}^* + \mathbf{m}_* Q_*{}^\alpha, \qquad \mathbf{L}_*{}^\alpha = (\mathbf{m}_* \times \boldsymbol{\rho}_\beta{}^*)\, M_*{}^{\alpha\beta} \tag{3.20}$$

то эти уравнения при $\mathbf{X}_* = \mathbf{M}_* = 0$ удовлетворяются, полагая

$$\mathbf{f}_1{}^\alpha = c_*{}^{\alpha\beta}\nabla_\beta{}^*\boldsymbol{\varphi}, \qquad \mathbf{L}_*{}^\alpha = c_*{}^{\alpha\beta}\,[\nabla_\beta{}^*\boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\rho}_\beta{}^* \times \boldsymbol{\varphi})] \tag{3.21}$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ — некоторые векторы. Так как $\mathbf{L}_*{}^\alpha \cdot \mathbf{m}_* = 0$, то эти векторы удовлетворяют условиям

$$\varphi^\alpha = c_*{}^{\alpha\beta}\,(\nabla_\beta\psi + \psi^\lambda b_{\lambda\beta}{}^*) \tag{3.22}$$

при этом

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi^\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha{}^* + \mathbf{m}_*\varphi, \; \boldsymbol{\psi} = \psi^\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha{}^* + \mathbf{m}_*\psi \tag{3.23}$$

Из сравнения (3.20) и (3.21) получаем

$$s_*{}^{\alpha\beta} = c_*{}^{\alpha\pi}c_*{}^{\beta\gamma}\nabla_\pi{}^*\,(\nabla_\gamma\psi + b^{*\sigma}_{\gamma}\psi) - {}^*b^\beta_\gamma c_*{}^{\alpha\sigma}c_*{}^{\gamma\pi}\,(\nabla_\pi{}^*\psi_\sigma - b_{\pi\sigma}{}^*\psi) \tag{3.24}$$

$$M_*{}^{\alpha\beta} = c_*{}^{\alpha\pi}c_*{}^{\beta\gamma}\,(\nabla_\pi{}^*\psi_\gamma - b_{\pi\gamma}{}^*\psi) - c_*{}^{\alpha\beta}\varphi \tag{3.25}$$

$$Q_*{}^\alpha = c_*{}^{\alpha\beta}c_*{}^{\mu\nu}b_{\beta\mu}{}^*\,(b^{*\lambda}_{\nu}\psi_\lambda + \nabla_\nu\psi) + c_*{}^{\alpha\beta}\nabla_\beta{}^*\varphi \tag{3.26}$$

Так как $M_*^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta}^* = 0$, то из (3.25) следует, что $2\varphi = c_*^{\alpha\beta}\nabla_\alpha^*\psi_\beta$. Таким образом, общее решение однородной системы содержит три независимые функции ψ и ψ_α.

§ 4. Законы упругости и упрочнения. Пусть ε_{ik} — ковариантные компоненты тензора конечной деформации ($\varepsilon_k^i = g^{is}\varepsilon_{ks}$); σ^{ik} — контравариантные компоненты тензора напряжения в системе координат оболочки после деформации; W° — плотность энергии деформации оболочки как трехмерного тела. Тогда для изотропной оболочки при деформациях произвольной величины существуют нелинейные соотношения

$$\sigma^{ik}\sqrt{S} = g^{ik}\left(\frac{\partial W^\circ}{\partial S_1} + S_1\frac{\partial W^\circ}{\partial S_2} + S_2\frac{\partial W^\circ}{\partial S_3}\right) - \left(\frac{\partial W^\circ}{\partial S_2} + S_1\frac{\partial W^\circ}{\partial S_3}\right)\varepsilon^{ik} + \frac{\partial W^\circ}{\partial S_3}\varepsilon^{ij}\varepsilon_j^k$$

где W° зависит лишь от инвариантов тензора ε_k^i:

$$S_1 = g^{ik}\varepsilon_{ik}, \qquad 2S_2 = S_1^2 - \varepsilon_k^i\varepsilon_i^k, \qquad S_3 = \det(\varepsilon_k^i), \qquad S = 1 + 2S_1 + 4S_2 + 8S_3 \tag{4.1}$$

Если принять гипотезу Кирхгофа ($\varepsilon_3^1 = \varepsilon_3^2 = 0$), то соотношения (4.1) значительно упрощаются, так как в этом случае

$$S_1 = \theta_1 + \varepsilon_3^3, \qquad S_2 = \theta_1\varepsilon_3^3 + \theta_2, \qquad S_3 = \theta_2\varepsilon_3^3 \tag{4.2}$$

где величины θ_1 и θ_2 выражаются формулами

$$\theta_1 = \frac{a}{g}c^{\alpha\beta}c^{\pi\lambda}g_{\beta\lambda}\varepsilon_{\alpha\pi}, \qquad \theta_2 = \frac{a}{2g}c^{\alpha\beta}c^{\pi\lambda}\varepsilon_{\alpha\pi}\varepsilon_{\beta\lambda} \tag{4.3}$$

и являются инвариантными по отношению к преобразованию гауссовых координат на поверхностях $x^3 = \text{const}$. Для определения ε_3^3, как обычно, примем $\sigma^{33} = 0$. Тогда, полагая в (4.1) $i = k = 3$ и внося в полученное соотношение S_1, S_2 и S_3 согласно (4.2), найдем уравнение вида

$$f(\theta_1, \theta_2, \varepsilon_3^2) = 0 \tag{4.4}$$

Далее заметим, что в соотношениях (4.1) при i, $k = 1, 2$ выражение

$$(\varepsilon^{ij}\varepsilon_j^k - S_1\varepsilon^{ik})\frac{\partial W^\circ}{\partial S_3} = -(\varepsilon_3^3\varepsilon^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\theta_2)\frac{\partial W^\circ}{\partial S_3}$$

Тогда, подставляя это последнее выражение в (4.1) и учитывая (4.2) и (4.4), получим соотношения упругости для изотропной оболочки

$$\sigma^{\alpha\beta} = A_1^{\alpha\beta} + B_1^{\alpha\beta\pi\lambda}\varepsilon_{\pi\lambda} \qquad (\alpha,\ \beta,\ \pi,\ \lambda = 1{,}2) \tag{4.5}$$

где $A_1^{\alpha\beta}$ и $B_1^{\alpha\beta\pi\lambda}$ являются функциями лишь инвариантов θ_1 и θ_2.

Чтобы выразить усилия и моменты через деформации поверхности, необходимо учесть, что θ_1 и θ_2 зависят от следующих инвариантов тензоров деформаций поверхности:

$$\begin{gathered} p_1 = a^{\alpha\beta}p_{\alpha\beta}, \qquad q_1 = a^{\alpha\beta}q_{\alpha\beta}, \qquad p_2 = \det(p_\gamma^\alpha), \qquad q_2 = \det(q_\gamma^\alpha) \\ p_1' = b^{\alpha\beta}p_{\alpha\beta}, \qquad q_1' = b^{\alpha\beta}q_{\alpha\beta}, \qquad r = c^{\alpha\beta}c_{\pi\lambda}q_\alpha^\pi p_\beta^\lambda, \qquad r' = p_\gamma^\alpha q_\alpha^\gamma \end{gathered} \tag{4.6}$$

Тогда W — потенциал усилий и моментов — в общем случае будет зависеть от этих восьми вариантов.

Поэтому, замечая, что

$$\frac{\partial p_1}{\partial p_{\alpha\beta}} = a^{\alpha\beta}, \qquad \frac{\partial p_1'}{\partial p_{\alpha\beta}} = b^{\alpha\beta}, \qquad \frac{\partial p_2}{\partial p_{\alpha\beta}} = \frac{\partial r}{\partial q_{\alpha\beta}} = a^{\alpha\beta}p_1 - p^{\alpha\beta}$$
$$\frac{\partial r'}{\partial p_{\alpha\beta}} = q^{\alpha\beta}, \qquad \frac{\partial r_1}{\partial q_{\alpha\beta}} = p^{\alpha\beta}, \qquad \frac{\partial q_2}{\partial q_{\alpha\beta}} = \frac{\partial r}{\partial p_{\alpha\beta}} = a^{\alpha\beta}q_1 - q^{\alpha\beta} \tag{4.7}$$

Из (3.10) получим соотношения упругости

$$s^{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha\beta}} = D_1{}^{\alpha\beta} + D_2 p^{\alpha\beta} + D_3 q^{\alpha\beta}, \quad M^{\alpha\beta} = -\frac{\partial W}{\partial q_{\alpha\beta}} = D_4{}^{\alpha\beta} + D_3 p^{\alpha\beta} + D_5 q^{\alpha\beta} \tag{4.8}$$

где

$$D_1{}^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial W}{\partial p_1} + p_1\frac{\partial W}{\partial p^2} + q_1\frac{\partial W}{\partial r}\right) + b^{\alpha\beta}\frac{\partial W}{\partial p_1'}, \qquad D_3 = \frac{\partial W}{\partial r'} - \frac{\partial W}{\partial r} \tag{4.9}$$
$$D_4{}^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1} + p_1\frac{\partial W}{\partial r} + q_1\frac{\partial W}{\partial q_2}\right) + b^{\alpha\beta}\frac{\partial W}{\partial q_1'} \qquad D_2 = -\frac{\partial W}{\partial p_2}, \quad D_5 = -\frac{\partial W}{\partial q_2}$$

Соотношения (4.8) годны для деформаций произвольной величины и существуют независимо от гипотезы Кирхгофа при условии, что

$$W = \int_{-h}^{h} W^\circ \, dx^3$$

Рассмотрим случай малых упруго-пластических деформаций оболочки при больших перемещениях. В этом случае в пределах точности гипотезы Кирхгофа можно пользоваться формулами первого приближения Кирхгофа-Лява. Работа объемных деформаций в пластическом состоянии

$$W_0 = K\left(\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\right)^2\left(hp_1{}^2 + \frac{h^3}{3}q_1{}^2\right) \tag{4.10}$$

где $2h$ — толщина оболочки, λ, μ — константы Ляме, K — модуль объемного сжатия. Так как плотность энергии формоизменения в пластическом состоянии материала зависит лишь от второго инварианта девиатора деформации, то инварианты p_2, q_2, r, r' войдут в выражение W через посредство инвариантов

$$P_p = (p_1)^2 - p_2, \qquad P_q = (q_1)^2 - q_2, \qquad P_{pq} = r' + \frac{1}{2}r \tag{4.11}$$

Учитывая это обстоятельство и соотношения (4.7) и (4.10), имеем

$$S^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\pi\lambda}p_{\pi\lambda} + B^{\alpha\beta\pi\lambda}q_{\pi\lambda}, \qquad M^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta\pi\lambda}p_{\pi\lambda} + C^{\alpha\beta\pi\lambda}q_{\pi\lambda} \tag{4.12}$$

где

$$A^{\alpha\beta\pi\lambda} = a^{\alpha\beta}a^{\pi\lambda}\left[2hK\left(\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\right)^2 + \frac{2}{3}I_1\right] + \frac{2}{3}I_1 a^{\alpha\pi}a^{\beta\lambda}$$
$$B^{\alpha\beta\pi\lambda} = -\frac{2}{3}I_2\left(a^{\alpha\beta}a^{\pi\lambda} + a^{\alpha\pi}a^{\beta\lambda}\right) \tag{4.13}$$
$$C^{\alpha\beta\pi\lambda} = \left[\frac{2h}{3}K\left(\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\right)^2 + \frac{2}{3}I_3\right]a^{\alpha\beta}a^{\pi\lambda} + \frac{2}{3}I_3 a^{\alpha\pi}a^{\beta\lambda}$$

где

$$I_1 = \frac{3}{2}\frac{\partial W}{\partial P_p}, \qquad I_2 = -\frac{3}{4}\frac{\partial W}{\partial P_{pq}}, \qquad I_3 = \frac{3}{2}\frac{\partial W}{\partial P_q} \tag{4.14}$$

— интегралы, введенные А. А. Ильюшиным [10] в случае пластинки.

§ 5. Уравнения Лагранжа — Галеркина. Нахождение точного решения уравнений теории оболочек при больших перемещениях затруднительно даже в самых простых случаях. Поэтому здесь приходится применять приближенные методы, основанные на вариационных теоремах. К задачам устойчивости упругого равновесия и к исследованию явления хлопка оболочки обычно применяется вариационное уравнение (2.2), выражающее начало возможных перемещений:

$$\delta A = \iint\limits_{\sigma^*} (T_*{}^{\alpha\beta}\delta p_{\alpha\beta} + {}^*b_\gamma^\alpha H^{\gamma\beta}\delta p_{\alpha\beta} - H^{\alpha\beta}\delta q_{\alpha\beta})\, d\sigma^* =$$
$$= \iint\limits_{\sigma^*} (s_*{}^{\alpha\beta}\delta p_{\alpha\beta} - M_*{}^{\alpha\beta}\delta q_{\alpha\beta})\, d\sigma^* \tag{5.1}$$

Если внешние силы допускают потенциал, то отыскание функций, удовлетворяющих уравнению (5.1), сводится к нахождению минимума полной потенциальной энергии (метод Ритца). Приближенный метод Ритца можно применить лишь к тем случаям, когда внешние силы заданы независимо от деформации или они вида гидростатического давления. Если внешние силы указанным условиям не удовлетворяют, то задачу определения критической нагрузки можно решить применением вариационного уравнения (5.1) или методом Галеркина.

Заметим, что в то время как в линейной теории оболочек уравнения Ритца и уравнения Галеркина следуют из начала возможных перемещений и они тождественны, в нелинейной теории уравнения Галеркина ничем не связаны с энергетическим функционалом. Уравнения Галеркина в нелинейной теории оболочек получаются не из начала возможных перемещений (5.1), а из вариационного уравнения

$$\iint\limits_{\sigma^*} (X_*{}^\alpha\delta v_\alpha + X_*{}^3\delta w + M_*{}^\beta a_*{}^{\alpha\lambda} c_{\beta\lambda}{}^*\delta\widetilde{\omega}_\alpha)\, d\sigma^* +$$
$$+ \int\limits_{C^*} (\Phi_*{}^\alpha\delta v_\alpha + \Phi_*{}^3\delta w - G_* n_*{}^\alpha\delta\widetilde{\omega}_\alpha)\, dS^* =$$
$$= \iint\limits_{\sigma^*} \{T_*{}^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha{}^*\delta v_\beta - b_{\alpha\beta}{}^*\delta w) - H^{\alpha\beta}\nabla_\alpha{}^*\delta\widetilde{\omega}_\beta\}\, d\sigma^* \tag{5.2}$$

где

$$\delta\widetilde{\omega}_\alpha = \nabla_\alpha\delta W + {}^*b_\alpha^\lambda\delta v_\lambda$$

В самом деле, интегрированием по частям из (5.2) получим

$$\int\limits_{G^*} \left\{\left(\Phi - P + \frac{\partial m^* H}{\partial s^*}\right)(\rho_*{}^\alpha\delta v_\alpha + m_*\delta w) + (c_*{}^{\alpha\beta}G_*\tau_\beta{}^* - H^{\beta\alpha}n_\beta{}^*)\,\delta\widetilde{\omega}_\alpha\right\} ds^* =$$
$$= \iint\limits_{\sigma^*} \{(\nabla_\alpha{}^*T_*{}^{\alpha\beta} - {}^*b_\alpha^\beta N_*{}^\alpha + X_*{}^\beta)\,\delta v_\alpha + (\nabla_\alpha{}^*N_*{}^\alpha + b_{\alpha\beta}{}^*T_*{}^{\alpha\beta} + X_*{}^3)\,\delta w +$$
$$+ (\nabla_\alpha{}^*H^{\alpha\beta} - N_*{}^\beta - M_*{}^\alpha a_*{}^{\gamma\beta}c_{\alpha\gamma}{}^*)\,\delta\widetilde{\omega}_\beta\}\, d\sigma^* \tag{5.3}$$

Отсюда, полагая

$$\delta v_\alpha = \Sigma f_{\alpha\lambda}\delta A^\lambda, \qquad \delta w = \Sigma f_\lambda \delta B^\lambda$$

где A^λ и B^λ — постоянные, получим уравнения Галеркина.

Как известно, при выборе одной и той же системы функций $f_{\alpha\lambda}$ и f_λ результаты решения линейных задач методом Ритца и Галеркина получаются тождественными, причем метод Галеркина позволяет значительно сократить объем вычислительных работ. Это преимущество метода Галеркина еще в большей степени проявляется в нелинейных задачах. Это видно хотя бы из сравнения вариационных уравнений (5.1) и (5.2), из которых следуют уравнения Ритца и Галеркина, а также из сравнения соотношений (5.1) и (5.3). Правая часть (5.3) получается из правой части (5.1) путем вычитания выражения

$$\iint\limits_{\sigma^*}\Big\{(\nabla_\alpha {}^*T_*{}^{\alpha\beta} - {}^*b_\alpha^\beta N_*{}^\alpha + X_*{}^\beta)R_\beta + (\nabla_\alpha{}^* N_*{}^\alpha + b_{\alpha\beta}{}^*T_*{}^{\alpha\beta} X_*{}^3)R_3 + \\ + (\nabla_\alpha{}^* H^{\alpha\beta} - N_*{}^\beta - M_*{}^\alpha a_*{}^{\gamma\beta} c_{\alpha\gamma}{}^*)\,\Omega_\alpha\Big\}\,d\sigma^*$$

где

$$R_\beta = e_\alpha^\lambda\,\delta v_\lambda + \omega_\alpha\,\delta w,\ R_3 = \sqrt{\frac{a}{a_*}}\,(E_0\delta w + E^\alpha\delta v_\alpha) - \delta w, \Omega_\alpha = -\,\delta\tilde{\omega}_\alpha - \boldsymbol{\rho}_\alpha{}^*\cdot\delta\mathbf{m}_*$$

Наряду с (5.1) соотношение (5.2) с успехом может быть применено к приближенному решению задач нелинейной теории. Для малых деформаций это соотношение упрощается, так как в ряде случаев можно пренебрегать разницей ковариантного дифференцирования относительно $a_{\alpha\beta}$ и $a_{\alpha\beta}{}^*$. Кроме того, можно пренебречь работой усилий типа $N_*{}^\alpha q_\alpha^\beta$ на возможных перемещениях δv_β. Тогда вместо (5.2) получим

$$\iint\limits_\sigma (X_*{}^\alpha\delta v_\alpha + X_*{}^3\delta w + M_*{}^\beta a^{\lambda\alpha} c_{\beta\lambda}\,\delta\omega_\alpha)\,d\sigma + \int\limits_C (\Phi_*{}^\alpha\delta v_\alpha + \Phi_*{}^3\delta w - G_* n^\alpha\delta\omega_\alpha)\,ds = \\ = \iint\limits_\sigma (T_*{}^{\alpha\beta}\,\delta e_{\alpha\beta} - T_*{}^{\alpha\beta}\,q_{\alpha\beta}\,\delta w - H^{\alpha\beta}\,\delta\nabla_\alpha\omega_\beta)\,d\sigma \qquad (5.4)$$

Правая часть этого соотношения мало отличается по своей форме от энергии деформации, вычисленной по линейной теории, но внешние усилия и моменты заданы в системе координат деформированной оболочки. Пусть X^α, X^3 — компоненты внешних усилий, $M_{1\alpha}$ — компоненты внешнего момента в системе координат недеформированной оболочки. По формулам, приведенным в нашей работе [11]:

$$X_*{}^\alpha = X_\beta\,(a^{\alpha\beta} + e^{\alpha\beta}) + X^3\omega^\alpha, \qquad X_*{}^3 = E_0 X^3 + E_\alpha X^\alpha$$

$$M_*{}^\beta = c^{\pi\alpha}\,\{M_{1\alpha} c^{\lambda\beta} a_{\pi\nu}(\delta_\lambda^\nu + e_\lambda^\nu) + \delta_\pi^\beta\omega_\alpha Y\}, \qquad Y = [p_{(+)} - p_{(-)}]\,h \qquad (5.5)$$

$$\Phi_*{}^\alpha = \Phi_\alpha\,(a^{\alpha\beta} + e^{\alpha\beta}) + \Phi_3\omega^\alpha, \qquad \Phi^3 = E_0\Phi^3 + E_\alpha\Phi^\alpha \qquad (5.6)$$

где Φ_α и Φ_3 — компоненты контурного усилия в системе координат недеформированной оболочки. Если пренебречь величинами $e_{\alpha\beta}$ по сравнению с единицей, то из (5.5) и (5.6) будем иметь

$$X_*{}^\alpha = X^\alpha + X^3\omega^\alpha, \qquad X_*{}^3 = X^3 - X^\alpha\omega_\alpha, \qquad M_*{}^\beta = M_1{}^\beta$$

$$\Phi_*{}^\alpha = \Phi^\alpha + \Phi_3\omega^\alpha, \qquad \Phi_*{}^3 = \Phi^3 - \Phi^\alpha\omega_\alpha$$

Кроме того, с достаточной точностью можно положить $q_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\omega_\beta$.

§ 6. Вариация напряженного состояния оболочки при конечных деформациях. Пусть $v_\alpha{}^*$ — ковариантные компоненты вектора перемещения в системе координат деформированной поверхности, w^* — проекция этого вектора на нормаль $\mathbf{m}^*$ этой поверхности; $e_{\alpha\beta}{}^*$ и $\omega_\alpha{}^*$ — компоненты диады перемещения в той же системе координат:

$$e_{\alpha\beta}{}^* = \boldsymbol{\rho}_\beta{}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^\alpha} = \nabla^*_\alpha v_\beta{}^* - b_{\alpha\beta}{}^* w^* \tag{6.1}$$

$$\omega^*_\alpha = \mathbf{m}_* \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^\alpha} = \nabla_\alpha w^* + {}^*b_\alpha{}^\gamma v_\gamma{}^*, \qquad \mathbf{v} = \boldsymbol{\rho}_*{}^\alpha v_\alpha{}^* + \mathbf{m}^* w^*$$

Тогда для компонент первого тензора деформации из

$$2p_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\rho}_\alpha{}^* \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta{}^* - \boldsymbol{\rho}_\alpha \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta = \boldsymbol{\rho}_\beta{}^* \cdot \left(\boldsymbol{\rho}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^\alpha}\right) - \boldsymbol{\rho}_\alpha \cdot \left(\boldsymbol{\rho}_\beta{}^* - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^\beta}\right)$$

имеем их новые выражения

$$2p_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}{}^* + e_{\beta\alpha} = e_{\beta\alpha}{}^* + e_{\alpha\beta} \tag{6.2}$$

Отсюда, сравнивая (6.2) с (1.4), имеем

$$e_{\alpha\beta}{}^* = e_{\alpha\beta} + e^\lambda_\alpha e_{\beta\lambda} + \omega_\alpha \omega_\beta \tag{6.3}$$

а из равенств

$$\nabla_\alpha \omega_\beta{}^* = -\nabla_\alpha (\mathbf{m}_* \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta) = {}^*b^\gamma_\alpha \boldsymbol{\rho}_\gamma \cdot {}^*\boldsymbol{\rho}_\beta - \mathbf{m}_* \cdot \nabla_\alpha \boldsymbol{\rho}_\beta = -{}^*b^\gamma_\alpha e_{\beta\gamma}{}^* - \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_* b_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}{}^*$$

получим

$$q_{\alpha\beta} = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^* - 1)\, b_{\alpha\beta} + {}^*b_\alpha{}^\gamma e_{\beta\gamma}{}^* + \nabla_\alpha \omega_\beta{}^* =$$

$$= (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^* - 1)\, b_{\alpha\beta} + {}^*b^\gamma_\alpha e_{\beta\gamma}{}^* + \nabla_\alpha{}^* \omega_\beta{}^* + a_*{}^{\mu\gamma} P_{\gamma,\, \alpha\beta} \omega_\mu{}^* \tag{6.4}$$

Умножим векторные уравнения равновесия (2.5) на вектор перемещения $\mathbf{v}$ и проинтегрируем результат по всей площади деформированной срединной поверхности σ^*:

$$\iint_{\sigma^*} v\, (\nabla_\alpha{}^* \mathbf{f}_*{}^\alpha + \mathbf{X}_*)\, d\sigma^* = 0$$

или, применяя формулу преобразования

$$\iint_{\sigma^*} \nabla_\alpha{}^* (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})\, d\sigma^* = \int_{C^*} \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}\, n_\alpha{}^* ds^* \tag{6.5}$$

находим

$$\iint_{\sigma^*} \mathbf{X}_* \cdot \mathbf{v}\, d\sigma^* + \int_{C^*} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}\, ds^* = \iint_{\sigma^*} (T_*{}^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}{}^* + N_*{}^\alpha \omega_\alpha{}^*)\, d\sigma^*$$

Внося сюда $N_*{}^\alpha$ из (2.4) и вновь пользуясь (6.5), будем иметь

$$\iint_{\sigma^*} (\mathbf{X}_* \cdot \mathbf{v} + M_*{}^\beta a_*{}^{\lambda\alpha} c_{\beta\lambda}{}^* \omega_\alpha{}^*)\, d\sigma^* + \int_{C^*} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - H^{\alpha\beta} n_\alpha{}^* \omega_\beta{}^*)\, ds^* =$$

$$= \iint_{\sigma^*} (T_*{}^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}{}^* - H^{\alpha\beta} \nabla_\alpha{}^* \omega_\beta{}^*)\, d\sigma^* \tag{6.6}$$

Из выражения вектора момента $\mathbf{L}_* = (\mathbf{m}^* \times \rho_\beta{}^*) H^{\alpha\beta} n_\alpha{}^*$ имеем

$$H^{\alpha\beta} n_\alpha{}^* \omega_\beta{}^* = G_* \omega_\alpha{}^* n_*{}^\alpha - H\mathbf{m}_* \cdot \frac{d\mathbf{v}}{ds^*} \tag{6.7}$$

Внося это в (6.6) и считая функцию Hw^* однозначной, найдем

$$\iint\limits_{\sigma^*} \mathbf{X}_* \cdot \mathbf{v} + M_*{}^\beta a_*{}^{\lambda\alpha} c_{\beta\lambda}{}^* \omega_\alpha{}^*)\, d\sigma^* + \int\limits_{C^*} \left\{ \left(\mathbf{P} - \frac{\partial H \mathbf{m}^*}{\partial s^*} \right) \cdot \mathbf{v} - G_* n_*{}^\alpha \omega_\alpha{}^* \right\} ds^* =$$

$$= \iint\limits_{\sigma^*} (T_*{}^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}{}^* - H^{\alpha\beta} \nabla_\alpha{}^* \omega_\beta{}^*)\, d\sigma^* \tag{6.8}$$

или, внося симметрические тензоры (3.1), (3.10) и (3.11), получим

$$\iint\limits_{\sigma} (\mathbf{X} \cdot \mathbf{v} + M^\beta a_*{}^{\lambda\alpha} c_{\beta\alpha}{}^* \omega_\alpha{}^*)\, d\sigma + \int\limits_{C} (\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{v} - G n^\alpha \omega_\alpha{}^*)\, ds =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} \{ s^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}{}^* - M^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha{}^* \omega_\beta{}^* + {}^*b_\alpha^\gamma\, e_{\beta\gamma}{}^*) \}\, d\sigma \qquad \left(G = \sqrt{\frac{a}{a_*}}\, \frac{ds}{ds^*} G_1 \right) \tag{6.9}$$

Здесь, как и раньше, $\mathbf{\Phi}$ является вектором контурного усилия, отнесенного к единице длины недеформированного контура C; $\mathbf{X}$ и M^β — усилия и моменты, отнесенные к единице недеформированной поверхности σ. Преобразуем подинтегральное выражение правой части (6.8).

Внося $e_{\alpha\beta}{}^*$ и $\nabla_\alpha{}^* \omega_\beta{}^* + {}^*b_\alpha^\gamma\, e_{\beta\gamma}{}^*$ из (6.3) и (6.4), будем иметь

$$\iint\limits_{\sigma} \mathbf{X} \cdot \mathbf{v} + M^\beta a_*{}^{\lambda\alpha} c_{\beta\lambda}{}^* \omega_\lambda{}^*)\, d\sigma + \int\limits_{C} (\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{v} - G n^\alpha \omega_\alpha{}^*)\, ds =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} \{ s^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} [(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^* - 1)\, b_{\alpha\beta} + a_*{}^{\lambda\gamma} P_{\gamma,\,\alpha\beta} \omega_\lambda{}^*] +$$

$$+ \frac{1}{2} s^{\alpha\beta} (e_\alpha^\lambda\, e_{\beta\lambda} + \omega_\alpha \omega_\beta) \Big\}\, d\sigma \tag{6.10}$$

Теперь введем в рассмотрение функционал

$$\delta A' = \delta \iint \Big\{ F + M^{\alpha\beta} [(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^* - 1)\, b_{\alpha\beta} + a_*{}^{\lambda\gamma} P_{\gamma,\,\alpha\beta} \omega_\lambda{}^*] +$$

$$+ \frac{1}{2} s^{\alpha\beta} (e_\alpha^\lambda\, e_{\beta\lambda} + \omega_\alpha \omega_\beta) \Big\}\, d\sigma \tag{6.11}$$

где F — потенциал деформации, определяемый формулой (3.16), а

$$\delta A' = \iint\limits_{\sigma} \{ \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{X} + \omega_\alpha{}^* \delta (M^\beta a_*{}^{\alpha\lambda} c_{\beta\lambda}{}^*) + M^\beta a_*{}^{\alpha\lambda} c_{\beta\lambda}{}^* \nabla_\alpha \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{m}_* \}\, d\sigma +$$

$$+ \int\limits_{C} (\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{\Phi} - \omega_\alpha{}^* n^\alpha \delta G - G n^\alpha \nabla_\alpha \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{m}_*)\, ds \tag{6.12}$$

и выясним, при каких условиях имеет место уравнение (6.11).

Для этого представим его в виде

$$\delta A' = \iint\limits_{\sigma} \{ e_{\alpha\beta}{}^* \delta s^{\alpha\beta} - (\nabla_\alpha{}^* \omega_\beta{}^* + b^*{}_\alpha^\gamma e_{\beta\gamma}{}^*)\, \delta M^{\alpha\beta} \}\, d\sigma + \tag{6.13}$$

$$+ \iint\limits_{\sigma} \Big\{ M^{\alpha\beta} \delta [(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^* - 1)\, b_{\alpha\beta} + a_*{}^{\gamma\lambda} P_{\gamma,\,\alpha\beta} \omega_\lambda{}^*] + s^{\alpha\beta} (e_{\alpha\lambda} \delta e_{\beta\cdot}^{\lambda} + \omega_\alpha \delta \omega_\beta) \} \, d\sigma$$

причем здесь второй интеграл равен:

$$I_2 = \iint_\sigma \{M^{\alpha\beta}[\omega_\gamma{}^*\delta(a_*{}^{\gamma\lambda}P_{\lambda,\alpha\beta}) - \nabla_\alpha{}^*\nabla_\beta \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{m}_*] + s^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\mathbf{v}\cdot\delta\boldsymbol{\rho}_\beta{}^*\}\,d\sigma \tag{6.14}$$

так как

$$e_{\alpha\lambda}\,\delta e_{\beta}^{\lambda}\cdot + \omega_\alpha\,\delta\omega_\beta = \nabla_\alpha\mathbf{v}\cdot\delta\boldsymbol{\rho}_\beta{}^*$$

$$\mathbf{m}b_{\alpha\beta}\cdot\delta\mathbf{m}_* + a_*{}^{\gamma\lambda}P_{\lambda,\alpha\beta}\delta\omega_\gamma{}^* = -\nabla_\alpha{}^*\nabla_\beta\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{m}_*$$

Или на основании уравнений равновесия (3.12), (3.13), и (3.14) интегрированием по частям при помощи (6.5) имеем

$$I_2 = \iint_\sigma (\mathbf{X}^\beta\mathbf{v}\cdot\delta\boldsymbol{\rho}_\beta{}^* + \mathbf{X}^3\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{m}_* + \nabla_\beta\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{m}_*\cdot a_*{}^{\gamma\beta}c_{\alpha\gamma}{}^*M^\alpha)\,d\sigma +$$

$$+\int_C(\mathbf{v}\Phi^\alpha\cdot\delta\rho_\alpha{}^* + \mathbf{v}\Phi^3\cdot\delta\mathbf{m}_* - n^\alpha\nabla_\alpha\mathbf{v}\cdot G\delta\mathbf{m}_* + v_\gamma{}^*H_2\tau^\alpha\delta b^{*\gamma}_{\alpha})\,ds +$$

$$+\iint_\sigma \{v_\beta{}^*[Q^\alpha\delta^*\, b^\beta_\alpha - (s^{\alpha\gamma} - {}^*b^\gamma_\lambda M^{\lambda\alpha})\,\delta\,(a_*{}^{\beta\nu}P_{\nu,\alpha\gamma})] -$$

$$- w^*(s^{\alpha\beta} - {}^*b^\beta_\gamma M^{\gamma\alpha})\,\delta b_{\alpha\beta}{}^* + M^{\alpha\beta}\omega_\gamma{}^*\delta\,(a_*{}^{\gamma\nu}P_{\nu,\alpha\beta})\}\,d\sigma \tag{6.15}$$

Первый интеграл в (6.13) по виду совпадает с правой частью (6.8). Поэтому в результате интегрирования по частям из I_1 получим уравнения равновесия и граничные условия с варьированными усилиями и моментами при неизменных коэффициентах первой и второй квадратичных форм деформированной поверхности. Учитывая это и подставляя (6.15) в (6.13), окончательно получим

$$\int_C\Big\{v_\alpha{}^*\delta\,(\Phi^\alpha - T_1{}^{\alpha\beta}n_\beta - {}^*b^{\alpha}_{\beta}\tau^\beta H_2) + w^*\delta\left(\Phi_3 - Q^\alpha n_\alpha + \frac{\partial H_2}{\partial s}\right) - \tag{6.16}$$

$$-\omega_\alpha{}^*n^\alpha\delta\left(G - \sqrt{\frac{a_*}{a}}\,\frac{ds}{ds^*}\,M^{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\right)\Big\}\,ds =$$

$$= \iint_\sigma\Big\{\omega_\beta{}^*[\nabla_\alpha\delta M^{\alpha\beta} + \delta\,(a_*{}^{\beta\gamma}P_{\gamma,\alpha\lambda}M^{\alpha\lambda}) - \delta Q^\beta - \delta\,(M^\alpha a_*{}^{\beta\lambda}c_{\alpha\lambda}{}^*)] - v_\beta{}^*[\nabla_\alpha\delta T_1{}^{\alpha\beta} +$$

$$+ \delta(a_*{}^{\beta\lambda}P_{\gamma,\alpha\lambda}T_1{}^{\alpha\lambda}) - \delta\,({}^*b^\beta_\alpha Q^\alpha) + \delta X^\beta] - w^*[\nabla_\alpha\,\delta Q^\alpha + \delta\,(b_{\alpha\beta}{}^*T_1{}^{\alpha\beta}) + \delta X^3]\Big\}\,d\sigma$$

где обозначено $T_1{}^{\alpha\beta} = s^{\alpha\beta} - {}^*b^\beta_\gamma M^{\gamma\alpha}$.

Итак, вариационное уравнение (6.11) имеет место, если:

а) варьируется диада перемещений [1];

б) вариации усилий и моментов удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\nabla_\alpha\delta T_1{}^{\alpha\beta} + \delta\,(a_*{}^{\beta\gamma}P_{\gamma,\alpha\lambda}T_1{}^{\alpha\lambda}) - \delta\,({}^*b^\beta_\alpha Q^\alpha) + \delta X^\beta = 0 \tag{6.17}$$

$$\nabla_\alpha\delta Q^\alpha + \delta\,(b_{\alpha\beta}{}^*T_1{}^{\alpha\beta}) + \delta X^3 = 0 \tag{6.18}$$

$$\nabla_\alpha\delta M^{\alpha\beta} + \delta\,(a_*{}^{\beta\gamma}P_{\gamma,\alpha\lambda}M^{\alpha\lambda}) - \delta Q^\beta - \delta\,(M^\alpha a_*{}^{\beta\lambda}c_{\alpha\lambda}) = 0 \tag{6.19}$$

---

[1] Вариации компонент диады связаны соотношениями [11]

$$c^{\beta\gamma}\nabla_\gamma\delta e_{\beta\alpha} = c^{\beta\gamma}b_{\gamma\alpha}\delta\omega_\beta, \qquad c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\delta\omega_\beta = c^{\alpha\beta}b^\gamma_\beta\,\delta e_{\alpha\gamma}$$

в) на контуре недеформированной оболочки вариации усилий и моментов удовлетворяют статическим граничным условиям

$$\delta\Phi^{\alpha} = n_{\beta}\delta T_1^{\alpha\beta} + \tau^{\beta}\delta\,({}^*b^{\alpha}_{\beta}H_2), \qquad \delta\Phi_3 = n_{\alpha}\delta Q^{\alpha} - \frac{\partial \delta H_2}{\partial s}$$
$$\delta G = n_{\alpha}n_{\beta}\,\delta\left(\sqrt{\frac{a_*}{a}}\,\frac{ds}{ds^*}\,M^{\alpha\beta}\right) \tag{6.20}$$

В уравнениях (6.17), (6.18) и (6.19) коэффициенты $a_*^{\lambda\gamma}P_{\gamma,\,\alpha\beta}$ и ${}^*b_{\alpha}^{\beta}$ варьируются, ибо они зависят от усилий и моментов.

В случае среднего изгиба уравнение (6.11) упрощается:

$$\iint_{\sigma}(\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{X} + \omega_{\alpha}a^{\alpha\lambda}c_{\beta\lambda}\delta M^{\beta})\,d\sigma + \int_{C}(\mathbf{v}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi} - \omega_{\alpha}n^{\alpha}\delta G)\,ds =$$
$$= \frac{1}{2}\,\delta\iint_{\sigma}(s^{\alpha\beta}p_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta}q_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha}\omega_{\beta}s^{\alpha\beta})\,d\sigma \tag{6.21}$$

так как в этом случае

$$\omega_{\alpha}^* = \omega_{\alpha}, \qquad 2F = s^{\alpha\beta}p_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta}q_{\alpha\beta}, \qquad \mathbf{m}\mathbf{m}_* - 1 \sim e_{\alpha\lambda}e^{\lambda}_{\beta} \sim \varepsilon_p{}^2$$

Предположим, что $\delta\mathbf{X} = 0$, $\mathbf{M} = 0$ и что на контуре недеформированной оболочки выполняется условие

$$\int_{C}\left(\mathbf{v}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi} - \omega_{\alpha}{}^*n^{\alpha}\delta G - Gn^{\alpha}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x^{\alpha}}\cdot\delta\mathbf{m}_*\right)ds = 0 \tag{6.22}$$

Тогда имеет место теорема: истинное напряженное состояние оболочки отличается от всех статических возможных состояний тем, что для него функционал

$$R = \iint_{\sigma}\left\{F + M^{\alpha\beta}[(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}^* - 1)\,b_{\alpha\beta} + a_*{}^{\lambda\gamma}O_{\gamma,\,\alpha\beta}\,\omega^*{}_{\lambda}] + \frac{1}{2}S^{\alpha\beta}\,(e_{\alpha\lambda}\,e^{\lambda}_{\beta\cdot} + \omega_{\alpha}\omega_{\beta})\right\}d\sigma \tag{6.23}$$

имеет стационарное значение: $\delta R = 0$.

Эта теорема и выражает начало возможных изменений напряженного состояния в нелинейной теории оболочек.

В случае бесконечно малых перемещений стационарное значение есть минимум, а $\delta R = 0$ выражает начало Кастильяно.

Контурное условие (6.22) выполняется, например, если:

1) контур свободный

$$\Phi^{\alpha} = \Phi^3 = G = 0 \tag{6.24}$$

2) контур жестко защемлен

$$\mathbf{v} = \omega_{\alpha}{}^*n^{\alpha} = 0 \qquad (\delta\mathbf{m}^* = \delta\mathbf{m} = 0) \tag{6.25}$$

3) часть контура свободна, а другая часть защемлена;

4) контур шарнирно неподвижно оперт

$$\mathbf{v} = 0, \qquad G = 0 \tag{6.26}$$

5) контур свободно оперт

$$w = 0, \qquad \Phi^{\alpha} = G = 0 \tag{6.27}$$

Уравнение $\delta R = 0$ является вариационной формулировкой условий неразрывности конечных деформаций оболочки.

В самом деле, полагая

$$S^{\alpha\beta}\boldsymbol{\rho}_\beta{}^* + M^{\alpha\beta}\mathbf{m}_\beta{}^* + \mathbf{m}^* Q^\alpha = C^{\alpha\beta}\triangle_\beta\boldsymbol{\varphi}$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор функции напряжения, уравнения равновесия (3.12) и (3.13) при $\mathbf{X} = \mathbf{M} = 0$ удовлетворяются и в силу контурного условия (6.22)

$$\delta R = -\iint\limits_\sigma C^{\alpha\beta}\nabla_\beta\boldsymbol{\rho}_{\alpha\cdot}{}^*\delta\boldsymbol{\varphi} = 0$$

Раскрывая это при помощи (1.10), формул Бианки и тождеств Риччи, найдем условия неразрывности конечных деформаций:

$$C^{\beta\gamma}c^{\sigma\alpha}\left(\nabla_\gamma\nabla_\alpha p_{\sigma\beta} - \frac{1}{2} q_{\alpha\beta}q_{\gamma\sigma} + \frac{1}{2} a_*{}^{\pi\lambda}P_{\pi,\,\alpha\beta}P_{\lambda,\,\sigma\gamma}\right) -$$
$$-\left(2Ha^{\alpha\beta} - b^{\alpha\beta}\right) q_{\alpha\beta} - Ka^{\alpha\beta}p_{\alpha\beta} = 0$$
$$C^{\beta\gamma}\left\{\nabla_\gamma q_{\alpha\beta} - a_*{}^{\sigma\lambda}\left(b_{\lambda\gamma} + q_{\lambda\gamma}\right) P_{\sigma,\,\alpha\beta} = 0\right.$$

где H и K — средняя и гауссова кривизна недеформированной поверхности.

Допустим, что в рассматриваемой задаче потеря точности не возникает. Тогда можно пренебречь произведениями $S^{\alpha\beta}e_{\alpha\lambda}e_\beta^\lambda$ и в функционале R допускаются к вариации вектор функции напряжения $\boldsymbol{\psi}$ и два угла поворота ω_α. Если к тому же оболочка пологая или если w — быстро изменяющаяся функция (местная потеря устойчивости, краевой эффект), то члены $b_\alpha^\lambda v_\lambda$ малы по сравнению с $\nabla_\alpha w$ и, следовательно, $w_\alpha \approx \nabla_\alpha w$.

В этом случае к вариации допускаются функции $\boldsymbol{\psi}$ и w (см. работу Н. А. Алумяэ[1]). В общем случае в отличие от линейной теории вариация напряженного состояния оболочки сопровождается вариацией трех углов поворота: $\Omega = \frac{1}{2} c^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}$ и ω_α. Это обстоятельство затрудняет применение начала Кастильяно к конкретным задачам. Но в случае однородных уравнений параметры $e_{\alpha\beta}$ и ω_α могут быть исключены.

§7. Вариационная формула, соответствующая однородным уравнениям равновесия. Предположим, что $X = M = 0$, и рассмотрим интеграл

$$I_\sigma = \iint\limits_\sigma \left\{\frac{1}{2}\nabla_\alpha\mathbf{V}\cdot\nabla_\beta\mathbf{V}\cdot S^{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}[(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}^* - 1)\; b_{\alpha\beta} + a_*{}^{\lambda\gamma}P_{\gamma,\,\alpha\beta}\omega_\lambda{}^*]\right\} d\sigma \quad (7.1)$$

Внося в него вместо $S^{\alpha\beta}$ и $M^{\alpha\beta}$ их выражения через функции напряжения (3.24) и (3.25) и интегрируя результат по частям, получим

$$I_\sigma = I_C - \iint\limits_{\sigma^*}\Big\{ \psi_\gamma c_*{}^{\alpha\pi}c_*{}^{\beta\gamma}\left[\nabla_\pi{}^*\left(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}^* b_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} + a_*{}^{\lambda\nu}P_{\nu,\,\alpha\beta}\omega_\lambda{}^*\right) + \right.$$
$$\left. + {}^*b_\alpha^\lambda\,\nabla_\lambda\mathbf{V}\cdot\nabla_\pi{}^*\nabla_\beta\mathbf{V}\right] + \psi c_*{}^{\alpha\pi}c_*{}^{\beta\gamma}\Big[(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}^* - 1)\, b_{\alpha\beta} + a_*{}^{\lambda\nu}P_{\nu,\,\alpha\beta}\omega_\lambda{}^* +$$
$$+\frac{1}{2}\,{}^*b_\alpha^\lambda\nabla_\beta\mathbf{V}\cdot\nabla_\lambda\mathbf{V}\Big]\, b_{\pi\gamma}{}^*\Big\}\, d\sigma^* \quad (7.2)$$

$$I_C = \int\limits_{C^*} C_*{}^{\alpha\pi}c_*{}^{\beta\gamma}\Big\{\frac{1}{2}\nabla_\alpha\mathbf{V}\cdot\nabla_\beta\mathbf{V}\cdot(\nabla_\gamma\psi + {}^*\, b_\gamma^\sigma\psi_\sigma) + \frac{1}{2}\,\psi_\gamma{}^*b_\alpha^\lambda\,\nabla_\lambda\mathbf{V}\cdot\nabla_\beta\mathbf{V} +$$
$$+\psi_\gamma\left[(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}^* - 1)\, b_{\alpha\beta} + a_*{}^{\lambda\nu}P_{\nu,\alpha\beta}\omega_\lambda{}^*\right]\Big\}\, n_\pi{}^* ds^* \quad (7.3)$$

Чтобы преобразовать двойной интеграл в (7.2), заметим, что

$$(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}^* - 1)\, b_{\alpha\beta} + a_*^{\lambda\nu} P_{\nu,\,\alpha\beta}\omega_\lambda^* + \tfrac{1}{2} {}^*b_\alpha^\lambda \nabla_\beta \mathbf{V}\cdot\nabla_\lambda\mathbf{V} = q_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha{}^*\omega_\beta{}^* - p_{\alpha\beta} \quad (7.4)$$

$$A_{\pi\alpha\beta} = \nabla_\pi{}^*[(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}^* - 1)\, b_{\alpha\beta} + a_*^{\lambda\nu} P_{\nu,\,\alpha\beta}\,\omega_\lambda{}^*] + {}^*b_\alpha^\lambda \nabla_\lambda\mathbf{V}\cdot\nabla_\pi{}^*\nabla_\beta\mathbf{V} =$$
$$= \nabla_\pi{}^*[(\mathbf{m}^* - \mathbf{m})\cdot\nabla_\alpha{}^*\boldsymbol{\rho}_\beta] + {}^*b_\alpha^\lambda \nabla_\lambda\mathbf{V}\cdot\nabla_\pi{}^*(\boldsymbol{\rho}_\beta{}^* - \boldsymbol{\rho}_\beta) =$$
$$= (\mathbf{m}^* - \mathbf{m})\cdot\nabla_\pi{}^*\nabla_\alpha{}^*\boldsymbol{\rho}_\beta + \nabla_\alpha{}^*\boldsymbol{\rho}_\beta\cdot(b_\pi^\lambda\boldsymbol{\rho}_\lambda - {}^*b_\pi^\lambda\boldsymbol{\rho}_\lambda{}^*) +$$
$$+ {}^*b_\alpha^\lambda\nabla_\lambda\mathbf{V}\cdot(b_{\pi\beta}{}^*\mathbf{m}_* - b_{\pi\beta}\mathbf{m} + a_*^{\mu\nu}P_{\nu,\,\pi\beta}\boldsymbol{\rho}_\mu) =$$
$$= (\mathbf{m}^* - \mathbf{m})\cdot\nabla_\pi{}^*\nabla_\alpha{}^*\boldsymbol{\rho}_\beta + (b_{\alpha\beta}\mathbf{m} - \boldsymbol{\rho}_\nu a_*^{\nu\mu}P_{\mu,\,\alpha\beta})\cdot(b_\pi^\lambda\boldsymbol{\rho}_\lambda - {}^*b_\pi^\lambda\boldsymbol{\rho}_\lambda{}^*) +$$
$$+ {}^*b_\alpha^\lambda(b_{\pi\beta}{}^*\omega_\lambda{}^* - b_{\pi\beta}\omega_\lambda + a_*^{\mu\nu}P_{\nu,\,\pi\beta}e_{\lambda\mu}) =$$
$$= (\mathbf{m}^* - \mathbf{m})\cdot\nabla_\pi{}^*\nabla_\alpha{}^*\boldsymbol{\rho}_\beta - \omega_\lambda(b_{\alpha\beta}{}^*b_\pi^\lambda + b_{\pi\beta}{}^*b_\alpha^\lambda) +$$
$$+ a_*^{\mu\nu}P_{\mu,\,\alpha\beta}(q_{\pi\nu} - {}^*b_\pi^\lambda e_{\nu\lambda}{}^*) + a_*^{\mu\nu}P_{\nu,\,\pi\beta}{}^*b_\alpha^\lambda e_{\lambda\mu} + {}^*b_\alpha^\lambda b_{\pi\beta}{}^*\omega_\lambda{}^*$$

Заметив, что

$$c_*^{\beta\gamma}c_*^{\alpha\pi}\nabla_\pi{}^*\nabla_\alpha{}^*\boldsymbol{\rho}_\beta\cdot(\mathbf{m}^* - \mathbf{m}) = \tfrac{1}{2}c_*^{\beta\gamma}c_*^{\alpha\pi}R^*{}_{\pi\alpha\beta}^{\ \ \ \lambda}\cdot\boldsymbol{\rho}_\lambda\cdot(\mathbf{m}^* - \mathbf{m}) = -c_*^{\alpha\pi}c_*^{\beta\gamma}b_{\pi\beta}{}^*{}^*b_\alpha^\lambda\omega_\lambda{}^*$$

$$c_*^{\alpha\pi}c_*^{\beta\gamma}\omega_\lambda(b_{\alpha\beta}{}^*b_\pi^{\ \lambda} + b_{\pi\beta}{}^*b_\alpha^\lambda) = 0$$

$$c_*^{\alpha\pi}c_*^{\beta\gamma}(-a_*^{\mu\nu}P_{\mu,\,\alpha\beta}{}^*b_\pi^\lambda e_{\nu\lambda}{}^* + a_*^{\mu\nu}P_{\nu,\,\pi\beta}{}^*b_\alpha^\lambda e_{\lambda\mu}) = 2c_*^{\alpha\pi}c_*^{\beta\gamma}{}^*b_\beta^\sigma a_*^{\lambda\mu}P_{\mu,\,\alpha\gamma}p_{\lambda\sigma}$$

и что

$$c_*^{\alpha\pi}c^{\beta\pi}A_{\pi\alpha\beta}\psi_\gamma = c_*^{\alpha\pi}c_*^{\beta\gamma}(q_{\pi\nu}P_{\mu,\,\alpha\beta} + 2p_{\nu\sigma}{}^*b_\beta^\sigma P_{\mu,\,\alpha\gamma})\,a_*^{\mu\nu}\psi_\gamma \quad (7.5)$$

Тогда интеграл (7.2) с учетом (7.4) и (7.5) примет вид: (7.6)

$$I_\sigma = I_{C^*} - \iint\limits_{\sigma^*} c_*^{\alpha\pi}c_*^{\beta\gamma}[(q_{\pi\nu} - 2p_{\nu\sigma}{}^*b_\pi^\sigma)\,a_*^{\mu\nu}P_{\mu,\,\alpha\beta}\psi_\gamma + \psi b_{\pi\gamma}{}^*(q_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha{}^*\omega_\beta{}^* - p_{\alpha\beta})]\,d\sigma^*$$

Чтобы исключить отсюда $\nabla_\alpha{}^*\omega_\beta{}^*$, рассмотрим интеграл

$$I = \iint\limits_{\sigma^*} c_*^{\alpha\pi}c_*^{\beta\gamma}\psi\nabla_\gamma{}^*\nabla_\pi{}^*p_{\alpha\beta}d\sigma^* = \iint\limits_{\sigma^*} c_*^{\alpha\pi}c_*^{\beta\gamma}\psi\nabla_\gamma{}^*\nabla_\pi{}^*(e_{\alpha\beta}{}^* - \tfrac{1}{2}\nabla_\alpha\mathbf{V}\cdot\nabla_\beta\mathbf{V})d\sigma^* =$$
$$= \iint\limits_{\sigma^*} c_*^{\alpha\pi}c_*^{\beta\gamma}\psi\nabla_\gamma{}^*\nabla_\pi{}^*e_{\alpha\beta}{}^*d\sigma^*$$

В силу тождеств $c_*^{\alpha\pi}\nabla_\pi{}^*e_{\alpha\beta}{}^* = c_*^{\alpha\pi}b_{\pi\beta}{}^*\omega_\alpha{}^*$ он равен:

$$I = \iint\limits_{\sigma^*} c_*^{\alpha\pi}c_*^{\beta\gamma}\psi b_{\pi\beta}{}^*\nabla_\gamma{}^*\omega_\alpha{}^*d\sigma^*$$

Подставляя это в (7.6), имеем

$$I_\sigma = I_{C^*} - \iint\limits_{\sigma^*} c_*^{\alpha\pi}c_*^{\beta\gamma}[(q_{\pi\lambda} - 2p_{\lambda\sigma}{}^*b_\pi^\sigma)\ a_*^{\mu\lambda}P_{\mu,\,\alpha\beta}\psi_\gamma +$$
$$+ \psi(b_{\pi\gamma}{}^*q_{\alpha\beta} - b_{\pi\gamma}{}^*p_{\alpha\beta} + \nabla_\gamma{}^*\nabla_\pi{}^*p_{\alpha\beta})]\,d\sigma^*$$

или, внося сюда вместо $C_*^{\alpha\pi}C_*^{\beta\gamma}\nabla_\gamma{}^*\nabla_\pi{}^*p_{\alpha\beta}$ его значение, взятое из условий неразрывности деформации, отнесенных к системе координат деформированной поверхности[11]:

$$C_*^{\alpha\pi}C_*^{\beta\gamma}\left(\nabla_\gamma{}^*\nabla_\pi{}^* p_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}q_{\pi\beta}q_{\alpha\gamma}-\frac{1}{2}b_{\alpha\gamma}{}^*q_{\pi\beta}-\frac{1}{2}q_{\alpha\gamma}b_{\pi\beta}{}^*+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}a^{\lambda\nu}P_{\lambda,\pi\beta}{}^*P_{\nu,\alpha\gamma}{}^*\right)=K^*a_*^{\alpha\beta}p_{\alpha\beta} \tag{7.7}$$

где $a^{\lambda\nu}P_{\nu,\alpha\gamma}{}^*=a_*^{\lambda\nu}P_{\nu,\alpha\gamma}$, $K=\det({}^*b_\beta^\sigma)$, находим

$$I_\sigma=I_{C^*}-\iint_{\sigma^*}C^{\alpha\pi}C^{\beta\gamma}\Big[(q_{\pi\lambda}-2p_{\lambda\sigma}{}^*b_\pi^\sigma)\ a_*^{\mu\lambda}P_{\mu,\alpha\beta}\psi_\gamma'+\frac{1}{2}\psi'(q_{\pi\gamma}q_{\alpha\beta}-$$
$$-a_*^{\lambda\nu}a_*^{\mu\sigma}a_{\mu\nu}P_{\lambda,\pi\beta}P_{\sigma,\alpha\gamma})\Big]d\sigma\qquad\left(\psi'=\psi\sqrt{\frac{a}{a_*}},\ \ \psi_\gamma'=\psi_\gamma\sqrt{\frac{a}{a^*}}\right) \tag{7.8}$$

Преобразуем теперь контурный интеграл (7.3). Учитывая формулы 6.4) и формулы $2(e_{\alpha\beta}{}^*-p_{\alpha\beta})=(\nabla_\alpha V)(\nabla_\beta V)$, имеем

$$I_C=-\int_{C^*}C_*^{\alpha\pi}C_*^{\beta\gamma}\left[(\nabla_\gamma\psi+{}^*b_\gamma^\sigma\psi_\sigma)\,p_{\alpha\beta}+\psi_\gamma{}^*b_\alpha^\lambda\,p_{\beta\lambda}-q_{\alpha\beta}\psi_\gamma\right]n_\pi{}^*\,ds^*+$$
$$+\int_{C^*}C_*^{\alpha\pi}C_*^{\beta\gamma}\left[e_{\alpha\beta}{}^*(\nabla_\gamma\psi+{}^*b_\gamma^\sigma\psi_\sigma)-\psi_\sigma\nabla_\alpha{}^*\omega_\beta{}^*\right]n_\pi{}^*ds^* \tag{7.9}$$

При выполнении краевых условий (6.24) — (6.27) из (6.9) получим

$$\iint_{\sigma^*}C_*^{\alpha\pi}C_*^{\beta\gamma}\left[\nabla_\pi{}^*(\nabla_\gamma\psi+{}^*b_\gamma^\sigma\psi_\sigma)\ e_{\alpha\beta}{}^*-\nabla_\alpha{}^*\omega_\beta{}^*(\nabla_\pi{}^*\psi_\gamma-b_{\pi\gamma}{}^*\psi)\right]d\sigma^*=0$$

Откуда интегрированием по частям имеем

$$\int_{C^*}C_*^{\alpha\pi}C_*^{\beta\gamma}\left[(\nabla_\gamma\psi+{}^*b_\gamma^\sigma\psi_\sigma)\,e_{\alpha\beta}{}^*n_\pi{}^*-\omega_\beta{}^*(\nabla_\pi{}^*\psi_\gamma-b_{\pi\gamma}{}^*\psi)\ n_\alpha{}^*\right]ds^*=0$$

Это позволяет второй интеграл в (7.9) представить в виде

$$I_C'=\int_{C^*}C_*^{\alpha\pi}C_*^{\beta\gamma}\left[e_{\alpha\beta}{}^*(\nabla_\gamma\psi+{}^*b_\gamma^\sigma\psi_\sigma)-\psi_\gamma\nabla_\alpha{}^*\omega_\beta{}^*\right]n_\pi{}^*ds^*=$$
$$=\mathrm{const}-\int_{C^*}C_*^{\alpha\pi}C_*^{\beta\gamma}\omega_\beta{}^*b_{\pi\gamma}\psi n_\alpha{}^*ds^*$$

Далее, так как $C_*^{\alpha\pi}C_*^{\beta\gamma}b_{\pi\gamma}{}^*\omega_\beta{}^*=C_*^{\alpha\pi}C_*^{\beta\gamma}\nabla_\gamma{}^*e_{\beta\pi}{}^*=C_*^{\alpha\pi}C_*^{\beta\gamma}\nabla_\gamma{}^*p_{\beta\pi}$, то

$$I_C'=\mathrm{const}-\int_{C^*}C_*^{\alpha\pi}C_*^{\beta\gamma}\psi\nabla_\gamma{}^*p_{\beta\pi}n_\alpha{}^*ds^*$$

Тогда вместо (7.9) получим

$$I_C=-\int_C C^{\alpha\pi}C^{\beta\gamma}\left[(\nabla_\gamma\psi'+{}^*b_\gamma^\sigma\psi_\sigma')p_{\alpha\beta}-\psi'\nabla_\gamma{}^*p_{\alpha\beta}+\psi_\gamma{}'^*b_\alpha^\lambda p_{\lambda\beta}-q_{\alpha\beta}\psi_\gamma'\right]n_\pi ds \tag{7.10}$$

Таким образом, функционал R преобразуется к виду

$$R=-\int_C C^{\alpha\pi}C^{\beta\gamma}\left[(\nabla_\gamma\psi'+{}^*b_\gamma^\sigma\psi_\sigma')\,p_{\alpha\beta}-\psi'\nabla_\gamma{}^*p_{\alpha\beta}+\psi_\gamma{}'^*b_\alpha^\lambda p_{\lambda\beta}-\right.$$
$$\left.-q_{\alpha\beta}\psi_\gamma'\right]n_\pi ds-\iint_\sigma C^{\alpha\pi}C^{\beta\gamma}\Big[(q_{\pi\lambda}-2p_{\lambda\sigma}{}^*b_\pi^\sigma)\,a_*^{\mu\lambda}P_{\mu,\alpha\beta}\psi_\gamma'+$$
$$+\frac{1}{2}\psi'(q_{\pi\gamma}q_{\alpha\beta}-a_*^{\lambda\nu}a_*^{\mu\sigma}a_{\mu\nu}P_{\nu\pi\beta}P_{\sigma,\alpha\gamma})\Big]d\sigma+\iint_\sigma F\,d\sigma$$

Здесь величины $p_{\alpha\beta}$ и $q_{\alpha\beta}$ можно выразить через ψ и ψ_α с любой степенью точности.

Следовательно, в состоянии равновесия функционал (7.11) имеет стационарное значение при выполнении статических краевых условий относительно ψ и ψ_α и дополнительного условия (6.22). Из условия стационарности $\delta R = 0$ следуют система трех дифференциальных уравнений для функции ψ и ψ_α (условия неразрывности доформаций, выраженные через ψ и ψ_α) и еще естественные краевые условия для функций напряжений.

В случае малых деформаций (7.11) упрощается и приводится к виду

$$R = -\int\limits_C C^{\alpha\pi} C^{\beta\gamma} (\nabla_\gamma \psi \cdot p_{\alpha\beta} - \psi \nabla_\gamma p_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta} \psi_\gamma) \, n_\pi \, ds + $$
$$+ \frac{1}{2} \iint\limits_\sigma (S^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} + \psi C^{\alpha\pi} C^{\beta\gamma} q_{\pi\gamma} q_{\alpha\beta}) \, d\sigma \qquad (7.12)$$

где

$$S^{\alpha\beta} = C^{\alpha\pi} C^{\beta\gamma} \nabla_\pi (\nabla_\gamma \psi + b_\gamma^\sigma \psi_\sigma + q_\gamma^\sigma \psi_\sigma)$$
$$M^{\alpha\beta} = \left(C^{\alpha\pi} C^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} C^{\alpha\beta} C^{\pi\gamma} \right) (\nabla_\pi \psi_\gamma - b_{\pi\gamma}{}^* \psi) \qquad (7.13)$$

При этих упрощениях допускается погрешность максимум порядка ε_p по сравнению с единицей.

Поступила 13 VII 1951

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Алумяэ Н. А. Применение обобщенного вариационного принципа Кастильяно к исследованию послекритической стадии тонкостенных упругих оболочек. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 1 и 2.
2. Муштари Х. М. Об определении деформаций срединной поверхности оболочки при произвольных изгибах. Труды Казанского химико-технологического ин-та им. С. М. Кирова. 1948. № 13.
3. Гольденвейзер А. А. и Лурье А. И. О математической теории равновесия оболочки. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 5.
4. Алумяэ Н. А. Равновесие тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии. Труды Таллинского политехнического ин-та. Серия А. 1948. ПММ, 1949. Т. VIII. вып. 1.
5. Synge J. and Chien W. Z. Theodore von Karman. Anniversary volume. 1941.
6. Wei-Zang-Chien. Quarterly of Applied Mathematics. 1944. Vol. I. No. 4; Vol. II. No. 1—2.
7. Муштари Х. М. Качественное исследование напряженного состояния оболочки при малых деформациях и произвольных перемещениях. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 2.
8. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. Известия Казанского физико-математического об-ва. 1938. Т. XI. ПММ. 1939. Т. II. Вып. 4.
9. Лурье А. И. Об уравнениях общей теории упругих оболочек. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5.
10. Ильюшин А. А. Пластичность. ОГИЗ. 1948.
11. Галимов К. З. Общая теория оболочек при конечных перемещениях. Известия Казанского филиала АН СССР. 1950. № 2.