

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

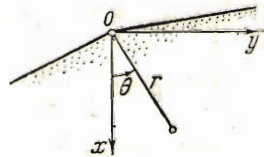
В. В. Соколовский

(Москва)

Особенности сыпучей среды, обладающей внутренним трением, но лишенной сцепления, позволяют получить решения ряда задач теории предельного равновесия иным, более простым путем, чем это можно сделать на основании общей теории, разработанной нами ранее^[1].

Удается также рассмотреть некоторые задачи, в которых одновременно имеют место зоны предельного и упругого состояний. Решение указанных задач, как будет показано в работе, достигается в замкнутом виде либо приводит к интегрированию обыкновенных нелинейных уравнений.

§ 1. Уравнения предельного равновесия в полярных координатах. Предметом нашего исследования будет плоское равновесие тяжелого сыпучего тела, заполняющего область формы клина. При этом будем пользоваться прямолинейной системой координат xu или полярной системой $r\theta$, выбранными так, как это показано на фиг. 1.



Фиг. 1

Напряженное состояние здесь определяется компонентами напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ или компонентами $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$, причем для них принято правило знаков, обычное в теории сыпучих тел, а именно: положительные нормальные напряжения вызывают сжатие, а отрицательные нормальные напряжения — растяжение.

Дифференциальные уравнения равновесия с учетом объемного веса γ в полярной системе $r\theta$ имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \gamma \cos \theta, \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = -\gamma \sin \theta \quad (1.4)$$

а условие предельного состояния, содержащее угол внутреннего трения ρ , напишется так:

$$\frac{1}{4} (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau_{r\theta}^2 = \frac{\sin^2 \rho}{4} (\sigma_r + \sigma_\theta)^2 \quad (1.2)$$

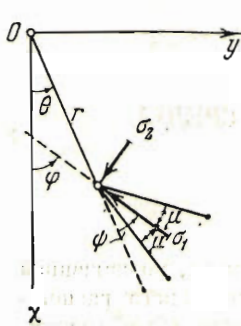
Введем новые переменные σ и ψ , связанные с компонентами напряжения следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = \sigma (1 \pm \sin \rho \cos 2\psi), \quad \tau_{r\theta} = \sigma \sin \rho \sin 2\psi \quad (1.3)$$

Нетрудно показать, что величина ψ есть угол наклона наибольшего главного нормального напряжения σ_1 к радиусу r , проведенному в рас-

смаатриваемую точку; величина $\varphi = \psi + \theta$ есть угол наклона того же главного напряжения σ_1 к оси x (фиг. 2).

Подставляя выражения (1.3) в известные формулы преобразования



Фиг. 2

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta) \pm \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \cos 2\theta \mp \tau_{r\theta} \sin 2\theta$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta$$

легко получить следующие выражения:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \sigma (1 \pm \sin \rho \cos 2\varphi), \quad \tau_{xy} = \sigma \sin \rho \sin 2\varphi \quad (1.4)$$

Многие задачи теории сыпучих тел могут быть рассмотрены в предположении, что σ пропорционально r , а ψ и φ зависят только от θ .

Таким образом, будем считать, что $\psi = \psi(\theta)$, $\varphi = \varphi(\theta)$, и введем новую функцию $s = s(\theta)$ при помощи следующего равенства:

$$\sigma = \gamma r s(\theta)$$

Подставляя в дифференциальные уравнения равновесия (1.1) выражения (1.3), тождественно удовлетворяющие условию (1.2), после преобразований получим

$$\begin{aligned} \sin \rho \sin 2\psi \frac{ds}{d\theta} + 2s \sin \rho \cos 2\psi \left(\frac{d\psi}{d\theta} + 1 \right) &= + \cos \theta - s (1 + \sin \rho \cos 2\psi) \\ (1 - \sin \rho \cos 2\psi) \frac{ds}{d\theta} + 2s \sin \rho \sin 2\psi \left(\frac{d\psi}{d\theta} + 1 \right) &= - \sin \theta - s \sin \rho \sin 2\psi \end{aligned}$$

Разрешая эту систему относительно производных, придем к уравнениям

$$\frac{d\psi}{d\theta} + 1 = \frac{\cos \theta - \sin \rho \cos (2\psi + \theta) - s \cos^2 \rho}{2s \sin \rho (\cos 2\psi - \sin \rho)} \quad (1.5)$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{-\sin (2\psi + \theta) + s \sin 2\psi}{\cos 2\psi - \sin \rho} \quad (1.6)$$

Большой интерес в теории сыпучих тел представляют *линии скольжения*, составляющие два семейства и пересекающиеся между собой под одинаковыми углами:

$$2\mu = \frac{1}{2} \pi - \rho$$

Эти линии наклонены к радиусу r , проведенному в рассматриваемую точку, под углами $\psi \pm \mu$, а к оси x — под углами $\varphi \pm \mu$. Дифференциальные уравнения линий скольжения, таким образом, будут

$$r \frac{d\theta}{dr} = \operatorname{tg} (\psi \pm \mu) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} (\varphi \pm \mu)$$

Отсюда легко получить уравнение линий скольжения, содержащее произвольную постоянную C , такого вида:

$$r = C \exp \left[\int_0^\theta \operatorname{ctg} (\psi \pm \mu) d\theta \right] \quad (1.7)$$

Условимся называть *простейшим* такое напряженное состояние, при котором линиями скольжения являются параллельные прямые; при этом

$$\varphi = \text{const}, \quad s = \frac{\cos \theta - \sin \rho \cos (2\varphi - \theta)}{\cos^2 \rho}$$

Пусть сыпучее тело ограничено наклонной прямой

$$y = -x \operatorname{ctg} \varepsilon$$

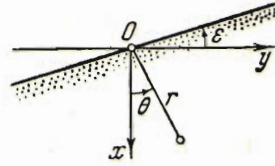
вдоль которой напряжения отсутствуют (фиг. 3). Тогда на этой прямой, т. е. при $\theta = \varepsilon + \frac{1}{2} \pi$, величина $s = 0$, а следовательно,

$$\sin \varepsilon + \sin \rho \sin (2\varphi - \varepsilon) = 0$$

Отсюда нетрудно получить

$$2\varphi = \varepsilon + (x - 1) \frac{\pi}{2} - x \operatorname{arc} \sin \frac{\sin \varepsilon}{\sin \rho} \quad (1.8)$$

$$x = \pm 1$$



Фиг. 3

Внося эту величину в выражение для s и вводя обозначение

$$\lambda = \sin^2 \varepsilon + x \cos \varepsilon \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \varepsilon}$$

получим величину s в виде

$$s = \frac{\cos (\theta - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \cos^2 \rho} (1 - \lambda) \quad (1.9)$$

Величина $\sigma = \gamma r s$ может быть также представлена выражением

$$\sigma = \gamma r \frac{\cos (\theta - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \cos^2 \rho} (1 - \lambda) = \frac{\gamma (x + y \operatorname{tg} \varepsilon)}{\cos^2 \rho} (1 - \lambda)$$

если иметь в виду, что $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Простейшее напряженное состояние удобно рассматривать в прямолинейной системе координат xy . Внося в выражение (1.4) найденные выше величины σ и φ , после простых преобразований будем иметь

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \frac{\gamma (x + y \operatorname{tg} \varepsilon)}{\cos^2 \rho} (1 - \lambda) (1 \pm \lambda), \quad \tau_{xy} = -\frac{\gamma (x + y \operatorname{tg} \varepsilon)}{\cos^2 \rho} \operatorname{tg} \varepsilon (1 - \lambda)^2 \quad (1.10)$$

Двум знакам $x = \pm 1$, входящим в приведенное решение, соответствуют два вида напряженных состояний сыпучего тела.

Для частного случая, когда $\varepsilon = 0$, получим

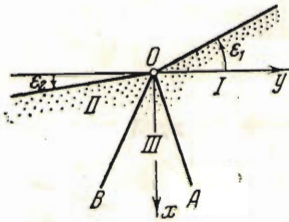
$$\sigma_x = \gamma x, \quad \sigma_y = \gamma x \frac{1 - x \sin \rho}{1 + x \sin \rho}, \quad \tau_{xy} = 0$$

а для другого частного случая, когда $\varepsilon = \rho$, будем иметь

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \gamma (x + y \operatorname{tg} \rho) (1 \pm \sin^2 \rho), \quad \tau_{xy} = -\gamma (x + y \operatorname{tg} \rho) \sin \rho \cos \rho$$

Перейдем теперь к рассмотрению различных задач предельного равновесия тяжелого сыпучего тела формы клина. Во всех этих задачах как раз и применимы уравнения, приведенные выше.

§ 2. Напряженное состояние сыпучего клина, когда угол при вершине больше 180° . Исследуем сначала равновесие сыпучего тела формы клина, стороны которого свободны от напряжений. Оно может быть двух видов в зависимости от того, будет ли этот угол больше или меньше чем 180° . Оба эти случая должны быть изучены отдельно.



Фиг. 4

Если угол при вершине клина больше 180° , то предельное состояние может возникнуть лишь в двух крайних секторах I и II, в то время как в среднем секторе III остается упругое состояние. Эти сектора разделены прямыми $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$, проходящими через точку O и обозначенными OA и OB (фиг. 4).

Простейшее предельное состояние в секторе I для $\alpha \leq \theta \leq \epsilon_1 + \frac{1}{2} \pi$, на основании (1.8) — (1.10) при $\kappa = +1$ определяется величинами

$$2\varphi_1 = \epsilon_1 - \arcsin \frac{\sin \epsilon_1}{\sin \rho}, \quad s_1 = \frac{\cos(\theta - \epsilon_1)}{\cos \epsilon_1 \cos^2 \rho} (1 - \lambda_1) \quad (2.1)$$

$$\lambda_1 = \sin^2 \epsilon_1 + \cos \epsilon_1 \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \epsilon_1}$$

или компонентами напряжения

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \frac{\gamma(x + y \operatorname{tg} \epsilon_1)}{\cos^2 \rho} (1 - \lambda_1) (1 \pm \lambda_1), \quad \tau_{xy} = - \frac{\gamma(x + y \operatorname{tg} \epsilon_1)}{\cos^2 \rho} \operatorname{tg} \epsilon_1 (1 - \lambda_1)^2 \quad (2.2)$$

а простейшее предельное состояние в секторе II для $\epsilon_2 - \frac{1}{2} \pi \leq \theta \leq \beta$ аналогично предыдущему будет определяться величинами

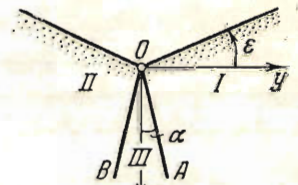
$$2\varphi_2 = \epsilon_2 - \arcsin \frac{\sin \epsilon_2}{\sin \rho} \quad (2.3)$$

$$s_2 = \frac{\cos(\theta - \epsilon_2)}{\cos \epsilon_2 \cos^2 \rho} (1 - \lambda_2)$$

или компонентами напряжения

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \frac{\gamma(x + y \operatorname{tg} \epsilon_2)}{\cos^2 \rho} (1 - \lambda_2) (1 \pm \lambda_2)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\gamma(x + y \operatorname{tg} \epsilon_2)}{\cos^2 \rho} \operatorname{tg} \epsilon_2 (1 - \lambda_2)^2 \quad (2.4)$$



Фиг. 5

Здесь и в дальнейшем углы φ определены с точностью до числа, кратного π , не влияющего на компоненты напряжения.

Упругое напряженное состояние в секторе III для $\beta \leq \theta \leq \alpha$ будем определять при помощи формул, известных из теории упругости:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \gamma x [(1 + 2C_1) \pm (C_2 - C_1)] + \gamma y [2D_2 \pm (D_1 + D_2)]$$

$$\tau_{xy} = \gamma x (D_1 - D_2) - \gamma y (C_1 + C_2)$$

Четыре произвольные постоянные C_1, C_2, D_1, D_2 и неизвестные углы α и β находятся из условий непрерывности всех компонент напряжения

на границах между зонами I, III и зонами II, III, а именно

$$\sigma_x^e = \sigma_x^p, \quad \sigma_y^e = \sigma_y^p, \quad \tau_{xy}^e = \tau_{xy}^p \quad \text{при } y = x \operatorname{tg} \alpha \text{ и } y = x \operatorname{tg} \beta$$

причем буквами e и p отмечены соответственно упругое и предельное состояния.

После простых преобразований найдем два уравнения для определения углов α и β в виде

$$\begin{aligned} m(1 - \lambda_1)(1 + \operatorname{tg} \varepsilon_1 \operatorname{tg} \beta) &= n(1 - \lambda_2)(1 + \operatorname{tg} \varepsilon_2 \operatorname{tg} \alpha) \\ m[(1 - \lambda_1) \operatorname{tg} \varepsilon_1 + (1 + \lambda_1) \operatorname{tg} \beta] &= n[(1 - \lambda_2) \operatorname{tg} \varepsilon_2 + (1 + \lambda_2) \operatorname{tg} \alpha] - 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

причем через m и n обозначены выражения

$$m = \frac{(1 - \lambda_1)(1 + \operatorname{tg} \varepsilon_1 \operatorname{tg} \alpha)}{\cos^2 \rho (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}, \quad n = \frac{(1 - \lambda_2)(1 + \operatorname{tg} \varepsilon_2 \operatorname{tg} \beta)}{\cos^2 \rho (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}$$

а также произвольные постоянные C_1, C_2, D_1, D_2 . Имеем

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} C_1 \\ C_2 \end{aligned} \right\} &= \frac{m}{2} [(1 - \lambda_1) \operatorname{tg} \varepsilon_1 \pm \lambda_1 \operatorname{tg} \beta] - \frac{n}{2} [(1 - \lambda_2) \operatorname{tg} \varepsilon_2 \pm \lambda_2 \operatorname{tg} \alpha] \\ \left. \begin{aligned} D_1 \\ D_2 \end{aligned} \right\} &= \frac{m}{2} [\lambda_1 \pm (1 - \lambda_1) \operatorname{tg} \varepsilon_1 \operatorname{tg} \beta] - \frac{n}{2} [\lambda_2 \pm (1 - \lambda_2) \operatorname{tg} \varepsilon_2 \operatorname{tg} \alpha] \end{aligned}$$

Подставляя найденные постоянные в выражения компонент напряжения, окончательно получим

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} &= \gamma m (y - x \operatorname{tg} \beta) (1 \pm \lambda_1) + \gamma n (x \operatorname{tg} \alpha - y) (1 \pm \lambda_2) \\ \tau_{xy} &= -\gamma m (y - x \operatorname{tg} \beta) (1 - \lambda_1) \operatorname{tg} \varepsilon_1 - \gamma n (x \operatorname{tg} \alpha - y) (1 - \lambda_2) \operatorname{tg} \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Легко убедиться, что в рассматриваемом секторе действительно имеет место упругое состояние. Составим с этой целью выражение

$$T = \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 - \frac{1}{4} \sin^2 \rho (\sigma_x + \sigma_y)^2$$

которое вследствие (2.6) при помощи углов φ_1 и φ_2 может быть представлено в виде

$$T = -4\gamma^2 \sin^2 \rho mn \sin^2 (\varphi_1 - \varphi_2) (x \operatorname{tg} \alpha - y) (y - x \operatorname{tg} \beta)$$

Так как $x \operatorname{tg} \beta \leq y \leq x \operatorname{tg} \alpha$, то $x \operatorname{tg} \alpha - y \geq 0$, $y - x \operatorname{tg} \beta \geq 0$, а следовательно, величина

$$T \leq 0$$

Рассмотрим частный случай, когда обе стороны клина одинаково наклонены к горизонту (фиг. 5), т. е. когда углы $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon$. При этом вследствие симметрии задачи относительно оси x ясно, что $\beta = -\alpha$.

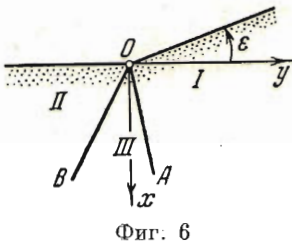
Угол α находится из уравнений (2.5); первое из них удовлетворяется тождественно, а второе дает

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \sin^2 \varepsilon + \cos \varepsilon \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \varepsilon}$$

Предельное напряженное состояние в секторе I на основании выражений (2.2) определяется в виде

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \frac{\gamma(x+y \operatorname{tg} \varepsilon)}{\cos^2 \rho} (1-\lambda)(1 \pm \lambda), \quad \tau_{xy} = -\frac{\gamma(x+y \operatorname{tg} \varepsilon)}{\cos^2 \rho} \operatorname{tg} \varepsilon (1-\lambda)^2 \quad (2.7)$$

а упругое напряженное состояние в секторе III в силу (2.6) дается так:



$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \frac{\gamma x}{\cos^2 \rho} (1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \alpha) (1-\lambda)(1 \pm \lambda) \quad (2.8)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\gamma y}{\cos^2 \rho} (1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \alpha) (1-\lambda)^2 \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{ctg} \alpha$$

Рассмотрим другой частный случай, когда левая сторона клина горизонтальна (фиг. 6), т. е. когда

$$\varepsilon_2 = 0, \quad \lambda_2 = \sin \rho, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \lambda_1 = \lambda$$

Углы α и β находятся из уравнений (2.5), которые принимают вид:

$$(1-\lambda)^2 (1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \alpha) (1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \beta) = (1 - \sin \rho)^2$$

$$(1-\lambda)(1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \alpha) [(1-\lambda) \operatorname{tg} \varepsilon + (1+\lambda) \operatorname{tg} \beta] = \cos^2 \rho \operatorname{tg} \beta$$

После простых преобразований получим

$$\left. \begin{matrix} \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{tg} \beta \end{matrix} \right\} = \operatorname{ctg} \varepsilon \frac{\lambda - \sin \rho \pm \sqrt{(\sin \rho - \lambda)^2 + (1-\lambda)^2 \cos^2 \rho \operatorname{tg}^2 \varepsilon}}{(1-\lambda)(1 + \sin \rho)} \quad (2.9)$$

Предельное напряженное состояние в секторе I на основании выражений (2.2) определяется следующим образом:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \frac{\gamma(x+y \operatorname{tg} \varepsilon)}{\cos^2 \rho} (1-\lambda)(1 \pm \lambda), \quad \tau_{xy} = -\frac{\gamma(x+y \operatorname{tg} \varepsilon)}{\cos^2 \rho} \operatorname{tg} \varepsilon (1-\lambda)^2 \quad (2.10)$$

а в секторе II вследствие (2.4) будет

$$\sigma_x = \gamma x, \quad \sigma_y = \gamma x \frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho}, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (2.11)$$

Упругое напряженное состояние в секторе III вследствие (2.6) дается в виде

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \gamma m (y - x \operatorname{tg} \beta) (1 \pm \lambda) + \gamma n (x \operatorname{tg} \alpha - y) (1 \pm \sin \rho)$$

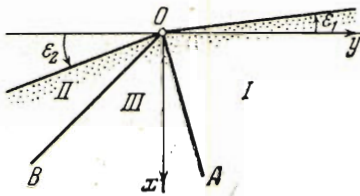
$$\tau_{xy} = -\gamma m (y - x \operatorname{tg} \beta) (1-\lambda) \operatorname{tg} \varepsilon \quad (2.12)$$

причем

$$m = \frac{(1-\lambda)(1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \alpha)}{\cos^2 \rho (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}, \quad n = \frac{1 - \sin \rho}{\cos^2 \rho (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}$$

§ 3. Напряженное состояние сыпучего клина, когда угол при вершине меньше 180° . Если угол при вершине клина меньше 180° , то предельное состояние может возникнуть во всем клине. При этом следует рассматривать три сектора: два крайних сектора *I* и *II*, в которых сыпучее тело находится в простейшем предельном состоянии, и средний сектор *III*. Эти сектора разделены прямыми $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$, проходящими через точку *O* и обозначенными *OA* и *OB* (фиг. 7).

Простейшее предельное состояние в секторе *I* для $\alpha \leq \theta \leq \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\pi$ определяется прежними выражениями



Фиг. 7

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} = \frac{\gamma(x + y \operatorname{tg} \varepsilon_1)}{\cos^2 \rho} (1 - \lambda_1) (1 \pm \lambda_1)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\gamma(x + y \operatorname{tg} \varepsilon_1)}{\cos^2 \rho} \operatorname{tg} \varepsilon_1 (1 - \lambda_1)^2 \quad (3.1)$$

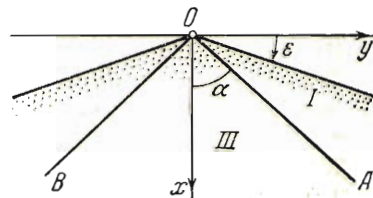
$$\lambda_1 = \sin^2 \varepsilon_1 + \cos \varepsilon_1 \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \varepsilon_1}$$

а простейшее предельное состояние в секторе *II* для $\varepsilon_2 - \frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \beta$ — прежними выражениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} = \frac{\gamma(x + y \operatorname{tg} \varepsilon_2)}{\cos^2 \rho} (1 - \lambda_2) (1 \pm \lambda_2)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\gamma(x + y \operatorname{tg} \varepsilon_2)}{\cos^2 \rho} \operatorname{tg} \varepsilon_2 (1 - \lambda_2)^2 \quad (3.2)$$

$$\lambda_2 = \sin^2 \varepsilon_2 + \cos \varepsilon_2 \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \varepsilon_2}$$



Фиг. 8

Углы α и β , определяющие положение прямых *OA* и *OB*, выражаются через углы ε_1 и ε_2 следующим образом:

$$2\alpha = 2\mu + \varepsilon_1 - \arcsin \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \rho}, \quad 2\beta = -2\mu + \varepsilon_2 - \arcsin \frac{\sin \varepsilon_2}{\sin \rho}$$

Линии скольжения в секторах *I* и *II* состоят из двух семейств параллельных прямых, образующих с осью *x* углы $\varphi_1 \pm \mu$ или $\varphi_2 \pm \mu$.

Предельное состояние в секторе *III* для $\beta \leq \theta \leq \alpha$ не будет простейшим. Оно определяется путем решения уравнений (1.5) — (1.6).

Условие непрерывности φ и *s* вдоль *OA* дает возможность получить граничные данные

$$\psi = -\mu, \quad s = \frac{\cos(\alpha + \rho)}{\cos \rho} \quad \text{при } \theta = \alpha \quad (3.3)$$

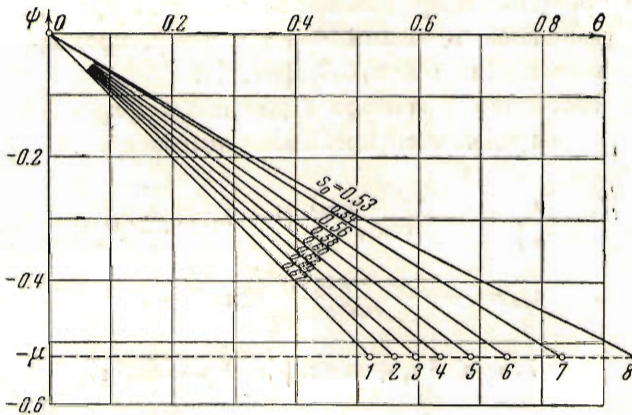
а условие непрерывности тех же величин φ и *s* вдоль *OB* приводит к граничным данным

$$\psi = -\mu, \quad s = \frac{\cos(\beta - \rho)}{\cos \rho} \quad \text{при } \theta = \beta \quad (3.4)$$

Рассмотрим более подробно случай, когда обе стороны клина одинаково наклонены к горизонту (фиг. 8), т. е. когда углы $-\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. При этом вследствие симметрии задачи относительно оси *x* достаточно

исследовать правую половину сыпучего клина, имея в виду, что на оси x должно быть $\psi = 0, s = s_0$ при $\theta = 0$.

Строится решение $\psi = \psi(\theta, s_0), s = s(\theta, s_0)$ дифференциальных уравнений (1.5) — (1.6), удовлетворяющее указанным условиям при $\theta = 0$.



Фиг. 9

Ниже приведены результаты численного решения рассмотренной задачи для $\varphi = 30^\circ$. Оно состоит в приближенном интегрировании дифференциальных уравнений методом конечных разностей.

Табл. 1 содержит величины ψ и s , определенные путем численного интегрирования дифференциальных уравнений (1.5) — (1.6), для различных значений параметра s_0 , которыми мы задаемся.

На фиг. 9 и 10 изображены полученные интегральные кривые для тех же значений параметра. Прямая $\psi = -\mu$ на фиг. 9 соответствует прямой OA . Она пересекает интегральные кривые в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, абсциссы которых определяют углы α , отвечающие выбранным значениям s_0 . Нанесенная на фиг. 10 пунктирная кривая $s = \cos(\theta + \rho) / \cos \rho$ также соответствует прямой OA . По найденным значениям α определяются соответствующие им углы ε . Эти результаты таковы:

s_0	0.67	0.64	0.62	0.60	0.58	0.56	0.54	0.53
α	0.52	0.56	0.59	0.63	0.68	0.74	0.83	0.95
ε	0.00	0.07	0.14	0.21	0.29	0.37	0.47	0.51

Легко найти распределение напряжений по любому горизонтальному сечению клина $x = \text{const.}$

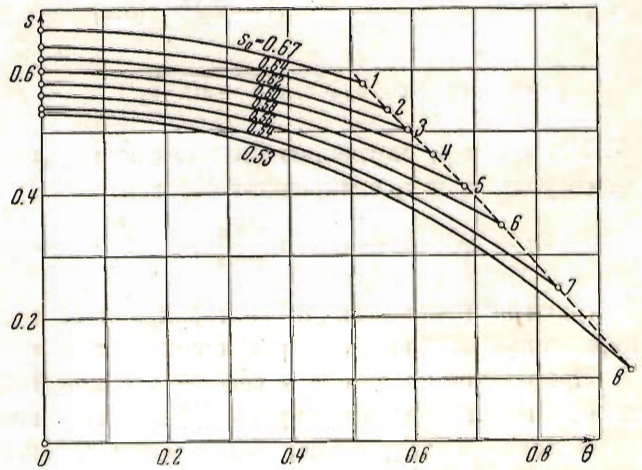
Параметр s_0 может быть выражен через угол α на основании оставшегося условия

$$\psi(\alpha, s_0) = -\mu$$

а угол α связан с углом ε соотношением

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{-\sin \rho \cos(2\alpha + \rho)}{1 - \sin \rho \sin(2\alpha + \rho)}$$

Линии скольжения могут быть легко найдены из уравнения (1.7) после внесения функции $\psi = \psi(\theta, s_0)$.



Фиг. 10

Таблица 1

	0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$s_0 = 0.67$	$-\psi$	0.00	1.10	0.20	0.30	0.40	0.50				
	s	0.67	0.66	0.65	0.64	0.62	0.58				
$s_0 = 0.64$	$-\psi$	0.00	0.10	0.19	0.28	0.38	0.46				
	s	0.64	0.64	0.62	0.61	0.59	0.56				
$s_0 = 0.62$	$-\psi$	0.00	0.09	0.18	0.26	0.35	0.44				
	s	0.62	0.61	0.60	0.59	0.56	0.54				
$s_0 = 0.60$	$-\psi$	0.00	0.08	0.16	0.24	0.33	0.41	0.49			
	s	0.60	0.59	0.58	0.56	0.54	0.51	0.48			
$s_0 = 0.58$	$-\psi$	0.00	0.08	0.16	0.23	0.31	0.38	0.46			
	s	0.58	0.57	0.56	0.55	0.52	0.49	0.45			
$s_0 = 0.56$	$-\psi$	0.00	0.07	0.14	0.21	0.28	0.35	0.42	0.49		
	s	0.56	0.56	0.55	0.53	0.50	0.47	0.42	0.37		
$s_0 = 0.54$	$-\psi$	0.00	0.06	0.13	0.19	0.26	0.32	0.38	0.44	0.50	
	s	0.54	0.53	0.52	0.50	0.48	0.44	0.39	0.34	0.27	
$s_0 = 0.53$	$-\psi$	0.00	0.06	0.12	0.18	0.24	0.30	0.35	0.40	0.45	0.49
	s	0.53	0.52	0.51	0.49	0.46	0.42	0.38	0.31	0.25	0.16

(Во всех таблицах, помещенных в этой работе, для краткости приведены только два десятичных знака, хотя вычисления проводились с большей точностью.)

Для $0 \leq \theta \leq \alpha$ или $0 \leq y/x \leq \operatorname{tg} \alpha$ компоненты напряжения определяются формулами (1.4), которые могут быть написаны так:

$$\sigma_x = \gamma x s_x = \gamma x \frac{s}{\cos \theta} [1 + \sin \rho \cos 2(\psi + \theta)]$$

$$\tau_{xy} = \gamma x t_{xy} = \gamma x \frac{s}{\cos \theta} \sin \rho \sin 2(\psi + \theta), \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta \quad (3.5)$$

а для $\alpha \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ или $\operatorname{tg} \alpha \leq y/x \leq \operatorname{ctg} \varepsilon$ те же компоненты напряжения находятся по формулам (3.2) при $\varepsilon_1 = -\varepsilon$, которые после простых преобразований будут

$$\sigma_x = \gamma x s_x = \frac{\gamma x}{\cos^2 \rho} \left(1 - \frac{y}{x} \operatorname{tg} \varepsilon\right) (1 - \lambda^2)$$

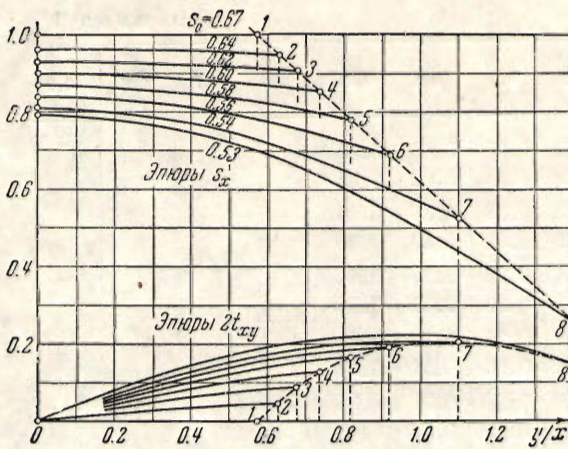
$$\tau_{xy} = \gamma x t_{xy} = \frac{\gamma x}{\cos^2 \rho} \left(1 - \frac{y}{x} \operatorname{tg} \varepsilon\right) \operatorname{tg} \varepsilon (1 - \lambda)^2 \quad (3.6)$$

$$\lambda = \sin^2 \varepsilon + \cos \varepsilon \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \varepsilon}$$

Величины s_x и t_{xy} являются известными функциями от y/x , так как величины s и ψ найдены численно в зависимости от θ , а следовательно, как функции от y/x .

Приведем для сравнения величину s_x , полученную на основе простейшего предположения о линейном характере ее изменения в сечении $x = \operatorname{const}$. Имеем

$$\sigma_x = \gamma x s_x = \gamma x \left(1 - \frac{y}{x} \operatorname{tg} \varepsilon\right)$$



Фиг. 11

На фиг. 11 изображены эпюры распределения величин s_x и t_{xy} в сечении $x = \text{const}$ в пределах $0 \leq y/x \leq \text{tg } \alpha$, найденные в результате вычислений по приведенным выше формулам. Особенно интересны первые из них, так как они определяют нормальную компоненту напряжения σ_x .

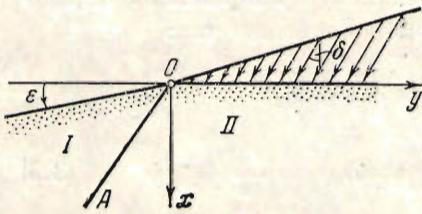
Сравнение величин s_x , найденных численно, с величинами s_x , определенными по простейшей формуле

$$s_x = 1 - \frac{y}{x} \text{tg } \varepsilon$$

показывает значительное их расхождение.

Аналогично можно рассмотреть более общий случай, когда стороны клина наклонены к горизонту под разными углами.

§ 4. Устойчивость сыпучего клина и основания. Исследуем далее предельное равновесие сыпучего тела формы клина, одна из сторон которого свободна от напряжений, а другая (горизонтальная) находится под действием нормального и касательного напряжений, причем их отношение постоянно:



Фиг. 12

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} = -\text{tg } \delta$$

Начало координат O выбрано в точке пересечения прямых, ось x направлена вертикально вниз, а ось y — вдоль горизонтальной границы (фиг. 12).

Будем рассматривать сектор I , в котором сыпучее тело находится в простейшем предельном состоянии, и примыкающий к нему сектор II . Эти секторы разделены прямой $\theta = \alpha$, обозначенной OA .

Простейшее предельное состояние в секторе I для $\varepsilon - \frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \alpha$ на основании (1.8) — (1.10) при $\kappa = -1$ определяется величинами

$$2\varphi = \varepsilon + \text{arc sin } \frac{\sin \varepsilon}{\sin \rho} - \pi, \quad s = \frac{\cos(\theta - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \cos^2 \rho} (1 - \lambda) \tag{4.1}$$

$$\lambda = \sin^2 \varepsilon - \cos \varepsilon \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \varepsilon}$$

или компонентами напряжения

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \frac{\gamma(x + y \text{tg } \varepsilon)}{\cos^2 \rho} (1 - \lambda)(1 \pm \lambda), \quad \tau_{xy} = -\frac{\gamma(x + y \text{tg } \varepsilon)}{\cos^2 \rho} \text{tg } \varepsilon (1 - \lambda)^2 \tag{4.2}$$

Здесь и в дальнейшем углы φ и ψ определены с точностью до числа, кратного π , не влияющего на компоненты напряжения.

Угол α , дающий положение прямой OA , выражается через угол ε в виде

$$2\alpha = \varepsilon + \arcsin \frac{\sin \varepsilon}{\sin \rho} - \pi + 2\mu$$

или обратно

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin \rho \cos (2\alpha + \rho)}{1 - \sin \rho \sin (2\alpha + \rho)}$$

Линии скольжения состоят из двух семейств параллельных прямых, образующих с осью x углы $\varphi \pm \mu$.

Предельное состояние в секторе II для $\alpha \leq \theta \leq \pi/2$ уже не будет простейшим. Оно определяется путем интегрирования дифференциальных уравнений (1.5) — (1.6).

Условие непрерывности φ и s вдоль границы между секторами I и II — прямой OA — дает возможность получить граничные данные

$$\psi = -\mu, \quad s = \frac{\cos(\alpha + \rho)}{\cos \rho} \quad \text{при } \theta = \alpha \quad (4.3)$$

Вдоль положительной полуоси y компонента $\tau_{xy} = -\sigma_x \operatorname{tg} \delta$, а потому

$$\sigma \sin \rho \sin 2\varphi = -\sigma(1 + \sin \rho \cos 2\varphi) \operatorname{tg} \delta$$

Разрешая это уравнение относительно 2φ , найдем

$$-2\varphi = \delta + (x - 1) \frac{\pi}{2} + x \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \rho}, \quad x = \pm 1$$

а выбирая знак $x = +1$ и имея в виду, что $\psi = \varphi - \theta$, будем иметь граничные условия

$$-2\psi = \pi + \delta + \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \rho}, \quad s = s_0 \quad \text{при } \theta = \frac{1}{2}\pi \quad (4.4)$$

Строится решение $\psi = \psi(\theta, s_0)$, $s = s(\theta, s_0)$ дифференциальных уравнений (1.5) — (1.6), удовлетворяющее указанным граничным условиям при $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Параметр s_0 может быть выражен через угол ε на основании условия вдоль прямой OA , а именно

$$\psi(\alpha, s_0) = -\mu$$

и равенства

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin \rho \cos (2\alpha + \rho)}{1 - \sin \rho \sin (2\alpha + \rho)}$$

Искомые компоненты напряжения вдоль положительной полуоси y определяются вследствие (1.4) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \gamma y s_x = \gamma y s_0 \cos \delta (\cos \delta + \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \delta}) \\ \tau_{xy} &= \gamma y t_{xy} = -\sigma_x \operatorname{tg} \delta \end{aligned} \quad (4.5)$$

Линии скольжения могут быть без труда найдены из полученного выше уравнения (1.7) после подстановки функции $\psi = \psi(\theta, s_0)$.

Отметим, что решение поставленной задачи особенно просто, когда $\delta = \rho$. Действительно, согласно (4.4) величина $\psi = \mu - \pi$ при $\theta = \frac{1}{2}\pi$,

	θ	1.57	1.4	1.2	1.0	0.8	0.6
$s_0 = 6$	$-\psi$	1.57	1.48	1.38	1.28	1.18	1.08
	s	6.00	6.09	6.04	5.83	5.47	4.97
$s_0 = 8$	$-\psi$	1.57	1.48	1.38	1.28	1.18	1.08
	s	8.00	8.08	7.97	7.65	7.13	6.44
$s_0 = 10$	$-\psi$	1.57	1.48	1.38	1.28	1.18	1.10
	s	10.00	10.04	9.85	9.39	8.74	7.89
$s_0 = 12$	$-\psi$	1.57	1.48	1.38	1.28	1.19	1.10
	s	12.00	12.03	11.76	11.20	10.40	9.37
$s_0 = 14$	$-\psi$	1.57	1.48	1.38	1.29	1.20	1.11
	s	14.00	14.06	13.76	13.13	12.17	10.95

а потому из уравнения (1.5) ясно, что $s = \operatorname{tg} \rho$. Следовательно, искомые компоненты напряжения вдоль положительной полуоси y будут иметь следующий вид:

$$\sigma_{\theta} = \gamma r \sin \rho \cos \rho$$

$$\tau_{r\theta} = \gamma r \sin^2 \rho$$

или

(4.6)

$$\sigma_x = \gamma y s_x = \gamma y \sin \rho \cos \rho$$

$$\tau_{xy} = \gamma y t_{xy} = -\gamma y \sin^2 \rho$$

а линии скольжения совпадают с осью y .

Ниже приведены результаты численного решения рассмотренной задачи для $\rho = 30^\circ$, $\delta = 0^\circ$.

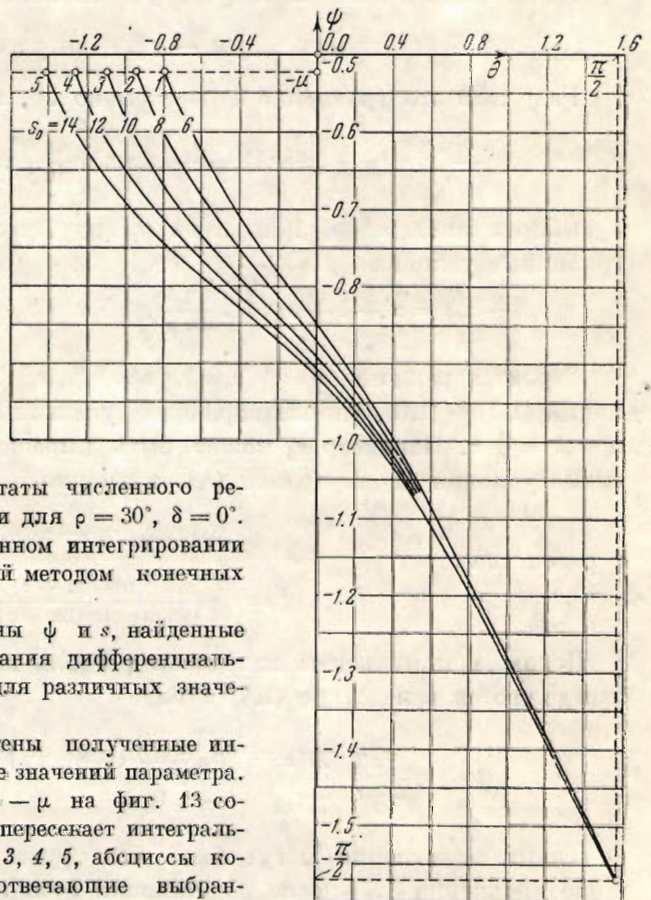
Оно состоит в приближенном интегрировании дифференциальных уравнений методом конечных разностей.

Табл. 2 содержит величины ψ и s , найденные путем численного интегрирования дифференциальных уравнений (1.5) — (1.6) для различных значений параметра s_0 .

На фиг. 13 и 14 изображены полученные интегральные кривые для тех же значений параметра.

Пунктирная прямая $\psi = -\mu$ на фиг. 13 соответствует прямой OA . Она пересекает интегральные кривые в точках 1, 2, 3, 4, 5, абсциссы которых определяют углы α , отвечающие выбранным значениям s_0 .

Пунктирная кривая $s = \cos(\theta + \rho) / \cos \rho$, нанесенная на фиг. 14, также соответствует прямой OA .



Фиг. 13

Таблица 2

0.4	0.2	0.0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1.0	-1.2
0.99	0.92	0.85	0.78	0.71	0.63			
4.38	3.74	3.08	2.48	1.92	1.43			
1.01	0.94	0.87	0.81	0.76	0.68	0.60		
5.63	4.74	3.87	3.05	2.33	1.72	1.22		
1.01	0.94	0.89	0.84	0.78	0.74	0.67	0.58	
6.94	5.85	4.82	3.78	2.86	2.05	1.95	1.06	
1.02	0.95	0.90	0.86	0.81	0.76	0.72	0.65	0.58
8.20	6.94	5.71	4.48	3.49	2.51	1.82	1.31	0.92
1.03	0.79	0.92	0.87	0.83	0.79	0.74	0.69	0.62
9.56	8.09	6.65	5.42	4.19	3.16	2.25	1.65	1.14

По найденным углам α могут быть получены углы ϵ следующим образом:

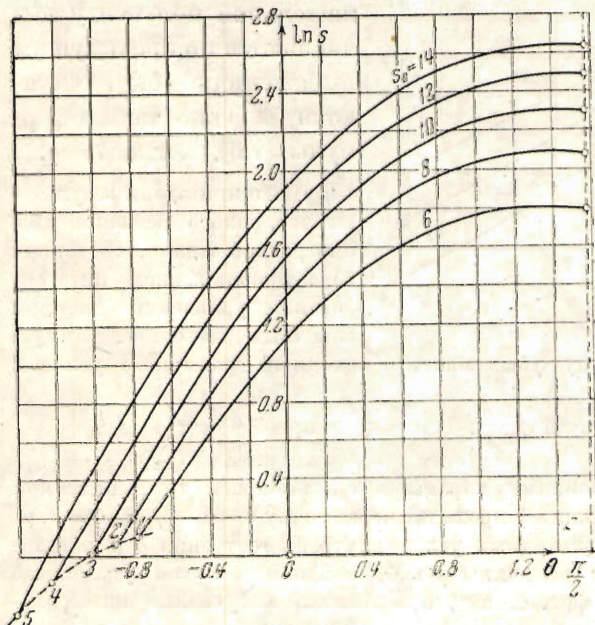
$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{\sin \rho \cos (2\alpha + \rho)}{1 - \sin \rho \sin (2\alpha + \rho)}$$

Искомое нормальное давление вдоль положительной полуоси y определяется по формуле

$$\sigma_x = \gamma y s_x = \gamma y s_0 (1 + \sin \rho)$$

Результаты проведенных вычислений для $\rho = 30^\circ$ таковы:

s_0	6.00	8.00	10.00	12.00	14.00
s_x	9.00	12.00	15.00	18.00	21.00
$-\alpha$	0.79	0.94	1.10	1.26	1.42
ϵ	0.17	0.07	-0.04	-0.14	-0.24



Фиг. 14

Путем интерполяции легко найти

$$s_0 = 10.8, \quad s_x = 16.2$$

соответствующие $\epsilon = 0$, когда левая грань клина горизонтальна.

Рассмотрим теперь частный случай предыдущей задачи, когда угол при вершине клина равен 180° , т. е. когда клин переходит в полуплоскость.

Будем попрежнему разделять полуплоскость на сектор I, в котором сыпучее тело находится в простейшем предельном состоянии, и примыкающий сектор II.

θ		1.57	1.4	1.2	1.0	0.8	0.6
$\delta = 0^\circ$	$-\psi$	1.57	1.49	1.39	1.29	1.19	1.10
	s	10.80	10.90	10.80	10.38	9.68	8.67
$\delta = 10^\circ$	$-\psi$	1.83	1.75	1.64	1.52	1.40	1.28
	s	4.86	5.26	5.58	5.75	5.75	5.53
$\delta = 20^\circ$	$-\psi$	2.13	2.03	1.92	1.80	1.67	1.53
	s	2.22	2.66	3.13	3.49	3.74	3.90

Простейшее предельное состояние в секторе I для $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \mu - \frac{1}{2}\pi$ определяется величинами

$$\varphi = -\frac{1}{2}\pi, \quad s = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \rho} \quad (4.7)$$

или компонентами напряжения

$$\sigma_x = \gamma x, \quad \sigma_y = \gamma x \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho}, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (4.8)$$

Предельное состояние в секторе II для $\mu - \frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ находится так же, как и ранее. Строится решение $\psi = \psi(\theta, s_0)$, $s = s(\theta, s_0)$ дифференциальных уравнений (1.5) — (1.6), удовлетворяющее граничным условиям (4.4) при $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Параметр s_0 может быть найден вследствие условия вдоль прямой OA:

$$\psi\left(\mu - \frac{1}{2}\pi, s_0\right) = -\mu$$

Искомые компоненты напряжения вдоль положительной полуоси y вычисляются по предыдущим выражениям (4.5). Остаются в силе также формулы (4.6), когда $\delta = \rho$.

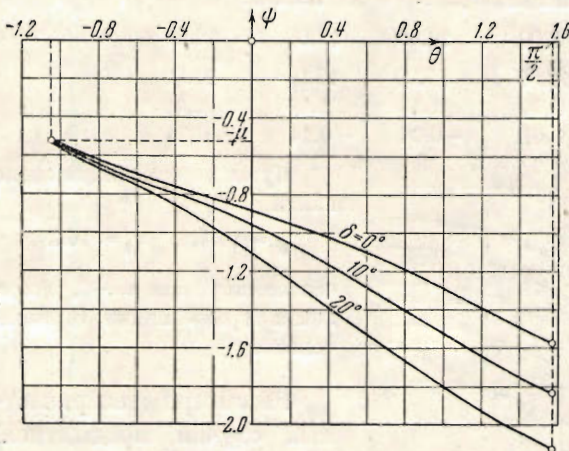
Ниже приведены результаты численного решения рассмотренной задачи, состоящего в приближенном интегрировании уравнений методом конечных разностей.

Вычисления ведутся в сторону убывающих θ , исходя из граничного условия

$$-2\psi = \pi + \delta + \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \rho}, \quad s = s_0 \quad \text{при } \theta = \frac{1}{2}\pi$$

Задаваясь различными значениями параметра s_0 , выбираем то из них, при котором интегральная кривая функции ψ проходит через точку $\theta = \mu - \frac{1}{2}\pi$, $\psi = -\mu$.

Вычисления проведены для различных углов внутреннего трения ρ и различных углов δ . Табл. 3 содержит величины s и ψ , найденные путем указанного численного интегрирования. На фиг. 15 и 16 изображены полученные интегральные кривые.



Фиг. 15

Таблица 3

0.4	0.2	0.0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1.0	-1.05
1.03	0.96	0.89	0.82	0.76	0.69	0.62	0.55	0.53
7.46	6.36	5.21	4.06	3.10	2.29	1.65	1.14	1.00
1.17	1.06	0.97	0.88	0.80	0.72	0.65	0.56	0.53
5.21	4.71	4.10	3.42	2.75	2.16	1.60	1.13	1.00
1.38	1.25	1.10	0.97	0.85	0.76	0.67	0.57	0.53
3.86	3.71	3.46	3.06	2.61	2.10	1.57	1.12	1.00

При $\delta \neq \rho$ искомые величины s_x и t_{xy} вдоль положительной полуоси y определяются по формулам

$$s_x = s_0 \cos \delta (\cos \delta + \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \delta}), \quad t_{xy} = -s_x \operatorname{tg} \delta$$

При $\delta = \rho$ величина $s_0 = \operatorname{tg} \rho$, а величины s_x и t_{xy} вдоль положительной полуоси y даются формулами

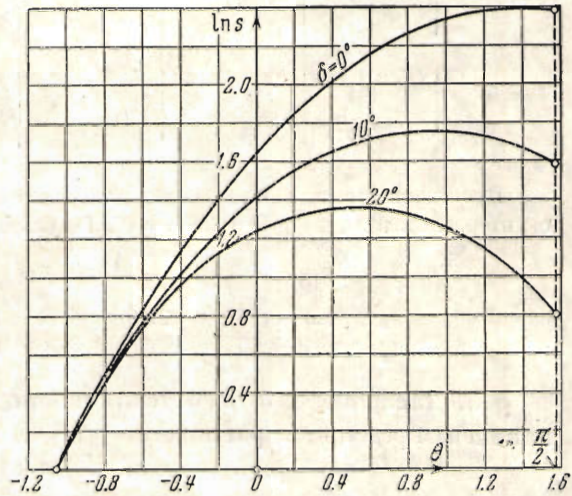
$$s_x = \sin \rho \cos \rho, \quad t_{xy} = -\sin^2 \rho$$

Результаты проведенных вычислений для угла внутреннего трения $\rho = 30^\circ$ и различных углов $\delta = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ таковы:

δ	0°	10°	20°	30°
s_0	10.8	4.83	2.22	0.58
s_x	16.2	6.91	2.72	0.43
$-t_x$	0.00	1.22	0.99	0.25

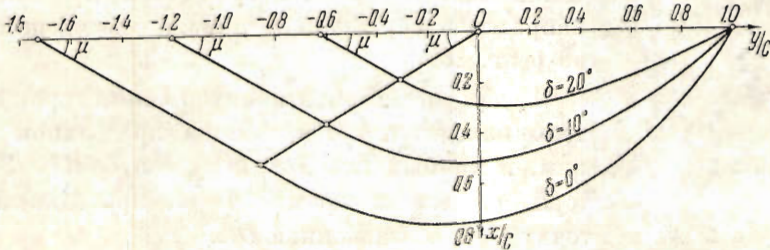
Полученные значения s_x и t_{xy} определяют максимальное нормальное и касательное напряжения, которые при постоянном их отношении

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} = -\operatorname{tg} \delta$$



Фиг. 16

могут быть приложены вдоль положительной полуоси y , тогда как отрицательная полуось y свободна от напряжений.



Фиг. 17

Линии скольжения находятся по уравнению (1.7). Одна из таких линий, проходящая через точку $x = 0, y = C$, для различных углов δ представлена на фиг. 17.

Аналогично предыдущему выполнены вычисления для углов внутреннего трения ρ от 0° до 40° с интервалом в 10° и различных углов δ . Результаты этих вычислений представлены в табл. 4.

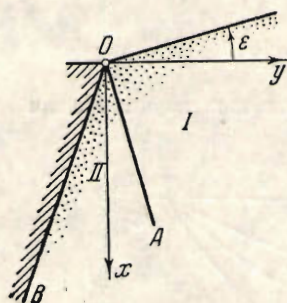
Таблица 4

ρ		0°	10°	20°	30°	40°
$\delta = 0^\circ$	s_0	0.00	0.39	2.19	10.8	46.5
	s_x	0.00	0.46	2.94	16.2	76.4
	$-txy$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$\delta = 10^\circ$	s_0		0.18	1.05	4.83	23.6
	s_x		0.17	1.32	6.91	37.3
	$-txy$		0.03	0.23	1.22	6.57
$\delta = 20^\circ$	s_0			0.36	2.22	10.9
	s_x			0.32	2.72	15.2
	$-txy$			0.12	0.99	5.53
$\delta = 30^\circ$	s_0				0.58	3.98
	s_x				0.43	4.38
	$-txy$				0.25	2.52
$\delta = 40^\circ$	s_0					0.84
	s_x					0.49
	$-txy$					0.41

Проведены также вычисления для углов внутреннего трения ρ от 10° до 40° с интервалом в 5° , но для угла $\delta = 0^\circ$. Результаты этих вычислений таковы:

ρ	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
s_0	0.39	1.00	2.19	4.71	10.8	23.3	46.5
s_x	0.46	1.26	2.94	6.70	16.2	36.7	76.4

§ 5. Давление сыпучего тела на подпорную стенку. Рассмотрим, наконец, предельное равновесие сыпучего тела, ограниченного подпорной стенкой и наклонной прямой, свободной от напряжений. Предполагается, что по задней грани стенки может возникать трение, характеризующееся углом трения δ .



Фиг. 18

Начало координат O выбрано в точке пересечения задней грани и граничной прямой, ось x направлена вертикально вниз, а ось y горизонтально (фиг. 18).

Будем рассматривать сектор I , в котором сыпучее тело находится в простейшем предельном состоянии, и примыкающий к нему сектор II . Эти секторы разделены прямой $\theta = \alpha$, проходящей через точку O и обозначенной OA .

Очевидно, что задача о давлении на подпорную стенку имеет два решения, причем одно из них соответствует меньшему (активному) давлению, а другое отвечает большему (пассивному) давлению.

Займемся сначала определением активного давления сыпучего тела на подпорную стенку, применяя формулы § 1 со знаком $\kappa = +1$.

Простейшее предельное состояние в секторе I для $\alpha \leq \theta \leq \varepsilon + \frac{1}{2}\pi$ на основании (1.8) — (1.10) при $\kappa = +1$ определяется величинами

$$2\varphi = \varepsilon - \arcsin \frac{\sin \varepsilon}{\sin \rho}, \quad s = \frac{\cos(\theta - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \cos^2 \rho} (1 - \lambda) \quad (5.1)$$

$$\lambda = \sin^2 \varepsilon + \cos \varepsilon \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \varepsilon}$$

или компонентами напряжения (1.10).

Здесь и в дальнейшем углы φ и ψ определены с точностью до числа, кратного π , не влияющего на компоненты напряжения.

Угол α , дающий положение прямой OA , выражается через угол ε так:

$$2\alpha = 2\mu + \varepsilon - \arcsin \frac{\sin \varepsilon}{\sin \rho}$$

или обратно

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin \rho \cos(2\alpha + \rho)}{1 - \sin \rho \sin(2\alpha + \rho)}$$

Линии скольжения состоят из двух семейств параллельных прямых, наклоненных к оси x под углами $\varphi \pm \mu$.

Предельное состояние в секторе II для $\alpha \leq \theta \leq \beta$ уже не будет простейшим и находится путем интегрирования дифференциальных уравнений (1.5) — (1.6).

Условие непрерывности φ и s на границе между секторами I и II прямой OA позволяет получить граничные условия

$$\psi = -\mu, \quad s = \frac{\cos(\alpha + \rho)}{\cos \rho} \quad \text{при } \theta = \alpha \quad (5.2)$$

Вдоль задней грани стенки $\tau_{r\theta} = -\sigma_\theta \operatorname{tg} \delta$, $\sigma_r > \sigma_\theta$, а потому

$$s \sin \rho \sin 2\psi = -s(1 - \sin \rho \cos 2\psi) \operatorname{tg} \delta, \quad \cos 2\psi > 0$$

Разрешая это уравнение относительно 2ψ и обозначая величину s на подпорной стенке через s_0 , будем иметь граничные условия

$$2\psi = \delta - \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \rho}, \quad s = s_0 \quad \text{при } \theta = \beta \quad (5.3)$$

Для того чтобы решение было возможно, величина φ , определяемая из (5.1), должна быть больше, чем та же величина, найденная на основании равенства $\varphi = \psi + \beta$ и из (5.3). Отсюда легко получить неравенство, налагающее на угол наклона подпорной стенки β ограничение

$$2\beta \leq \varepsilon - \arcsin \frac{\sin \varepsilon}{\sin \rho} - \delta + \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \rho}$$

Таким образом, наше решение задачи будет возможно лишь для таких подпорных стенок, которые удовлетворяют написанному условию.

Строится решение $\psi = \psi(\theta, s_0)$, $s = s(\theta, s_0)$ дифференциальных уравнений (1.5) — (1.6), удовлетворяющее указанным граничным условиям на задней грани, т. е. при $\theta = \beta$. Параметр s_0 может быть выражен через угол ε вследствие условия на прямой OA , а именно $\psi(\alpha, s_0) = -\mu$, и равенства

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin \rho \cos (2\alpha + \rho)}{1 - \sin \rho \sin (2\alpha + \rho)}$$

Искомые компоненты напряжения вдоль подпорной стенки определяются на основании (1.3) в виде

$$\sigma_\theta = \gamma_r s_\theta = \gamma_r s_0 \cos \delta (\cos \delta - \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \delta}), \quad \tau_{r\theta} = \gamma_r t_{r\theta} = -\sigma_\theta \operatorname{tg} \delta \quad (5.4)$$

Линии скольжения могут быть легко получены из уравнения (1.7) после подстановки туда функции $\psi = \psi(\theta, s_0)$.

Займемся теперь нахождением пассивного давления сыпучего тела на подпорную стенку, используя формулы § 1 со знаком $\chi = -1$.

Простейшее предельное состояние в секторе I для $\alpha \leq \theta \leq \varepsilon + \frac{1}{2}\pi$ на основании (1.8) — (1.10) при $\chi = -1$ (к углу φ добавлено число π) дается теперь величинами

$$2\varphi = \varepsilon - \operatorname{arc} \sin \frac{\sin \varepsilon}{\sin \rho} + \pi, \quad s = \frac{\cos(\theta - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \cos^2 \rho} (1 - \lambda) \\ \lambda = \sin^2 \varepsilon - \cos \varepsilon \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \varepsilon} \quad (5.5)$$

или компонентами напряжения (1.10). Угол α , определяющий положение OA , выражается следующим образом

$$2\alpha = \pi - 2\mu + \varepsilon + \operatorname{arc} \sin \frac{\sin \varepsilon}{\sin \rho}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{-\sin \rho \cos (2\alpha - \rho)}{1 + \sin \rho \sin (2\alpha - \rho)}$$

Линии скольжения состоят из двух семейств параллельных прямых, образующих с осью x углы $\varphi \pm \mu$.

Предельное состояние в секторе II для $\alpha \leq \theta \leq \beta$, как было указано, находится при помощи интегрирования дифференциальных уравнений (1.5) — (1.6).

Условие непрерывности φ и s на границе между секторами I и II теперь имеет вид

$$\psi = \mu, \quad s = \frac{\cos(\alpha - \rho)}{\cos \rho} \quad \text{при} \quad \theta = \alpha \quad (5.6)$$

Вдоль задней грани подпорной стенки $\tau_{r\theta} = \sigma_\theta \operatorname{tg} \delta$, $\sigma_r < \sigma_\theta$, а потому

$$s \sin \rho \sin 2\psi = s(1 - \sin \rho \cos 2\psi) \operatorname{tg} \delta, \quad \cos 2\psi < 0$$

Разрешая это уравнение относительно 2ψ , получим

$$2\psi = \pi - \delta - \operatorname{arc} \sin \frac{\sin \delta}{\sin \rho}, \quad s = s_0 \quad \text{при} \quad \theta = \beta \quad (5.7)$$

Для того чтобы решение было возможно, угол наклона подпорной стенки должен удовлетворять такому неравенству

$$2\beta \leq \varepsilon + \operatorname{arc} \sin \frac{\sin \varepsilon}{\sin \rho} + \delta + \operatorname{arc} \sin \frac{\sin \delta}{\sin \rho}$$

Строится решение $\psi = \psi(\theta, s_0)$, $s = s(\theta, s_0)$ дифференциальных уравнений (1.5) — (1.6), удовлетворяющее указанным граничным условиям на задней грани, т. е. при $\theta = \beta$. Параметр s_0 может быть выражен через угол ϵ вследствие условия на прямой OA , а именно $\psi(\alpha, s_0) = \mu$, и равенства

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{-\sin \rho \cos (2\alpha - \rho)}{1 + \sin \rho \sin (2\alpha - \rho)}$$

Искомые компоненты напряжения вдоль подпорной стенки определяются на основании (1.3) в виде

$$\sigma_\theta = \gamma r s_\theta = \gamma r s_0 \cos \delta (\cos \delta + \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \delta}), \quad \tau_{r,\theta} = \gamma r t_{r,\theta} = \sigma_\theta \operatorname{tg} \delta \quad (5.8)$$

Линии скольжения могут быть получены из уравнения (1.7) после подстановки туда функции

$$\psi = \psi(\theta, s_0)$$

Ниже приведены результаты численного определения активного давления на подпорную стенку для $\rho = 30^\circ$, $\delta = 20^\circ$, $\beta = 0$. Оно сводится к приближенному интегрированию дифференциальных уравнений методом конечных разностей. Табл. 5 содержит величины ψ и s , найденные путем численного интегрирования дифференциальных уравнений (1.5) — (1.6) для различных значений параметра s_0 .

На фиг. 19 и 20 изображены полученные интегральные кривые для тех же значений параметра. Пунктирная прямая $\psi = -\mu$ на фиг. 19 соответствует прямой OA . Она пересекает интегральные кривые в точках 1, 2, 3, 4, 5, абсциссы которых определяют углы α , соответствующие выбранным значениям s_0 . Пунктирная кривая

$$s = \cos(\theta + \rho) / \cos \rho$$

нанесенная на фиг. 20, также отвечает прямой OA .

Приведенное неравенство, обеспечивающее существование решения задачи при $\beta = 0$, дает

$$\arcsin \frac{\sin \epsilon}{\sin \rho} - \epsilon \leq \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \rho} - \delta$$

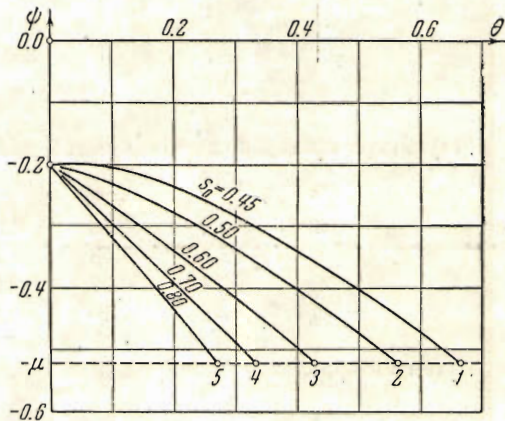
откуда ясно, что $\epsilon \leq \delta$.

Найденным углам α соответствуют углы ϵ , которые могут быть получены следующим образом:

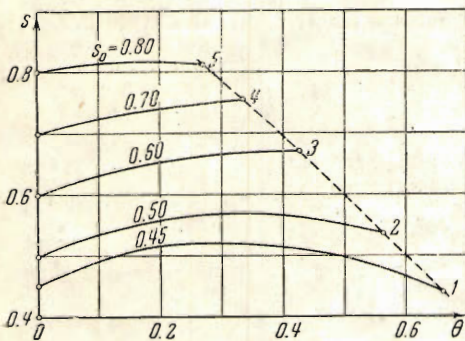
$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{\sin \rho \cos (2\alpha + \rho)}{1 - \sin \rho \sin (2\alpha + \rho)}$$

Искомые величины s_0 и $t_{r,\theta}$ вдоль подпорной стенки находятся по формулам

$$s_0 = s_\theta \cos \delta (\cos \delta - \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \delta}), \quad t_{r,\theta} = -s_\theta \operatorname{tg} \delta$$



Фиг. 19



Фиг. 20

Таблица 5

θ		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$s_0=0.45$	$-\psi$	0.20	0.21	0.24	0.29	0.34	0.41	0.47
	s	0.45	0.49	0.52	0.52	0.51	0.49	0.47
$s_0=0.50$	$-\psi$	0.20	0.23	0.28	0.34	0.40	0.47	
	s	0.50	0.54	0.56	0.57	0.57	0.56	
$s_0=0.60$	$-\psi$	0.20	0.27	0.34	0.42	0.50		
	s	0.60	0.63	0.66	0.67	0.67		
$s_0=0.70$	$-\psi$	0.20	0.30	0.39	0.49			
	s	0.70	0.72	0.74	0.75			
$s_0=0.80$	$-\psi$	0.20	0.32	0.44				
	s	0.80	0.81	0.82				

Результаты проведенных вычислений для $\rho = 30^\circ$, $\delta = 20^\circ$, $\beta = 0$ таковы:

s_0	0.45	0.50	0.60	0.70	0.80
α	0.71	0.56	0.43	0.34	0.27
ε	-0.33	-0.08	0.19	0.33	0.41
s_θ	0.24	0.27	0.32	0.38	0.43
$-t_{r\theta}$	0.09	0.10	0.12	0.14	0.16

Путем интерполяции легко найти

$$s_0 = 0.52, \quad s_\theta = 0.28, \quad t_{r\theta} = -0.10$$

соответствующие $\varepsilon = 0$, когда прямая, ограничивающая сыпучее тело, горизонтальна.

Поступила 5 VII 1951

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. АН СССР. 1942.