Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О РАСТЕКАНИИ БУГРА ГРУНТОВЫХ ВОД В СЛОЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Н. Н. Кочина
(Москва)

Задача ставится таким образом: грунтовые воды занимают нижнюю полуплоскость $y<0$. В начальный момент времени свободная поверхность грунтовых вод имеет форму кривой, уравнение которой $y=F(x)$; при этом предполагается, что эта кривая слабо изогнута. Спрашивается, как будет изменяться форма свободной поверхности со временем?

Л. А. Галин дал решение этой задачи в форме интеграла типа Коши [1]. Здесь дается другой вывод для решения этой задачи, основанный на методе, применявшемся Н. Е. Кочиным к решению аналогичной задачи из теории волн на поверхности несжимаемой жидкости [2].

На свободной поверхности должно быть выполнено условие

$$\varphi(x, y, t)+ky=0 \tag{1}$$

выражающее равенство нулю (атмосферному давлению) давления на свободной поверхности. Дифференцируя равенство (1) по t, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+k\frac{dy}{dt}=0$$

Пренебрежем квадратичными членами и заменим dy/dt равным ему выражением $(1/m)\,\partial\varphi/dy$. Получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+c\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \qquad \left(c=\frac{k}{m}\right) \tag{2}$$

Считая свободную поверхность слабо изогнутой, перенесем граничное условие на поверхности на ось абсцисс. Уравнение свободной поверхности найдем из условия (1), переписав его в виде

$$y=-\frac{\varphi(x, 0, t)}{k} \tag{3}$$

В выражении функции $\varphi(x, y)$ ордината свободной поверхности заменена нулем, как это принято делать в теории длинных волн.

Сначала рассмотрим случай, когда начальное возмущение сосредоточено в бесконечно малой окрестности точки $x=0$, $y=0$. Пусть Q будет величиной площади, заключенной между профилем начального возвышения свободной поверхности и осью x.

Следуя Н. Е. Кочину [2], составим безразмерное выражение

$$\frac{\varphi(0, y, t)}{Q}\frac{y}{c}=U(u) \qquad \left(u=\frac{ct}{y}\right)$$

которое должно быть функцией U от безразмерной переменной u.

Условие (2) должно удовлетворяться не только на границе, но и во всей области движения, так как функция $\partial\varphi / \partial t + c\, \partial\varphi / \partial y$ удовлетворяет уравнению Лапласа и обращается в нуль при $y = 0$.

Функция $\varphi(0, y, t)$ также удовлетворяет уравнению (2). Подставив

$$\varphi(0, y, t) = \frac{cQ}{y} U(u)$$

в уравнение (2), получим уравнение $U'(1 - u) = U$, общее решение которого имеет вид:

$$U = \frac{A}{1 - u} = \frac{Ay}{y - ct} \qquad (A = \text{const})$$

Следовательно, для $\varphi(0, y, t)$ получаем выражение

$$\varphi(0, y, t) = \frac{cQA}{y - ct}$$

Заменив в нем y на $y - ix$, получим комплексный потенциал $f(z, t)$ рассматриваемого неустановившегося движения

$$f(z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) = \frac{cQA}{y - ix - ct} = \frac{cQAi}{z - ict}$$

Отделив в нем действительную часть от мнимой, найдем

$$\varphi(x, y, t) = \frac{cQA(y - ct)}{(y - ct)^2 + x^2}, \qquad \psi = \frac{cQAx}{(y - ct)^2 + x^2}$$

Чтобы получить уравнение свободной поверхности, нужно в выражении для $\varphi(x, y, t)$ положить $y = 0$. Получим

$$y = \frac{Qc^2At}{k[c^2t^2 + x^2]}$$

Определяя постоянную A так, чтобы площадь, ограниченная осью абсцисс и линией свободной поверхности, равнялась Q, найдем, что $A = k / c\pi$ и, следовательно,

$$f(z, t) = \frac{Qki}{\pi(z - ict)}, \qquad \varphi = \frac{kQ(y - ct)}{\pi[(y - ct)^2 + x^2]} \tag{4}$$

уравнение свободной поверхности окончательно запишется так:

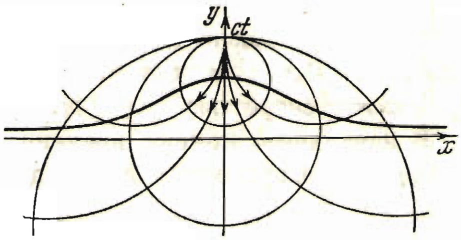
$$y = \frac{Qct}{\pi[x^2 + c^2t^2]}$$

Как видно из выражения для комплексного потенциала, мы имеем течение с диполем в точке $z = ict$. В начальный момент времени диполь находится в начале координат, затем он перемещается вверх по оси ординат со скоростью $c = k / m$. Таким образом, для моментов времени, близких к начальному, диполь попадает в область движения. Найдем момент времени, когда диполь окажется в вершине свободной поверхности. Для этого нужно максимальную ординату свободной поверхности $Q / \pi ct$ приравнять величине ct. Получим

$$t = t_1 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$$

Для $t > t_1$ область движения уже не будет содержать особенностей. Если принять за начальный момент времени значение $t_0 > t_1$, то получим движение без особенностей с начальной формой свободной поверхности

$$y = \frac{Qct_0}{\pi (x^2 + c^2 t_0^2)}$$



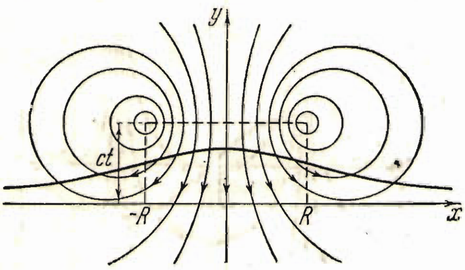
Фиг. 1

Мгновенные линии тока суть окружности (фиг. 1), проходящие через точку $x = 0$, $y = ct$ и касающиеся оси ординат, мгновенные линии равного потенциала—ортогональные к ним окружности.

Перейдем теперь к общему случаю, когда начальная форма свободной поверхности задана уравнением $y = F(x)$. Покажем, что решение задачи, т. е. значение потенциала скорости, получим, заменив в выражении для $\varphi(z)$ величину Q на $F(\zeta)$, x на $x - \zeta$ и проинтегрировав по ζ в пределах от $-\infty$ до ∞. Будем иметь

$$\varphi(x, y, t) = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\zeta)\,(y - ct)\,d\zeta}{[(y - ct)^2 + (x - \zeta)^2]}$$

Положив $y = 0$ и воспользовавшись уравнением свободной поверхности (3), найдем для формы свободной поверхности в момент времени выражение



Фиг. 2

$$y(x, t) = \frac{ct}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{c^2 t^2 + (x - \zeta)^2}$$

Подстановка $\zeta - x = ct \operatorname{tg} \alpha$ приводит правую часть к виду

$$y(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} F(x + ct \operatorname{tg} \alpha)\,d\alpha$$

Из этого выражения видно, что при $t = 0$ форма свободной поверхности приводится к заданной начальным условием $y(x, 0) = F(x)$.

Рассмотрим в качестве примера случай прямоугольного в начальный момент времени бугра, т. е. когда начальная форма свободной поверхности задается уравнениями (фиг. 2):

$$F(x) = y(x, 0) = \begin{cases} \varepsilon \text{ при } |x| < R \\ 0 \text{ при } |x| > R \end{cases}$$

В этом случае форма свободной поверхности в последующие моменты времени определится уравнением

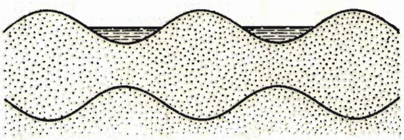
$$y = \frac{\varepsilon}{\pi}\left[\operatorname{arctg} \frac{x + R}{ct} - \operatorname{arctg} \frac{x - R}{ct}\right]$$

Комплексный потенциал течения

$$f(z,\ t) = \frac{ik\varepsilon}{\pi} \ln \frac{z + R - ict}{z - R - ict}$$

представляет плоско-параллельное течение с парой вихрей в точках $(\pm R,\ ct)$. Эти точечные вихри перемещаются вверх параллельно оси ординат со скоростью $c = k / m$.

В начальный момент времени особые точки $(\pm R,\ 0)$ находятся на свободной поверхности. Они сходят с нее в момент времени t_1, определяемый уравнением



Фиг. 3

$$\frac{2\varepsilon}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{R}{ct_1} = ct_1$$

Если рассматривать уравнение свободной поверхности в моменты времени $t > t_1$, то особые точки течения будут находиться вне области, занятой движущейся жидкостью.

Мгновенные линии тока здесь — аполлониевы окружности, мгновенные линии равного потенциала — ортогональные к ним окружности.

Если полив производится по бороздам, то поверхность грунтовых вод приобретает волнистый характер, причем непосредственно под бороздой получается бугор грунтовой воды (фиг. 3). Поэтому мы зададимся начальной формой свободной поверхности в виде синусоиды

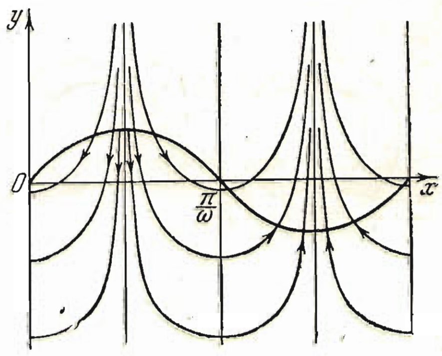
$$y = a \sin \omega x$$

Тогда нетрудно получить уравнение депрессионной кривой для последующих моментов времени

$$y = ae^{-\omega ct} \sin \omega x$$

Семейство линий тока удовлетворяет уравнению

$$e^{\omega y} \cos \omega x = \text{const}$$



Фиг. 4

Следовательно, семейство линий тока получается из определенной линии тока перемещением ее параллельно оси y на определенную величину. Линии тока являются и траекториями частиц жидкости, так как они не меняются с течением времени (фиг. 4).

Поступила 4 VII 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Некоторые вопросы неустановившегося движения грунтовых вод. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 6.
2. Кочин Н. Е. К теории волн Коши-Пуассона. Собрание сочинений. Т. II. Изд. АН СССР. М.— Л. 1949.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I. Гл. VIII. ОГИЗ. М.— Л. 1948.