Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О ПРИНЦИПАХ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ СТАТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. В. Новожилов
(Ленинград)

В работе [1] в дополнение к общепринятым двум скалярным характеристикам механических свойств изотропных материалов — обобщенному модулю объемного расширения K и обобщенному модулю сдвига G — была введена третья характеристика — фаза подобия девиаторов ω, учитывающая возможность отклонений от закона подобия девиаторов напряжения и деформации. Через эти характеристики

$$K = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{s_1}{e_1}}, \qquad G = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_2}{e_2}}, \qquad \omega = \xi - \psi \tag{0.1}$$

были выражены коэффициенты в формулах (3.6*) и (5.12*), связывающих напряжения и деформации в произвольной нелинейно-упругой изотропной среде (здесь и в дальнейшем звездочками будут отмечаться номера формул работы [1]).

Как будет показано ниже, данные формулы остаются в силе и для неупругой сплошной среды, в соответствии с чем они могут быть применены для обработки результатов статических испытаний любых изотропных материалов. Однако, чтобы получить возможность использовать формулы (3.6*) и (5.12*) в указанном направлении, их необходимо предварительно обобщить на случай больших деформаций, что и является основной целью настоящей работы. Попутно ниже будет дан иной, более простой вывод некоторых из результатов цитированной работы [1], а также будут получены еще три дифференциальных соотношения между K, G и ω (относящиеся к случаю, когда эти величины рассматриваются не как функции инвариантов деформации, а как функции инвариантов напряжения).

1. О применимости результатов работы [1] к неупругим материалам. Покажем, что основной результат работы [1] — формулы (3.6*) и (5.12*), устанавливающие связь между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругих изотропных телах,— остается в силе и для неупругих тел. С этой целью напишем упомянутые формулы, заменив в них K, G и ω их выражениями через инварианты деформации e_1, e_2, ψ и напряжения s_1, s_2, ξ:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_\sigma &= \sqrt{\frac{s_2}{e_2}}\left[\frac{\cos(2\psi+\xi)}{\cos 3\psi}\boldsymbol{D}_\varepsilon - \sqrt{\frac{3}{e_2}}\,\frac{\sin(\xi-\psi)}{\cos 3\psi}\left(\boldsymbol{D}_\varepsilon^2 - \frac{2}{3}s_2 I\right)\right] \\ \boldsymbol{D}_\varepsilon &= \sqrt{\frac{e_2}{s_2}}\left[\frac{\cos(2\xi+\psi)}{\cos 3\xi}\boldsymbol{D}_\sigma + \sqrt{\frac{3}{s_2}}\,\frac{\sin(\xi-\psi)}{\cos 3\xi}\left(\boldsymbol{D}_\sigma^2 - \frac{2}{3}s_2 I\right)\right] \end{aligned} \tag{1.1}$$

и покажем, что эти равенства не предполагают существования между девиаторами $\boldsymbol{D}_\sigma$, $\boldsymbol{D}_\varepsilon$ никакой иной связи, кроме совпадения их главных направлений. Чтобы это доказать, достаточно установить, что равенства

(1.1) удовлетворяются (при любых значениях инвариантов e_1, e_2, ψ, s_1, s_2, ξ) для трех главных направлений рассматриваемых тензоров.

На основании первой из формул (1.1)

$$\sigma_1 - \frac{1}{3}s_1 = \sqrt{\frac{s_2}{e_2}}\left\{\frac{\cos(2\psi+\xi)}{\cos 3\psi}\,\frac{1}{3}(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\frac{3}{e_2}}\,\frac{\sin(\xi-\psi)}{\cos 3\psi}\left[\frac{1}{9}(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 - \frac{2}{3}e_2\right]\right\} \tag{1.2}$$

Подставляя в правую часть этого выражения значения ε_1, ε_2, ε_3 согласно формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_2}\sin\psi + \frac{1}{3}e_1 \\ \varepsilon_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_2}\sin\left(\psi + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{3}e_1 \\ \varepsilon_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_2}\sin\left(\psi + \frac{4}{3}\pi\right) + \frac{1}{3}e_1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

будем иметь

$$\sigma_1 - \frac{1}{3}s_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{s_2}\,\frac{\cos(2\psi+\xi)\sin\psi + \sin(\xi-\psi)\cos 2\psi}{\cos 3\psi} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{s_2}\sin\xi \tag{1.4}$$

Путем аналогичных выкладок можно получить из первой формулы (1.1) еще две формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_2 - \frac{1}{3}s_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{s_2}\sin\left(\xi + \frac{2}{3}\pi\right) \\ \sigma_3 - \frac{1}{3}s_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{s_2}\sin\left(\xi + \frac{4}{3}\pi\right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Но равенства (1.4), (1.5) суть математические определения главных напряжений (через инварианты s_1, s_2, ξ), вытекающие из того факта, что главные напряжения являются корнями известного кубического уравнения. Таким образом, первое из равенств (1.1) справедливо для любых девиаторов $\boldsymbol{D}_\sigma$, $\boldsymbol{D}_\varepsilon$, если только их главные направления совпадают. Совершенно тем же путем аналогичное положение можно доказать и для второго из равенств (1.1).

Замечание 1. Из изложенного выше ясно, что равенства (1.1) сами по себе не дают возможности определять компоненты одного тензора по заданным компонентам другого. Чтобы их можно было использовать в качестве формул, выражающих связь между двумя тензорами, надо их дополнить тремя соотношениями между инвариантами деформации и инвариантами напряжения. Такими дополнительными соотношениями являются например (0.1), если в них рассматривать K, G и ω либо как известные функции e_1, e_2, ψ, либо как известные функции s_1, s_2, ξ в зависимости от того, идет ли речь об определении тензора напряжений по тензору деформации или наоборот. Данные три функции находятся опытным путем и полностью характеризуют способность рассматриваемого изотропного материала сопротивляться деформации.

Из сказанного следует, что теория связи между напряжениями и деформациями в изотропных телах образуется из двух групп формул:

а) тензорных равенств (1.1), выражающих только тот факт, что главные направления девиаторов $\boldsymbol{D}_\sigma$ и $\boldsymbol{D}_\varepsilon$ совпадают;

б) трех скалярных уравнений, характеризующих механические свойства рассматриваемого материала.

При этом первая группа формул остается в силе независимо от того, в каком виде будет задана вторая группа формул.

Замечание 2. В работе [1] имелось в виду применение теории к нелинейно-упругим телам, в соответствии с чем K, G и ω рассматривались как функции e_1, e_2, ψ, подчиняющиеся дифференциальным соотношениям (4.1*). Однако данное ограничение отнюдь не обязательно. K, G и ω могут не подчиняться упомянутым соотношениям, могут быть неоднозначными функциями e_1, e_2, ψ (или s_1, s_2, ξ) и, наконец, могут зависеть не только от конечных значений e_1, e_2, ψ (s_1, s_2, ξ), но и от всех значений, им предшествовавших, т. е. от «пути», по которому развивалась деформация в рассматриваемой точке тела. Все это не является препятствием для использования формул (1.1), если только среда, о которой идет речь, изотропна. Таким образом, можно констатировать, что формулы (3.6*) и (5.12*) справедливы для любых (а не только для упругих) изотропных тел.

2. Приращение работы деформации. Изменение отнесенной к единице объема работы деформации изотропной среды, обусловленное бесконечно малыми приращениями главных удлинений $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$ (которые ввиду малости деформаций отождествляем с приращениями главных компонент тензора деформации), определяется формулой

$$\delta(A) = \sigma_1\delta\varepsilon_1 + \sigma_2\delta\varepsilon_2 + \sigma_3\delta\varepsilon_3 \tag{2.1}$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — главные напряжения, имеющиеся в среде в исходном положении, бесконечно малое изменение которого рассматривается.

Эта формула (справедливая вне зависимости от того, является рассматриваемая среда упругой или пластичной) тождественна выражению

$$\delta(A) = \tfrac{1}{3} s_1\delta e_1 + \tfrac{1}{3}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)\,\delta\varepsilon_1 + \\ + \tfrac{1}{3}(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)\,\delta\varepsilon_2 + \tfrac{1}{3}(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)\,\delta\varepsilon_3 \tag{2.2}$$

в котором

$$s_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \qquad e_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \tag{2.3}$$

Воспользуемся далее равенствами

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{s_2}\sin\xi + \tfrac{1}{3}s_1 \\ \sigma_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{s_2}\sin\left(\xi + \tfrac{2}{3}\pi\right) + \tfrac{1}{3}s_1 \qquad (\sigma_2 \geqslant \sigma_1 \geqslant \sigma_3) \\ \sigma_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{s_2}\sin\left(\xi + \tfrac{4}{3}\pi\right) + \tfrac{1}{3}s_1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned} s_2 &= \tfrac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \\ \operatorname{tg}\xi &= \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3} \qquad \left(-\tfrac{1}{6}\pi \leqslant \xi \leqslant \tfrac{1}{6}\pi\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

На основании (2.4)

$$\begin{aligned} 2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 &= 2\sqrt{3s_2}\sin\xi \\ 2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 &= \sqrt{3s_2}\,(\sqrt{3}\cos\xi - \sin\xi) \\ 2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2 &= -\sqrt{3s_2}\,(\sqrt{3}\cos\xi + \sin\xi) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.2), получаем

$$\delta(A) = \tfrac{1}{3}s_1\delta e_1 + \sqrt{s_2}\cos\xi\,\delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{s_2}\sin\xi\,\delta(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \tag{2.7}$$

Теперь надо использовать формулы (1.3), из которых следуют равенства

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 2\sqrt{e_2}\cos\psi, \qquad 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 2\sqrt{3e_2}\sin\psi \tag{2.8}$$

подставив которые в (2.7), будем иметь

$$\delta(A) = \frac{1}{3}s_1\delta e_1 + 2\sqrt{s_2}\cos\xi\,\delta(\sqrt{e_2}\cos\psi) + 2\sqrt{s_2}\sin\xi\,\delta(\sqrt{e_2}\sin\psi) =$$
$$= \frac{1}{3}s_1\delta e_1 + \sqrt{\frac{s_2}{e_2}}\cos(\xi-\psi)\,\delta e_2 + 2\sqrt{s_2 e_2}\sin(\xi-\psi)\,\delta\psi \tag{2.9}$$

Вводя сюда обозначения (0.1), приходим к окончательной формуле

$$\delta(A) = Ke_1\delta e_1 + 2G(\cos\omega\,\delta e_2 + 2e_2\sin\omega\,\delta\psi) \tag{2.10}$$

определяющей приращение удельной работы деформации по приращениям трех независимых инвариантов деформации e_1, e_2, ψ.

Наряду с этим выражением для приращения работы деформации полезно иметь в виду также следующую формулу:

$$\delta(A) = Ke_1\delta e_1 + 4G\sqrt{e_2}\,[\delta(\sqrt{e_2}\cos\omega) + \sqrt{e_2}\sin\omega\,\delta\xi] \tag{2.11}$$

непосредственно вытекающую из (2.10) после подстановки в нее $\delta\psi = \delta\xi - \delta\omega$. Формула (2.11) представляет интерес ввиду того, что обычно при проведении механических испытаний материалов стремятся соблюдать постоянство вида напряженного состояния, чему соответствует $\delta\xi = 0$. В этом частном случае

$$\delta(A) = Ke_1\delta e_1 + 4G\sqrt{e_2}\,\delta(\sqrt{e_2}\cos\omega) \tag{2.12}$$

Поскольку деформации предполагаются малыми ($\varepsilon_j \ll 1$), инвариант e_1 может быть отождествлен с относительным объемным расширением.

В соответствии с этим первый член формулы (2.10)

$$\delta(A') = Ke_1\delta e_1 = \frac{1}{3}s_1\delta e_1 \tag{2.13}$$

при малых удлинениях имеет определенный физический смысл, являясь той частью приращения удельной работы деформации, которая затрачивается на изменение объема тела. Остальные же члены формулы (2.10)

$$\delta(A'') = 2G(\cos\omega\,\delta e_2 + 2e_2\sin\omega\,\delta\psi) = 4G\sqrt{e_2}\,[\delta(\sqrt{e_2}\cos\omega) + \sqrt{e_2}\sin\omega\,\delta\xi] =$$
$$= 2\sqrt{s_2}\,[\cos\xi\,\delta(\sqrt{e_2}\cos\psi) + \sin\xi\,\delta(\sqrt{e_2}\sin\psi)] \tag{2.14}$$

(при том же условии) определяют часть приращения удельной работы деформации, затрачиваемую на изменение формы тела.

Известно, что за пределом пропорциональности законы, по которым твердые тела сопротивляются изменениям объема и формы, существенно отличаются друг от друга, а именно сопротивление изменению объема остается примерно тем же, как и до предела пропорциональности, а сопротивление изменению формы резко уменьшается. Именно ввиду этого было целесообразно преобразовать выражение для приращения удельной работы деформации (2.1) к виду (2.10), отделив тем самым параметры, характеризующие работу, затрачиваемую на изменение объема, от параметров, характеризующих работу, затрачиваемую на изменение формы.

Из формулы (2.14) следует, что приращение работы изменения формы будет положительным, если

$$\cos \omega \, \delta e_2 + 2e_2 \sin \omega \, \delta\psi > 0 \tag{2.15}$$

что равносильно неравенству

$$\delta (\ln \sqrt{e_2}) > - \operatorname{tg} \omega \, \delta\psi \tag{2.16}$$

В том частном случае, когда в процессе деформации соблюдается постоянство вида напряженного состояния, т. е. при $\delta\xi = 0$ условие (2.16) согласно (2.12) принимает вид;

$$\delta (\sqrt{e_2} \cos \omega) > 0 \tag{2.17}$$

Здесь ω может быть, вообще говоря, отлична от нуля, если рассматриваемый материал не следует закону подобия девиаторов напряжения и деформации.

Если же считать, что этот закон соблюдается, чему соответствует $\omega = 0$, то условие возрастания работы, затрачиваемой на изменение формы, сведется к неравенству

$$\delta (\sqrt{e_2}) > 0 \tag{2.18}$$

совпадающему с известным условием «активности» деформации [2].

Изложенное выше в некоторой мере обобщает и уточняет данное понятие, являющееся в теории пластичности критерием, отличающим нагрузку от разгрузки. В заключение отметим, что все изложенное в этом разделе в равной мере относится к упругим и пластическим изотропным телам.

3. Дифференциальные соотношения между обобщенными модулями упругости. Для идеально упругих тел, а также для некоторых классов деформации упруго-пластических тел [2] приращение удельной работы деформации будет полным дифференциалом некоторой функции, зависящей, если тело изотропно, от трех независимых инвариантов деформации (например, от e_1, e_2, ψ). В этом частном случае

$$\delta (A) = \delta (\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial e_1} \delta e_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial e_2} \delta e_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \delta \psi \tag{3.1}$$

Сопоставляя данное выражение с (1.10), имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial e_1} = K e_1, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial e_2} = 2G \cos \omega, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = 4G e_2 \sin \omega \tag{3.2}$$

Эти формулы, устанавливающие связь между потенциалом деформации и обобщенными модулями упругости, были выведены впервые иным, более сложным путем в работе [1]. Из них сразу же следуют три (приведенные уже в [1]) дифференциальных соотношения:

$$
\begin{gathered}
e_1 \frac{\partial K}{\partial e_2} = 2 \frac{\partial}{\partial e_1} (G \cos \omega) \\
e_1 \frac{\partial K}{\partial \psi} = 4 e_2 \frac{\partial}{\partial e_1} (G \sin \omega) \\
\frac{\partial}{\partial \psi} (G \cos \omega) = 2 \frac{\partial}{\partial e_2} (e_2 G \sin \omega)
\end{gathered} \tag{3.3}
$$

в которых модули K, G и фаза подобия девиаторов ω рассматриваются как функции от инвариантов деформации. Используя результаты, полученные в предыдущем разделе, нетрудно вывести аналогичные соотношения и для случая, когда K, G и ω рассматриваются как функции от инвариантов напряжения. Преследуя эту цель, представим формулу (2.9) в виде

$$
\delta (A) = \delta (\Phi) = \delta \left[\tfrac{1}{3} s_1 e_1 + 2 \sqrt{s_2 e_2} \cos (\xi - \psi)\right] -
$$
$$
- \tfrac{1}{3} e_1 \delta s_1 - 2 \sqrt{e_2} \cos \psi \delta (\sqrt{s_2} \cos \xi) - 2 \sqrt{e_2} \sin \psi \, \delta (\sqrt{s_2} \sin \xi)
$$

Поскольку это выражение считается полным дифференциалом, постольку таковым будет и

$$
\delta (\Psi) = \tfrac{1}{3} e_1 \delta s_1 + 2 \sqrt{e_2} \cos \psi \, \delta (\sqrt{s_2} \cos \xi) + 2 \sqrt{e_2} \sin \psi \, \delta (\sqrt{s_2} \sin \xi) =
$$
$$
= \tfrac{1}{3} e_1 \delta s_1 + \sqrt{\frac{e_2}{s_2}} \cos (\xi - \psi) \, \delta s_2 - 2 \sqrt{s_2 e_2} \sin (\xi - \psi) \, \delta \xi =
$$
$$
= \frac{1}{9} \frac{s_1}{K} \delta s_1 + \frac{1}{2G} [\cos \omega \delta s_2 - 2 s_2 \sin \omega \delta \xi] \tag{3.5}
$$

Отсюда

$$
\frac{\partial \Psi}{\partial s_1} = \frac{1}{9} \frac{s_1}{K}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial s_2} = \frac{\cos \omega}{2G}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = - \frac{s_2 \sin \omega}{G} \tag{3.6}
$$

Из этих формул непосредственно следуют искомые дифференциальные соотношения:

$$
\begin{gathered}
\frac{2}{9} s_1 \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{1}{K}\right) = \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\cos \omega}{G}\right) \\
\frac{1}{9} s_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{K}\right) = - s_2 \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\sin \omega}{G}\right) \\
\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\cos \omega}{G}\right) = - \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{s_2 \sin \omega}{G}\right)
\end{gathered} \tag{3.7}
$$

4. Обобщение теории на случай больших деформаций (первый вариант). Как в работе [1], так и в предыдущих разделах настоящей работы деформации предполагались малыми ($\varepsilon_j \ll 1$), что видно хотя бы из того, что инвариант e_1 до сих пор отождествлялся нами с относительным изменением объема. Поскольку доказанное в разделе 1 значительно расширяет круг возможного применения рассматриваемой теории связи между напряжениями и деформациями, распространяя ее на все (а не только на упругие) изотропные материалы, постольку представляется полезным обобщить данную теорию на область больших деформаций, имея в виду ее применение при обработке результатов статических испытаний. Это обобщение может быть сразу же достигнуто, если учесть сведения, изложенные в главе III книги [4], из которых вытекает, что *все полученные в работе* [1], *а также в предыдущих разделах настоящей работы результаты остаются в силе и при больших деформациях, при условии, что компоненты деформации будут определяться по формулам*

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] = E_x\left(1 + \tfrac{1}{2}E_x\right) \quad \text{и т. д.} \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{и т. д.}$$

а компоненты напряжения будут заменены величинами

$$\sigma_{xx}^* = \sqrt{\frac{(1+2\varepsilon_{yy})(1+2\varepsilon_{zz}) - \varepsilon_{yz}^2}{1+2\varepsilon_{xx}}}\,\sigma_{xx} \quad \text{и т. д.}$$

$$\sigma_{xy}^* = \sigma_{yx}^* = \sqrt{\frac{(1+2\varepsilon_{yy})(1+2\varepsilon_{zz}) - \varepsilon_{yz}^2}{1+2\varepsilon_{yy}}}\,\sigma_{xy} = \tag{4.2}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+2\varepsilon_{xx})(1+2\varepsilon_{zz}) - \varepsilon_{xz}^2}{1+2\varepsilon_{xx}}}\,\sigma_{yx} \quad \text{и т. д,}$$

Здесь $\sigma_{xx},\ldots,\sigma_{xy},\ldots$ суть составляющие напряжений, действующих на грани косоугольного параллелепипеда (в который в результате деформации превращается прямоугольный параллелепипед $dxdydz$), по направлениям ребер этого косоугольного параллелепипеда (см. [4], стр. 78). Величины $\sigma_{xx}^*,\ldots,\sigma_{xy}^*,\ldots$, называемые в дальнейшем приведенными напряжениями, образуют тензор, чего нельзя сказать о физических компонентах напряжения $\sigma_{xx},\ldots,\sigma_{xy},\ldots$

Изложенное выше обобщение теории связи между напряжениями и деформациями на случай больших удлинений математически безупречно и не представляет трудностей, причем сохраняется структура всех формул; однако необходимо отметить, что это обобщение имеет и серьезный недостаток: при нем теряется физический смысл основных величин K, G и e_2.

Замечание. Указанный недостаток наиболее отчетливо обнаруживается при рассмотрении формулы для приращения удельной работы деформации. Последняя, как ясно из сказанного выше, и при больших деформациях может быть преобразована к виду

$$\delta(A) = Ke_1\,\delta e_1 + 2G\left[\cos\omega\,\delta e_2 + 2e_2\sin\omega\,\delta\psi\right] \tag{4.3}$$

причем вычисление инвариантов e_1, e_2, ψ, s_1, s_2, ξ, а следовательно, и вычисление K, G, ω в данном случае надо выполнять, используя при определении компонент тензоров деформации и напряжения формулы (4.1), (4.2). Анализируя формулу (4.3), мы пришли в разделе 2 к заключению, что при малых деформациях первый член ее правой части является приращением работы деформации, затрачиваемой на изменение объема, а остальные члены ее правой части равны в сумме приращению работы деформации, затрачиваемой на изменение формы. Однако при больших деформациях указанные выше члены формулы (4.3) свой физический смысл утрачивают, поскольку инвариант $e_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ в этом случае нельзя отождествлять с относительным объемным расширением (см., например, [4] стр. 47). Вследствие этого при больших деформациях величины K и G теряют свой физический смысл модуля объемного расширения и модуля сдвига, а инвариант $\sqrt{e_2}$ — физический смысл интенсивности деформаций сдвига.

В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли найти иное обобщение рассматриваемой теории на область больших деформаций, свободное от отмеченного выше существенного недостатка? Ответ на этот вопрос будет дан в следующих двух разделах.

5. О некоторых свойствах так называемых «истинных» удлинений.

При экспериментальном изучении больших деформаций широко используются так называемые «истинные» удлинения [6], определяющиеся по формуле

$$\varepsilon_j^\circ = \ln(1 + E_j) = \frac{1}{2}\ln(1 + 2\varepsilon_j) \tag{5.1}$$

где E_j — главные относительные удлинения, ε_j — главные значения компонент деформации.

Важное и общеизвестное свойство этих инвариантов деформации заключается в равенстве

$$e_1^\circ = \varepsilon_1^\circ + \varepsilon_2^\circ + \varepsilon_3^\circ = \ln(1 + E_1)(1 + E_2)(1 + E_3) = \ln(1 + \Delta) \tag{5.2}$$

где Δ — относительное объемное расширение. При этом, поскольку для твердых тел всегда $\Delta \ll 1$, постольку для них с высокой степенью точности $e_1^\circ \approx \Delta$.

Рассмотрим далее формулу для приращения удельной работы деформации изотропного материала, имея в виду случай больших деформаций.

Как следует из выражения (III. 45) книги [4], это приращение (будучи отнесено к единице объема тела до деформации) может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned}\delta(A) = \frac{(1 + E_2)(1 + E_3)}{1 + E_1}\sigma_1\delta\varepsilon_1 + \frac{(1 + E_3)(1 + E_1)}{1 + E_2}\sigma_2\delta\varepsilon_2 + \\ + \frac{(1 + E_1)(1 + E_2)}{1 + E_3}\sigma_3\delta\varepsilon_3\end{aligned} \tag{5.3}$$

или, если учесть (5.1);

$$\begin{aligned}\delta(A) = (1 + E_1)(1 + E_2)(1 + E_3)[\sigma_1\delta\varepsilon_1^\circ + \sigma_2\delta\varepsilon_2^\circ + \sigma_3\delta\varepsilon_3^\circ] = \\ = (1 + \Delta)[\sigma_1\delta\varepsilon_1^\circ + \sigma_2\delta\varepsilon_2^\circ + \sigma_3\delta\varepsilon_3^\circ]\end{aligned} \tag{5.4}$$

Но, как уже было указано, для твердых тел всегда $\Delta \ll 1$ и, следовательно,

$$\delta(A) \approx \sigma_1\delta\varepsilon_1^\circ + \sigma_2\delta\varepsilon_2^\circ + \sigma_3\delta\varepsilon_3^\circ \tag{5.5}$$

Из последней формулы вытекает еще одно свойство «истинных» удлинений (менее популярное, чем предыдущее, но не менее важное): их приращения можно отождествлять с теми виртуальными обобщенными перемещениями, которым (при больших деформациях) соответствуют как обобщенные силы истинные главные напряжения.

6. Обобщение теории на большие деформации (второй вариант). Возвратимся к формуле (2.1) и сопоставим ее с формулой (5.5). Во второй из этих формул σ_1, σ_2, σ_3 имеют тот же физический смысл, как и в первой (истинные главные напряжения), в соответствии с чем к формуле (5.5) могут быть применены все преобразования раздела 2, вплоть до выражения (2.7), которое в данном случае будет иметь вид:

$$\delta(A) = \frac{1}{3} s_1 \delta e_1^\circ + \sqrt{s_2} \cos\xi\, \delta(\varepsilon_2^\circ - \varepsilon_3^\circ) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{s_2} \sin\xi\, \delta(2\varepsilon_1^\circ - \varepsilon_2^\circ - \varepsilon_3^\circ) \tag{6.1}$$

Для возможности дальнейшего преобразования этой формулы введем в дополнение к уже рассматривавшемуся параметру

$$e_1^\circ = \varepsilon_1^\circ + \varepsilon_2^\circ + \varepsilon_3^\circ \approx \Delta \qquad (\varepsilon_2^\circ \geqslant \varepsilon_1^\circ \geqslant \varepsilon_3^\circ) \tag{6.2}$$

еще два параметра

$$e_2^\circ = \frac{1}{6}\left[(\varepsilon_1^\circ - \varepsilon_2^\circ)^2 + (\varepsilon_2^\circ - \varepsilon_3^\circ)^2 + (\varepsilon_3^\circ - \varepsilon_1^\circ)^2\right] \tag{6.3}$$

$$\psi^\circ = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\varepsilon_1^\circ - \varepsilon_2^\circ - \varepsilon_3^\circ}{\varepsilon_2^\circ - \varepsilon_3^\circ}\right) \qquad \left(-\frac{1}{6}\pi \leqslant \psi^\circ \leqslant \frac{1}{6}\right)$$

Путем выражения корней кубического уравнения

$$(\varepsilon - \varepsilon_1^\circ)(\varepsilon - \varepsilon_2^\circ)(\varepsilon - \varepsilon_3^\circ) = 0 \tag{6.4}$$

через его коэффициенты можно притти [1] к заключению, что формулы (6.2), (6.3) могут быть обращены, т. е. что «истинные» удлинения ε_1°, ε_2°, ε_3° могут быть явным образом выражены через параметры e_1°, e_2°, ψ°.

При этом получатся формулы

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^\circ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_2^\circ} \sin\psi^\circ + \frac{1}{3} e_1^\circ \\
\varepsilon_2^\circ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_2^\circ} \sin\left(\psi^\circ + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{3} e_1^\circ \\
\varepsilon_3^\circ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_2^\circ} \sin\left(\psi^\circ + \frac{4}{3}\pi\right) + \frac{1}{3} e_1^\circ
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Параметр e_1°, как было указано в разделе 5, может быть (при любой, а не только при малой деформации) отождествлен с относительным изменением объема Δ. Что же касается параметров $\sqrt{e_2^\circ}$ и ψ°, то они, следуя принятой условной терминологии, могут быть названы «истинными» интенсивностью касательных деформаций и углом вида деформации.

Если все удлинения малы по сравнению с единицей, то

$$e_1^\circ \to e_1, \qquad e_2^\circ \to e_2, \qquad \psi^\circ \to \psi$$

и рассматриваемая теория асимптотически (если можно так выразиться) превращается в теорию малых деформаций.

Если же удлинения сравнимы с единицей, то разница между параметрами e_1°, e_2°, ψ° и e_1, e_2, ψ может быть весьма существенной.

Так, например, при значениях главных удлинений

$$E_1 = 0.333, \qquad E_2 = 0.500, \qquad E_3 = -0.500,$$

имеем

$$e_1 = 0.639, \qquad \sqrt{e_2} = 0.523, \qquad \psi = 0.297$$
$$e_1{}^\circ = 0.000, \qquad \sqrt{e_2{}^\circ} = 0.604, \qquad \psi^\circ = 0.428$$

Из этих цифр видно, что в рассмотренном частном случае отождествлять параметры $e_1{}^\circ$, $e_2{}^\circ$, ψ° с e_1, e_2, ψ нельзя.

Воспользовавшись формулами (6.5), введя их в (6.1) и выполнив затем преобразования, аналогичные разделу 2, получим выражение

$$\delta(A) = Ke_1{}^\circ \, \delta e_1{}^\circ + 2G\left[\cos\omega \, \delta e_2{}^\circ + 2e_2{}^\circ \sin\omega \, \delta\psi\right] \tag{6.6}$$

Здесь K, G и ω вычисляются по формулам

$$K = \frac{1}{3}\frac{s_1}{e_1{}^\circ} = \frac{1}{3}\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\Delta}, \qquad \omega = \xi - \psi^\circ$$
$$G = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_2}{e_2{}^\circ}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}{(\varepsilon_1{}^\circ-\varepsilon_2{}^\circ)^2+(\varepsilon_2{}^\circ-\varepsilon_3{}^\circ)^2+(\varepsilon_3{}^\circ-\varepsilon_1{}^\circ)^2}} \tag{6.7}$$

В такой трактовке формула для приращения удельной работы деформации сохраняет физическую наглядность как при малой, так и при сколько угодно большой деформации, поскольку в том и в другом случае ее первый член выражает приращение работы, идущей на изменение объема, а остальные члены дают в сумме работу, затрачиваемую на изменение формы. В соответствии с этим величины K и G, будучи определены формулами (6.7), при любых деформациях сохраняют физический смысл модуля объемного расширения и модуля сдвига.

Условием возрастания работы, идущей на изменение формы, при больших деформациях будет (согласно (6.6) и сказанному выше) неравенство

$$\cos\omega \, \delta e_2{}^\circ + 2e_2{}^\circ \sin\omega \, \delta e_2{}^\circ > 0 \tag{6.8}$$

или, если предположить, что и при больших деформациях углы вида напряжения и деформации совпадают, более простое неравенство

$$\delta\left(\sqrt{e_2{}^\circ}\right) > 0 \tag{6.9}$$

из которого вытекает, что в качестве меры «активности» деформации при больших удлинениях надо принимать «истинную» интенсивность деформаций сдвига.

Формулы для определения главных «истинных» удлинений через главные напряжения получаются из (6.5), если выразить инварианты $e_1{}^\circ$, $e_2{}^\circ$, ψ° при помощи (6.7) через s_1, s_2, ξ и K, G, ω; при этом будем иметь

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1{}^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{s_2}}{G}\sin(\xi-\omega) + \frac{1}{9}\frac{s_1}{K}, \\
\varepsilon_2{}^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{s_2}}{G}\sin\left(\xi-\omega+\frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{9}\frac{s_1}{K} \\
\varepsilon_3{}^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{s_2}}{G}\sin\left(\xi-\omega+\frac{4}{3}\pi\right) + \frac{1}{9}\frac{s_1}{K}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Если в формулах (2.4) выразить s_1, s_2, ξ при помощи (6.7) через e_1°, e_2°, ψ° и K, G, ω, тогда получим аналогичные соотношения для определения главных напряжений по заданным «истинным» удлинениям:

$$\sigma_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} G\sqrt{e_2^\circ} \sin(\psi^\circ + \omega) + K\Delta$$

$$\sigma_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} G\sqrt{e_2^\circ} \sin\left(\psi^\circ + \omega + \frac{2}{3}\pi\right) + K\Delta \tag{6.11}$$

$$\sigma_3 = \frac{4}{\sqrt{3}} G\sqrt{e_2^\circ} \sin\left(\psi^\circ + \omega + \frac{4}{3}\pi\right) + K\Delta$$

Замечание. Из всего сказанного следует, что рассматриваемый второй вариант теории обладает по сравнению с изложенным в разделе 4 первым вариантом тем несомненным преимуществом, что в нем все характеризующие задачу величины сохраняют наглядный физический смысл не только при малых, но и при больших деформациях.

Ввиду этого есть основание думать, что получающиеся при обработке результатов механических испытаний кривые будут более закономерны и объяснимы физически, если при их построении исходить из второго, а не из первого варианта теории.

Однако второй вариант имеет по сравнению с первым и существенный недостаток, а именно он значительно менее целесообразен в математическом отношении. Дело в том, что «истинные» удлинения удобны и достаточно наглядны только, пока речь идет о деформациях в главных направлениях, и, наоборот, они приводят к ряду затруднений при попытке описать с их помощью всю картину деформации в окрестности произвольной точки тела. Эти затруднения начинаются уже при обобщении понятия «истинного» удлинения (которое выше было сформулировано только для главных направлений) на произвольные направления.

В самом деле, если принять, как это обычно делают, что

$$\varepsilon_{xx}^\circ = \frac{1}{2}\ln(1 + 2\varepsilon_{xx}), \quad \varepsilon_{yy}^\circ = \frac{1}{2}\ln(1 + 2\varepsilon_{yy}), \quad \varepsilon_{zz}^\circ = \frac{1}{2}\ln(1 + 2\varepsilon_{zz}) \tag{6.12}$$

то сумма $\varepsilon^\circ = \varepsilon_{xx}^\circ + \varepsilon_{yy}^\circ + \varepsilon_{zz}^\circ$ не будет равна $e_1^\circ = \varepsilon_1^\circ + \varepsilon_2^\circ + \varepsilon_3^\circ$, и вообще не будет инвариантом.

Не меньшие затруднения возникают в связи с определением в духе теории «истинных» удлинений деформаций сдвига.

Наиболее логичной попыткой описать картину деформации в окрестности произвольной точки тела, исходя из понятия «истинного» удлинения, пожалуй, является построение тензора истинной деформации, который может быть определен как такой симметричный тензор второго ранга, направления главных осей которого совпадают с главными осями деформации, а главные значения которого равны главным «истинным» удлинениям ε_1°, ε_2°, ε_3°.

Главные сдвиги этого тензора будут равны [7]

$$\gamma_{12}^\circ = \varepsilon_1^\circ - \varepsilon_2^\circ, \qquad \gamma_{23}^\circ = \varepsilon_2^\circ - \varepsilon_3^\circ, \qquad \gamma_{31}^\circ = \varepsilon_3^\circ - \varepsilon_1^\circ \tag{6.13}$$

т. е. будет определяться вполне аналогично главным сдвигам при малых деформациях.

Построенный указанным выше путем тензор «истинной» деформации, несомнено, удастся легко и достаточно красиво связать с тензором напряжения.

Совершенно иная картина, однако, получится при попытке выразить компоненты этого тензора через перемещения: соответствующие формулы окажутся настолько сложны, что их использование будет крайне затруднительным.

Ввиду этого вряд ли есть смысл итти в сторону построения тензора «истинной» деформации и, повидимому, излагаемый второй вариант теории должен рассматриваться только в главных напряжениях и деформациях. По крайней мере сегодня мы не имеем иной возможности.

Изложенное в этом разделе является дальнейшим развитием и отчасти критикой идей, которые разделяются, видимо, большинством ученых, работающих в области исследования больших деформаций. Данные идеи нашли свое наиболее полное выражение в книге Г. А. Смирнова-Аляева [5].

7. Еще одна возможность обобщения теории на большие деформации. При обработке результатов статических испытаний материалов нередко в качестве параметров, характеризующих деформацию, используют относительные удлинения E_1, E_2, E_3. В связи с этим возникают следующие два вопроса.

1. Какие величины в данном случае следует принимать в качестве параметров, характеризующих напряженное состояние?

2. Не целесообразно ли перестроить излагаемую теорию, приняв в ней за характеристики деформации относительные удлинения?

Чтобы ответить на эти два вопроса, надо рассмотреть еще один (третий) вариант обобщения рассматриваемой теории на случай больших деформаций.

Начнем с того, что преобразуем формулу для приращения удельной работы деформации (5.3), выразив в ней приращения главных компонент деформации через приращения главных удлинений. Последнее можно выполнить, если учесть, что

$$\varepsilon_j = E_j\left(1 + \tfrac{1}{2} E_j\right) \tag{7.1}$$

Отсюда

$$\delta\varepsilon_j = (1 + E_j)\,\delta E_j \tag{7.2}$$

Подставив (7.2) в (5.3), будем иметь

$$\delta(A) = \sigma_1^{**}\,\delta E_1 + \sigma_2^{**}\,\delta E_2 + \sigma_3^{**}\,\delta E_3 \tag{7.3}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1^{**} &= (1 + E_2)(1 + E_3)\,\sigma_1 \\ \sigma_2^{**} &= (1 + E_3)(1 + E_1)\,\sigma_2 \\ \sigma_3^{**} &= (1 + E_1)(1 + E_2)\,\sigma_3 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Таким образом, если в качестве обобщенных координат, характеризующих деформацию, принять главные относительные удлинения, то обобщенными силами, совершающими работу на приращениях этих координат, будут главные напряжения, отнесенные к размерам площадок до деформации. Тем самым дан ответ на первый из двух поставленных выше вопросов. Формула (7.3) может быть преобразована тем же путем, который был использован для формул (2.1) и (5.5), в итоге чего получится выражение

$$\delta(A) = Ke_1\,\delta e_1 + 2G\left[\cos\omega\,\delta e_2 + 2e_2 \sin\omega\,\delta\psi\right] \tag{7.5}$$

в котором вычисление инвариантов e_1, e_2, ψ надо выполнять по формулам

$$\begin{aligned} e_1 &= E_1 + E_2 + E_3 \qquad (E_2 \geqslant E_1 \geqslant E_3) \\ e_2 &= \tfrac{1}{6}\left[(E_1 - E_2)^2 + (E_2 - E_3)^2 + (E_3 - E_1)^2\right] \\ \psi &= \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2E_1 - E_2 - E_3}{E_2 - E_3} \qquad \left(-\tfrac{1}{6}\pi \leqslant \psi \leqslant \tfrac{1}{6}\pi\right) \end{aligned} \tag{7.6}$$

а вычисление инвариантов s_1, s_2, ξ по формулам

$$
\begin{aligned}
&s_1 = \sigma_1^{**} + \sigma_2^{**} + \sigma_3^{**} && (\sigma_2^{**} \geqslant \sigma_1^{**} \geqslant \sigma_3^{**}) \\
&s_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1^{**} - \sigma_2^{**})^2 + (\sigma_2^{**} - \sigma_3^{**})^2 + (\sigma_3^{**} - \sigma_1^{**})^2\right] && \\
&\xi = \operatorname{ar\,ctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\sigma_1^{**} - \sigma_2^{**} - \sigma_3^{**}}{\sigma_2^{**} - \sigma_3^{**}} && \left(-\frac{1}{6}\pi \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{6}\pi\right)
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

Заметим, что инвариант $e_1 = E_1 + E_2 + E_3$ при больших деформациях не может быть отождествлен с относительным изменением объема. В соответствии с этим параметры, входящие в формулу (7.5), будут иметь наглядный физический смысл только при малых деформациях. При больших же деформациях величины K, G, определенные по формулам (0.1), при подстановке в них (7.6) и (7.7) уже не могут быть названы модулем объемного расширения и модулем сдвига. Таким образом, рассматриваемый (третий) вариант теории обладает тем же недостатком, как и первый вариант. Он обладает также и основным недостатком второго варианта, будучи столь же неудобен в математическом отношении. Отсюда можно сделать вывод (дающий ответ на второй из двух поставленных выше вопросов), что третий вариант вообще нерационален, так как обладает всеми недостатками и ни одним из достоинств двух предыдущих вариантов.

8. **Обзор результатов**. В данной работе установлено, что механические свойства любых (а не только упругих) изотропных материалов следует характеризовать тремя величинами: обобщенным модулем объемного расширения K, обобщенным модулем сдвига G и фазой подобия девиаторов ω, в соответствии с чем основной целью статических испытаний должно являться экспериментальное определение этих величин для различных материалов в различных условиях нагрузки и деформации.

В работе дано (и притом в трех вариантах) обобщение теории связи между напряжениями и деформациями в изотропных телах на случай больших деформаций. При этом выяснилось, что существует определенное соответствие между характеристиками деформации и напряжения, ввиду которого выбор при построении теории тех или иных параметров в качестве характеристик деформации предопределяет, какие параметры должны быть в этой теории приняты в качестве характеристик напряжения.

Так, например, если за обобщенные координаты, характеризующие деформацию, принять компоненты тензора деформации (4.1), то за характеристики напряжения надо принять соответствующие им (как обобщенные силы) компоненты тензора «приведенных» напряжений (4.2). На том же основании, «истинным» удлинениям соответствуют истинные напряжения, а относительным удлинениям — напряжения, вычисленные по размерам площадок до деформации. Со всем этим нельзя не считаться при обработке результатов статических испытаний. В частности, не следует (хотя это иногда и делают) выполнять обработку опытов, принимая за характеристики деформации относительные удлинения, а за характеристики напряженного состояния — истинные напряжения, поскольку такая обработка не сможет служить основой для плодотворных научных обобщений. Аналогично нецелесообразно принимать за характеристики напряженного состояния напряжения, отнесенные к размерам площадок до деформации, если в качестве характеристик деформации приняты «истинные» удлинения.

Из трех предложенных в работе вариантов теории связи между напряжениями и деформациями в сильно деформированных изотропных средах один (названный третьим вариантом) был признан нерациональным, а два других (названные первым и вторым вариантами) были признаны имеющими как преимущества, так и недостатки. При этом первый вариант оказывается более удобным в математическом отношении, но входящие в него, характеризующие задачу величины при переходе к большим деформациям утрачивают физическую наглядность. Второй вариант, наоборот, менее удобен в математическом отношении и более нагляден физически.

Поскольку эти два варианта как бы дополняют друг друга, есть основание думать, что оба они найдут себе применение. В заключение я должен признаться в одной допущенной в работе [1] неточности. Высказанное там утверждение, что, не введя фазы подобия девиаторов, нельзя учесть различие между свойствами материалов на растяжение и сжатие, было поспешным и неправильным. В действительности различие в свойствах материалов на растяжение и сжатие должно быть отнесено не за счет фазы подобия девиаторов, а исключительно за счет влияния среднего нормального напряжения на обобщенный модуль сдвига (что и вытекает из формул работы [1] при более внимательном их рассмотрении).

Поступила 6 VIII 1951

Ленинградский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно упругой среде. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 2.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. I. Гостехиздат. 1948.
3. Качанов Л. М. Механика пластических сред. Гостехиздат. 1948.
4. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат. 1948.
5. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическим деформациям. Машгиз. 1949.
6. Ludwik P. Elemente der technologischen Mechanik. Berlin. Verl. J. Springer. 1909.
7. Nadai A. Plastic behaviour of metals in the strain hardening range. Journ. of Appl. Phys. 1937. Vol. 8. N. 3.