Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

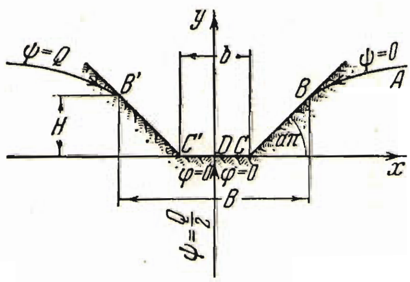
О ПРИТОКЕ ГРУНТОВЫХ ВОД К ДРЕНАЖНОЙ КАНАВЕ ТРАПЕЦОИДАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Ю. Д. Соколов
(Киев)

1. Задача о притоке грунтовых вод к осушительной канаве без учета наличия промежутков высачивания и с пренебрежением высотой воды в канаве рассматривалась в 1920 г. Н. Е. Жуковским [1] и в 1921 г. Л. Хопфом и Э. Треффцем [2]. При таком же упрощающем предположении, но с учетом промежутков высачивания эта задача была решена в 1936 г. В. В. Ведерниковым [3] (см. также гл. XI в статьях [4, 5]) при помощи введения функций

$$\theta = iw + kz = kx - \psi + i\,(ky + \varphi)$$

$$u = \frac{1}{v_x - i\,(v_y + k)} = i\,\frac{dz}{d\theta} \qquad (1.1)$$



Фиг. 1

где k — коэффициент фильтрации, x, y — координаты точки в области течения, φ — потенциал скорости, ψ — функция тока, w — комплексный потенциал и v_x, v_y — проекции скорости фильтрации на оси координат[1].

В. В. Ведерников конформно отображает области плоскостей θ и u, соответствующие области течения (фиг. 1), на нижнюю полуплоскость переменной ζ согласно формулам

$$\theta = k\,\frac{(B + Q_s)\,\zeta - Q_s}{2} \qquad (B = b + 2H\,\mathrm{ctg}\,\alpha\pi)$$

$$u = -\frac{2i\lambda A}{k}\int_0^{\zeta}\frac{\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{\alpha+1/2}\,(\lambda_1^2-\zeta^2)^{1-\alpha}} + \frac{i}{k\,(v_{ds}+1)} \qquad \left(A = \frac{\Gamma\,(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\,(\alpha)}\right) \qquad (1.2)$$

где $\alpha\pi$ — угол заложения откоса, b — ширина зеркала воды в канаве, H — высота промежутка высачивания, Q_s — приведенный расход воды на единице длины канавы, 1 и $\lambda_1 = +\sqrt{1-\lambda^2}$ — абсциссы образов точек B и C на действительной оси ζ, v_{ds} — приведенная скорость фильтрации в точке D.

---

[1] Здесь обозначения В. В. Ведерникова несколько изменены; изменено также направление оси ординат; заметим, что $-i\theta = w - ikz$ есть функция Жуковского.

Этим путем В. В. Ведерников получил уравнение, связывающее z и ζ (z и w), в виде

$$z = -\lambda A (B + Q_s) \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta \frac{\zeta\, d\zeta}{(1-\zeta^2)^{\alpha+1/2} (\lambda_1{}^2 - \zeta^2)^{1-\alpha}} + \frac{B + Q_s}{2(v_{ds}+1)} \zeta \qquad (1.3)$$

Не детализируя рассмотрения общего случая, В. В. Ведерников после установления формулы (1.3) перешел к исследованию случая $\alpha = 1/2$ (канал с прямоугольным поперечным сечением).

Общий случай задачи рассматривался позднее С. В. Фальковичем, который в обзорной статье [6] приводит формулу для расхода в виде

$$Q_s = \frac{2(b + 2H \operatorname{ctg} \alpha\pi)}{2 - [A \sin \vartheta M(\vartheta)]^{-1}} \qquad (1.4)$$

Здесь

$$\sin \vartheta = \lambda, \qquad M(\vartheta) = 1 - \frac{1}{1 \cdot 3} a_1 + \frac{1}{3 \cdot 5} a_2 - \ldots$$

и $a_1, a_2, \ldots$ — коэффициенты разложения по степеням t^2 выражения:

$$\frac{1 + t^2}{(1 - t^2)^{2\alpha} (t^4 - 2t^2 \cos 2\vartheta + 1)^{1-\alpha}}$$

Для определения параметра ϑ С. В. Фальковичем было предложено равенство

$$\sin \alpha\pi = \frac{4 \sqrt{\pi} \sin \vartheta}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1/2 - \alpha)} \left(1 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} + \cdots\right) \qquad (1.5)$$

Однако решение С. В. Фальковича содержит погрешности, равенство (1.5) является тождеством и формула (1.4) неверна.

Для общего случая можно вывести простые расчетные формулы (в частности, для Q_s), из которых как предельный случай получаются формулы В. В. Ведерникова, установленные им для значения $\alpha = 1/2$.

2. Положив $t = (1 - \zeta^2) / \lambda^2$ в формуле (1.2), найдем, что

$$u = \frac{iA}{k} \int_1^t \frac{dt}{t^{\alpha+1/2} (t-1)^{1-\alpha}} \qquad \text{на } DC \qquad \left(1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\right) \qquad (2.1)$$

$$u = \frac{A (i \cos \alpha\pi - \sin \alpha\pi)}{k} \int_t^1 \frac{dt}{t^{\alpha+1/2} (1-t)^{1-\alpha}} \qquad \text{на } CB \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1) \qquad (2.2)$$

$$u = -\frac{A}{k} \int_{-\infty}^t \frac{dt}{(-t)^{\alpha+1/2} (1-t)^{1-\alpha}} + \frac{i}{k} \qquad \text{на } BA \qquad (-\infty < t \leqslant 0) \qquad (2.3)$$

Так как $A = 1/\pi$ при $\alpha = 1/2$, то в этом случае

$$u = \frac{2i}{k\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{t-1} \qquad \text{на } DC \qquad (2.4)$$

$$u = -\frac{2}{k\pi} \operatorname{ar\,th} \sqrt{1-t} \qquad \text{на } CB \qquad (2.5)$$

$$u = -\frac{2}{k\pi} \operatorname{ar\,cth} \sqrt{1-t} + \frac{i}{k} \qquad \text{на } BA \qquad (2.6)$$

Полагая $t = \lambda^{-2}$ в (2.1), получим связь v_{ds} с λ в виде

$$\frac{1}{v_{ds}+1} = AJ_1 \qquad \left(J_1 = \int_1^{\lambda^{-2}} \frac{dt}{t^{\alpha+1/2}(t-1)^{1-\alpha}}\right) \tag{2.7}$$

Так как $A = 1/\pi$, $J_1 = \pi - 2\vartheta$ при $\alpha = 1/2$, то отсюда получаем формулу В. В. Ведерникова

$$\lambda_1 = \cos\vartheta = \sin\frac{\pi}{2(v_{ds}+1)}$$

При малых значениях $v_{ds}(\lambda)$ имеем $J_1 \approx 1/A - 2\lambda$, а при больших значениях $v_{ds}(\lambda \approx 1)$ будет $J_1 \approx \lambda_1^{2\alpha}/\alpha$, так что в этих случаях можно положить соответственно

$$\lambda \approx \frac{1}{2A(1+1/v_{ds})}, \qquad \lambda_1 \approx \left[\frac{\alpha}{A(v_{ds}+1)}\right]^{1/2\alpha} \tag{2.8}$$

Так как

$$u = i\frac{dz}{d\theta} = \frac{2i}{k(B+Q_s)}\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{4i\sqrt{1-\lambda^2 t}}{k\lambda^2(B+Q_s)}\frac{dz}{dt}$$

то, пользуясь (2.1) — (2.3), интегрированием по частям найдем, что

$$z = -\frac{A(B+Q_s)}{2}\int_1^t \frac{\sqrt{1-\lambda^2\tau}-\sqrt{1-\lambda^2 t}}{\tau^{\alpha+1/2}(\tau-1)^{1-\alpha}}d\tau + \frac{b}{2} \qquad (\text{на } DC) \tag{2.9}$$

$$z = \frac{A(B+Q_s)e^{i\alpha\pi}}{2}\int_t^1 \frac{\sqrt{1-\lambda^2 t}-\sqrt{1-\lambda^2\tau}}{\tau^{\alpha+1/2}(1-\tau)^{1-\alpha}}d\tau + \frac{b}{2} \qquad (\text{на } CB) \tag{2.10}$$

$$z = -\frac{iA(B+Q_s)}{2}\int_0^{-t} \frac{\sqrt{1-\lambda^2 t}-\sqrt{1+\lambda^2\tau}}{\tau^{\alpha+1/2}(1+\tau)^{1-\alpha}}d\tau +$$

$$+\frac{B+Q_s}{2}(1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha\pi)\left(\sqrt{1-\lambda^2 t}-1\right)+\frac{B}{2}+iH \qquad (\text{на } BA) \tag{2.11}$$

При $\alpha = 1/2$ на основании (2.4) — (2.6) вместо (2.9), (2.11) получаем соответствующие формулы (472), (477), (480) В. В. Ведерникова [5].

Полагая $t = \lambda^{-2}$ в (2.9), найдем

$$b = A(B+Q_s)J \qquad \left(J = \int_1^{\lambda^{-2}} \frac{\sqrt{1-\lambda^2\tau}}{\tau^{\alpha+1/2}(\tau-1)^{1-\alpha}}d\tau\right) \tag{2.12}$$

Полагая $t = 0$ в (2.10), получим

$$\frac{H}{\sin\alpha\pi} = \frac{A(B+Q_s)}{2}I_1 \tag{2.13}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{A\cos\alpha\pi} - I = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-\lambda^2\tau}}{\tau^{\alpha+1/2}(1-\tau)^{1-\alpha}}d\tau$$

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\lambda^2\tau}}{\tau^{\alpha+1/2}(1-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \tag{2.14}$$

Разделив (2.13) на (2.12) и приняв во внимание, что

$$J = I \cos \alpha\pi - \pi\lambda = \frac{1}{A} - I_1 \cos \alpha\pi - \pi\lambda \tag{2.15}$$

найдем связь H / b с λ в виде

$$\frac{2H}{b \sin \alpha\pi} = \frac{I_1}{J} = \frac{(A \cos \alpha\pi)^{-1} - I}{I \cos \alpha\pi - \pi\lambda} \tag{2.16}$$

Тогда по (2.12) и (2.13)

$$B + Q_s = \frac{b}{AJ} = \frac{2H}{A \sin \alpha\pi \, I_1} = \frac{B}{1 - A\pi\lambda} \tag{2.17}$$

Пользуясь (2.17), вместо (1.4) получим формулу расхода в виде

$$Q_s = \frac{AB\pi\lambda}{1 - A\pi\lambda} = \frac{\pi\lambda b}{J} = \frac{\pi\lambda b}{I \cos \alpha\pi - \pi\lambda} \tag{2.18}$$

Так как при $\alpha = {}^1/_2$ $(B = b)$

$$J = \pi(1 - \lambda), \qquad I_1 = 2\left(\ln \lambda_1 + \lambda \ln \frac{1 + \lambda}{\lambda_1}\right)$$

то из (2.17), а также (2.18) получаются формулы (474), (478) и (473) В. В. Ведерникова [5]:

$$B + Q_s = \frac{B}{1 - \lambda}, \qquad H = \frac{B}{\pi(1 - \lambda)}\left(\ln \lambda_1 + \lambda \ln \frac{1 + \lambda}{\lambda_1}\right), \qquad Q_s = \frac{B\lambda}{1 - \lambda}$$

Применяя первую из формул (1.2) к точке $C\,(z = {}^1/_2\, b,\ \zeta = \lambda_1)$ и обозначая через Q_s' приведенный расход через оба промежутка высачивания, будем иметь

$$\frac{1}{2}(b - Q_s') = \frac{1}{2}\left[(B + Q_s)\lambda_1 - Q_s\right]$$

Отсюда

$$Q_s' = Q_s + b - \lambda_1 (Q_s + B) = b + B \frac{\pi A\lambda - \lambda_1}{1 - A\pi\lambda} \tag{2.19}$$

$$\frac{Q_s'}{Q_s} = \frac{I \cos \alpha\pi - \lambda_1 / A}{\pi\lambda}, \qquad \frac{Q_s'}{2H} = \frac{AI \cos \alpha\pi - \lambda_1}{\operatorname{tg} \alpha\pi \,(1 - AI \cos \alpha\pi)} \tag{2.20}$$

При $\alpha = {}^1/_2$ по (2.19)

$$Q_s' = B \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda}$$

3. Отделяя в (2.11) действительные и мнимые части, для точек кривой депрессии будем иметь

$$x = \frac{B + Q_s}{2}\left(\sqrt{1 - \lambda^2 t} - 1\right) + \frac{B}{2} \tag{3.1}$$

$$y = -\frac{A(B + Q_s)}{2} \int\limits_0^{-t} \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 t} - \sqrt{1 + \lambda^2 \tau}}{\tau^{\alpha + {}^1/_2} (1 + \tau)^{1 - \alpha}}\, d\tau + \left(x - \frac{B}{2}\right) \operatorname{tg} \alpha\pi + H \tag{3.2}$$

Подставляя t из (3.1) в (3.2) и полагая там

$$\tau = \frac{\eta^\beta}{1-\eta^\beta} \qquad \left(\beta = \frac{1}{{}^1/_2 - \alpha}\right)$$

получим уравнение кривой депрессии в виде (3.3)

$$y - H = \left(x - \frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha\pi - \frac{A(B+Q_s)}{1-2\alpha}\int_0^{\eta_1}\frac{1}{\sqrt{1-\eta^\beta}}\left(\frac{2x+Q_s}{B+Q_s} - \sqrt{1+\frac{\lambda^2\eta^\beta}{1-\eta^\beta}}\right)d\eta$$

где

$$\eta_1 = \left\{\left[\left(\frac{2x+Q_s}{B+Q_s}\right)^2 - 1\right] : \left[\left(\frac{2x+Q_s}{B+Q_s}\right)^2 - \lambda_1{}^2\right]\right\}^{{}^1/_2-\alpha}$$

Раскладывая в (3.3) подинтегральную функцию по степеням η^β, интегрируя и пренебрегая членами порядка $\eta_1{}^{2\beta+1}$, найдем

$$y - H \approx \left(x - \frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha\pi - \frac{A}{1/2-\alpha}\left(x - \frac{B}{2}\right)\eta_1 + \frac{A\lambda^2(B+Q_s)}{4(3/2-\alpha)}\eta_1{}^{\beta+1} \qquad (3.4)$$

и вблизи точки B

$$y - H \approx \left(x - \frac{B}{2}\right)\left[\operatorname{tg}\alpha\pi - \frac{A}{(1/2-\alpha)(3/2-\alpha)}\left(\frac{4}{\lambda^2}\,\frac{x - 1/2B}{B+Q_s}\right)^{{}^1/_2-\alpha}\right] \qquad (3.5)$$

Посредством подстановки

$$\tau = \frac{1-\xi^2}{\lambda^2\xi^2} \qquad \left(\xi = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2\tau}}\right)$$

приведем (3.2) к виду

$$\left(x - \frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha\pi - (y - H) = A\lambda(B+Q_s)\int_{\xi_1}^{1}\frac{\xi_1{}^{-1} - \xi^{-1}}{(1-\xi^2)^{\alpha+{}^1/_2}(1-\lambda_1{}^2\xi^2)^{1-\alpha}}\,d\xi \qquad (3.6)$$

где

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 t}} = \frac{B+Q_s}{2x+Q_s}$$

Так как

$$\int_{\xi_1}^{1}\frac{\xi_1{}^{-1} - \xi^{-1}}{(1-\xi^2)^{\alpha+{}^1/_2}(1-\lambda_1{}^2\xi^2)^{1-\alpha}}\,d\xi =$$

$$= -\int_{\xi_1}^{1}\frac{d\xi}{\xi} + \int_0^1\left[\frac{\xi_1{}^{-1} - \xi^{-1}}{(1-\xi^2)^{\alpha+{}^1/_2}(1-\lambda_1{}^2\xi^2)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\xi}\right]d\xi -$$

$$- \int_0^{\xi_1}\left[\frac{\xi_1{}^{-1} - \xi^{-1}}{(1-\xi^2)^{\alpha+{}^1/_2}(1-\lambda_1{}^2\xi^2)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\xi}\right]d\xi =$$

$$= \ln\xi_1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha\pi}{2A\lambda\xi_1} - \int_0^1\left[\frac{1}{(1-\xi^2)^{\alpha+{}^1/_2}(1-\lambda_1{}^2\xi^2)^{1-\alpha}} - 1\right]\frac{d\xi}{\xi} -$$

$$- \int_0^{\xi_1}\left[\frac{\xi_1{}^{-1} - \xi^{-1}}{(1-\xi^2)^{\alpha+{}^1/_2}(1+\lambda_1{}^2\xi^2)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\xi}\right]d\xi$$

то уравнение кривой депрессии (3.6) можно представить в виде

$$y - H = \tag{3.7}$$

$$= A\lambda(B + Q_s)\left\{-\ln\xi_1 + \int\limits_0^{\xi_1}\left[\frac{\xi_1^{-1} - \xi^{-1}}{(1-\xi^2)^{\alpha+1/2}(1-\lambda_1^2\xi^2)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\xi}\right]d\xi + J_2 - \frac{\operatorname{tg}\alpha\pi}{2A\lambda}\right\}$$

где

$$J_2 = \int\limits_0^1\left[\frac{1}{(1-\xi^2)^{\alpha+1/2}(1-\lambda_1^2\xi^2)^{1-\alpha}} - 1\right]\frac{d\xi}{\xi}$$

Отсюда для больших значений x (малых значений ξ_1) имеем

$$y - H \approx A\lambda(B + Q_s)\left(\ln\frac{2x + Q_s}{B + Q_s} + C\right) \tag{3.8}$$

где

$$C = 1 + J_2 - \frac{\operatorname{tg}\alpha\pi}{2A\lambda} = \int\limits_0^1\left[\frac{1}{(1-\xi^2)^{\alpha+1/2}(1-\lambda_1^2\xi^2)^{1-\alpha}} - 1\right]\frac{1-\xi}{\xi}\,d\xi$$

При $\alpha = 1/2$

$$C = 1 + \ln 2 - \frac{1+\lambda}{\lambda}\ln(1+\lambda)$$

Поступила 19 VI 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Просачивание воды через земляные плотины. М. 1923.
2. Hopf u. Treffz. Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände mit Abfanggraben. Zeitschr. für angew. Math. und Mech. 1921. Nr. 4.
3. Ведерников В. В. Sur la solution du problème à deux dimensions du courant stationnaire des eaux souterraines à surface libre. Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. 1936. T. 202. No. 13, 16.
4. Ведерников В. В. Гидромеханические методы расчета движения грунтовых вод со свободной поверхностью. Научные записки МИИВХ. 1937. Вып. 4.
5. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. Госстройиздат. 1939.
6. Полубаринова-Кочина П. Я., Фалькович С. В. Теория фильтрации жидкостей в пористых средах, § 5. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 6.