Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

Л. А. Галин

(Москва)

В этой статье даны решения нескольких задач о неустановившемся движении грунтовых вод. Обычно при рассмотрении подобных задач применяется гидравлический метод решения, когда скорости осредняются по сечению потока грунтовых вод. В результате для нахождения напора получается нелинейное дифференциальное уравнение параболического типа. Однако это уравнение представляет значительные трудности для исследования. Поэтому часто полагают, что высота грунтовых вод в слое, где происходит движение, близка к некоторой постоянной величине. Это позволяет произвести линеаризацию уравнения и получить, таким образом, достаточно простое решение поставленной задачи. Однако, предполагая изменение уровня грунтовых вод малым, можно не делать дополнительного предположения об осреднении скоростей по сечению потока. В этом случае, как это будет показано ниже, вопрос сводится к решению некоторой двухразмерной задачи, причем это решение оказывается весьма простым, если полагать, что водоупор находится бесконечно глубоко, т. е. грунтовые воды занимают полуплоскость.

В этом случае гидравлический метод дает неверный результат. Заметим, что неточность, которая получается при применении этого метода, будет возрастать при увеличении глубины водоупора по сравнению с расстоянием до точки, где определяется изменение положения уровня грунтовых вод. Таким образом, возникает необходимость в применении гидромеханических методов.

В статье рассматривается также задача о неустановившемся движении грунтовых вод в точной постановке. При этом находится нелинейное граничное условие для отыскания функции, отображающей область, занятую жидкостью в данный момент времени, на полуплоскость. Кроме того, находятся некоторые точные решения этой задачи, а также дается метод последовательных приближений, который прилагается к одному случаю неустановившегося движения.

§ 1. Вывод условия для определения функции, отображающей область, занятую жидкостью, на полуплоскость. Будем полагать, что в начальный момент времени грунтовые воды занимают некоторую полубесконечную область (фиг. 1). При этом уровень грунтовых вод отличен от горизонтали, когда будет иметь место состояние покоя.

Будем полагать также, что в процессе движения грунтовых вод давление на внешнем контуре сохраняет постоянное значение, равное нулю. При исследовании движения грунтовых вод будем пренебрегать инерционными силами, что вполне допустимо для медленно меняющихся фильтрационных процессов.

Потенциал скоростей выражается следующим образом:

$$\varphi = -\frac{k}{\rho g} p - ky \tag{1.1}$$

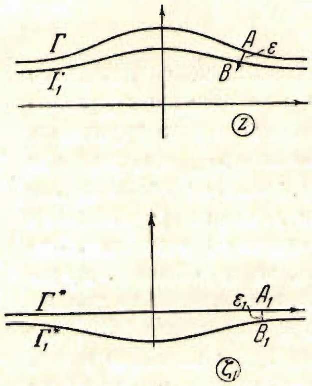
где k — коэффициент фильтрации, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести, p — давление. В таком случае комплексный потенциал скоростей $w^*(z) = \varphi + i\psi$ будет

$$w^*(z) = -\frac{k}{\rho g} w_1^*(z) + ikz \tag{1.2}$$

Заметим, что каждая из входящих сюда функций зависит также от времени, как от некоторого параметра. Эту зависимость от времени мы иногда не будем указывать. Действительная часть аналитической функции $w_1^*(z)$ равна давлению p. Следовательно,

$$w_1^*(z) = p + iq$$

где q — гармоническая функция, сопряженная с функцией p.



Фиг. 1

Пусть функция $z(t, \zeta)$ отображает на полуплоскость область, ограниченную контуром Г, которую занимает жидкость в момент времени t. При этом полуплоскость соответствует вспомогательной комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$. Эта аналитическая функция зависит от времени, как от параметра. Будем обозначать

$$w_1(\zeta) = w_1^*[z(\zeta)] \tag{1.3}$$

Нетрудно определить функцию $w_1(\zeta)$. Действительно, часть этой функции, представляющая собой давление, на оси ξ равна нулю. Кроме того, при стремлении η к бесконечности эта действительная часть стремится к величине, равной $\rho g \eta$. К такой величине стремится при увеличении глубины давление тогда, когда грунтовые воды занимают полуплоскость. В данном случае грунтовые воды заполняют некоторую полубесконечную область, причем величина возвышения их поверхности над горизонталью повсюду конечна. Таким образом, при достаточном удалении от начала координат по направлению оси η изменение давления в области, занятой грунтовыми водами, будет происходить по тому же закону, как и тогда, когда грунтовые воды занимают полуплоскость.

Указанным выше требованиям удовлетворяет следующая функция

$$w_1(\zeta) = \rho g i \zeta \tag{1.4}$$

В самом деле,

$$\operatorname{Re} w_1(\zeta) = -\rho g \eta$$

и поэтому

$$\operatorname{Re}[w_1(\zeta)]_{\zeta=\xi} = 0$$

Определим теперь, каким будет контур области, занятой жидкостью, через промежуток времени, равный Δt. Скорость точки, расположенной на контуре области, не будет, вообще говоря, направлена по нормали к контуру, однако для нахождения нового положения контура имеет значение именно ее нормальная составляющая.

По истечении промежутка времени Δt контур будет геометрическим местом концов отрезков, направленных по нормали к первоначальному положению контура. При этом величина отрезков равна скорости по направлению, нормальному к контуру, разделенной на пористость среды и умноженной на интервал времени Δt.

Таким образом, для нахождения нового положения контура необходимо определить величину отрезка AB (фиг. 1). Согласно сказанному выше он равен:

$$\varepsilon = \frac{v_n}{m}\Delta t = \frac{k}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Delta t \tag{1.5}$$

На основании выражения для потенциала скоростей (1.1) получим для скорости по направлению нормали следующее выражение:

$$v_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{k}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial n} - k\frac{\partial y}{\partial n} \tag{1.6}$$

Производная от давления по нормали к контуру области такова

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \left|\frac{\partial w_1}{\partial\zeta}\right|\left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right| \tag{1.7}$$

На основании (1.4) получаем

$$\frac{\partial w_1}{\partial\zeta} = \rho g i, \qquad \left|\frac{\partial w_1}{\partial\zeta}\right| = \rho g$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho g\left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right| = \frac{\rho g}{|\partial z/\partial\zeta|} \tag{1.8}$$

Определим теперь величину $\partial y/\partial n$. Выражение для производной по нормали может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \operatorname{grad} y\cdot\mathbf{n} = \mathbf{j}\cdot(\cos(n, x)\,\mathbf{i} + \cos(n, y)\,\mathbf{j}) = \cos(n, y)$$

Между углами нормали с осью y и касательной с осью x в данном случае имеет место следующее соотношение: $(n, y) = \pi - (s, x)$.

На основании этого

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \cos(n, y) = -\cos(s, x)$$

Но угол (s, x) равен аргументу производной от функции, отображающей область, занятую жидкостью, на полуплоскость

$$(s, x) = \arg\frac{\partial z}{\partial\zeta} \tag{1.9}$$

Мы берем здесь частную производную, так как функция $z(t, \zeta)$ зависит от времени. Итак, получаем

$$\frac{\partial y}{\partial n} = -\cos(s, x) = -\cos\arg\frac{\partial z}{\partial\zeta} = -\operatorname{Re}\frac{\partial z/\partial\zeta}{|\partial z/\partial\zeta|} = -\frac{\partial z/\partial\zeta + \partial\bar{z}/\partial\bar{\zeta}}{2|\partial z/\partial\zeta|} \tag{1.10}$$

Подставляя (1.8) и (1.10) в (1.6), найдем выражение для скорости по направлению, нормальному к контуру:

$$v_n = -\frac{k}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial n} - k\frac{\partial y}{\partial n} = \tag{1.11}$$

$$= -\frac{k}{\rho g}\frac{\rho g}{|\partial z/\partial\zeta|} + k\frac{\partial z/\partial\zeta + \partial\bar{z}/\partial\bar{\zeta}}{2|\partial z/\partial\zeta|} = k\frac{-2+\partial z/\partial\zeta + \partial\bar{z}/\partial\bar{\zeta}}{2|\partial z/\partial\zeta|}$$

На основании (1.5) перемещение точки контура Г, т. е. расстояние между контурами Г и Γ_1, таково:

$$\varepsilon = k\frac{-2+\partial z/\partial\zeta + \partial\bar{z}/\partial\bar{\zeta}}{2|\partial z/\partial\zeta|}\frac{\Delta t}{m} \tag{1.12}$$

Функция $z(t, \zeta)$, отображающая область, ограниченную контуром Г, на полуплоскость, отображает другую область, ограниченную контуром Γ_1, на некоторую область, близкую к полуплоскости, контур которой Γ_1^*.

При этом ε_1 — ордината точки на контуре Γ_1^* — определяется следующим образом на основании изменения масштаба при конформном отображении:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|\partial z/\partial\zeta|} = \frac{-2+\partial z/\partial\zeta + \partial\bar{z}/\partial\bar{\zeta}}{2|\partial z/\partial\zeta|^2}\frac{k\Delta t}{m} \tag{1.13}$$

Будем определять функцию, отображающую на полуплоскость область, ограниченную контуром Γ_1, т. е. тем контуром, который соответствует области, занятой грунтовыми водами в момент времени $t+\Delta t$.

Обозначим эту функцию $z(t+\Delta t, \zeta)$. Если обозначить через $\zeta_1(\zeta)$ функцию, отображающую на полуплоскость область, близкую к полуплоскости, ограниченную контуром Γ_1^*, то $z(t+\Delta t, \zeta)$ определяется следующим образом:

$$z(t+\Delta t, \zeta) = z(t, \zeta_1(\zeta)) \tag{1.14}$$

Найдем функцию $\zeta_1(\zeta)$, которая отображает на полуплоскость область, близкую к полуплоскости. Если представить эту функцию в виде:

$$\zeta_1(\zeta) = \zeta + (\zeta_1(\zeta) - \zeta)$$

то слагаемое, находящееся в правой части и заключенное в скобки, будет мало по абсолютной величине.

Естественно, что функция $\zeta_1(\zeta)$ должна быть близка к ζ, т. е. к функции, отображающей полуплоскость самою на себя.

При этом мнимая часть слагаемого, находящегося в скобках, должна быть равна ординате кривой, ограничивающей область, близкую к полуплоскости:

$$\operatorname{Im}[\zeta_1(\zeta) - \zeta]_{\zeta=\xi} = \varepsilon_1(\xi) \tag{1.15}$$

Заметим, что этот метод отыскания отображающей функции применим только в том случае, когда $\varepsilon_1(\xi)$ достаточно малая величина. В данном случае, очевидно, это обстоятельство имеет место.

Как известно, аналитическая функция $W(\zeta)$, действительная часть которой на оси x равна $U(\xi)$, определяется следующим образом:

$$W(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\xi) \frac{d\xi}{\xi - \zeta} \tag{1.16}$$

Применяя эту формулу, найдем

$$\zeta_1(\zeta) - \zeta = i\left(\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1(\xi) \frac{d\xi}{\xi - \zeta}\right) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1(\xi) \frac{d\xi}{\xi - \zeta} \tag{1.17}$$

или отсюда функция, отображающая на полуплоскость область, близкую к полуплоскости, будет такой:

$$\zeta_1(\zeta) = \zeta + i\left(\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1(\xi) \frac{d\xi}{\xi - \zeta}\right) \tag{1.18}$$

Используя формулу (1.13) для $\varepsilon_1(\zeta)$, получим

$$\zeta_1(\zeta) = \zeta - i\left[\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{m} \frac{2 - \partial z / \partial \zeta - \partial \bar{z} / \partial \bar{\zeta}}{2\,|\,\partial z / \partial \zeta\,|^2} \frac{\partial \xi}{\xi - \zeta}\right] \Delta t \tag{1.19}$$

Разность между функциями $z(t + \Delta t, \zeta)$ и $z(t, \zeta)$ можно записать в двух эквивалентных формах:

$$z(t + \Delta t, \zeta) - z(t, \zeta) = \frac{\partial z}{\partial t} \Delta t + \omega_1 \tag{1.20}$$

а также

$$z(t + \Delta t, \zeta) - z(t, \zeta) = z(t, \zeta_1(\zeta)) - z(t, \zeta) =$$

$$= z(t, \zeta + [\zeta_1(\zeta) - \zeta]) - z(t, \zeta) = \frac{\partial z}{\partial \zeta} [\zeta_1(\zeta) - \zeta] + \omega_2 \tag{1.21}$$

Здесь ω_1 и ω_2 — величины, которые стремятся к нулю при стремлении к нулю Δt. Приравнивая правые части выражений (1.20) и (1.21) и используя при этом (1.19), получим

$$\frac{\partial z}{\partial t} \Delta t = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \left[-i\left(\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{m} \frac{2 - \partial z / \partial \zeta - \partial \bar{z} / \partial \bar{\zeta}}{2\,|\,\partial z / \partial \zeta\,|^2} \frac{\partial \xi}{\xi - \zeta}\right)\right] \Delta t + \omega_3$$

При этом ω_3 — также величина, стремящаяся к нулю при стремлении к нулю Δt. Переходя в этом выражении к пределу, который получим, деля обе части равенства на Δt и устремляя эту величину к нулю, найдем

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \left[-i\left(\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{m} \frac{2 - \partial z / \partial \zeta - \partial \bar{z} / \partial \bar{\zeta}}{2\,|\,\partial z / \partial \zeta\,|^2} \frac{d\xi}{\xi - \zeta}\right)\right] \tag{1.22}$$

Отсюда будем иметь

$$i\,\frac{\partial z / \partial t}{\partial z / \partial \zeta} = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{m} \frac{2 - \partial z / \partial \zeta - \partial \bar{z} / \partial \bar{\zeta}}{2\,|\,\partial z / \partial \zeta\,|^2} \frac{\partial \xi}{\xi - \zeta} \tag{1.23}$$

Возьмем теперь действительные части от обеих частей этого выражения на оси ξ. В таком случае в правой части согласно (1.16) мы получим плотность интеграла типа Коши. Таким образом, найдем

$$\left\{\frac{1}{2}\left(i\frac{\partial z/\partial t}{\partial z/\partial\zeta}-i\frac{\partial\bar z/\partial t}{\partial\bar z/\partial\zeta}\right)\right\}_{\zeta=\xi}=\left\{\frac{i}{2}\,\frac{(\partial z/\partial t)(\partial\bar z/\partial\zeta)(-\partial\bar z/\partial t)(\partial z/\partial\zeta)}{(\partial z/\partial\zeta)(\partial\bar z/\partial\zeta)}\right\}_{\zeta=\xi}=$$

$$=\left\{\frac{k}{m}\,\frac{2-\partial z/\partial\zeta-\partial\bar z/\partial\zeta}{2\,|\partial z/\partial\zeta|^2}\right\}_{\zeta=\xi} \tag{1.24}$$

Отсюда имеем

$$\frac{i}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial\bar z}{\partial\zeta}-\frac{\partial\bar z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=\xi}=\frac{k}{m}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}+\frac{\partial\bar z}{\partial\zeta}\right)\right]_{\zeta=\xi}$$

или иначе это может быть записано так:

$$\operatorname{Re}\left[i\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial\bar z}{\partial\zeta}\right]_{\zeta=\xi}=\frac{k}{m}-\frac{k}{m}\operatorname{Re}\left[\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right]_{\zeta=\xi}$$

Окончательно получим

$$\operatorname{Re}\left[\frac{k}{m}\frac{\partial z}{\partial\zeta}+i\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar z}{\partial t}\right]_{\zeta=\xi}=\frac{k}{m} \tag{1.25}$$

Таково нелинейное граничное условие, которому должна удовлетворять функция $z(t,\zeta)$, отображающая область, занятую грунтовыми водами, на полуплоскость.

Для того чтобы определить функцию $z(t,\zeta)$, нужно, кроме граничного условия, удовлетворить также начальному условию. Необходимо, чтобы в момент времени $t=0$ функция $z(t,\zeta)$ была равна заданной функции $z_0(\zeta)$. Это будет функция, отображающая на полуплоскость область, занятую грунтовыми водами в начальный момент времени. Таким образом, начальное условие таково:

$$z(\zeta, 0)=z_0(\zeta) \tag{1.26}$$

Заметим, что если ввести переменную

$$\tau=\frac{k}{m}t \tag{1.27}$$

то условие (1.25) принимает несколько более простой вид:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial z}{\partial\zeta}+i\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar z}{\partial\tau}\right]_{\zeta=\xi}=1 \tag{1.28}$$

Функция $z(t,\zeta)$ позволяет определить форму области, занятой грунтовыми водами в данный момент времени. Однако для установления характера движения необходимо знать также величину комплексного потенциала скоростей. Этот комплексный потенциал скоростей, который мы будем обозначать через $w(\zeta)$, получим так же, как функцию вспомогательной комплексной переменной ζ. Зная функции $z(\zeta)$ и $w(\zeta)$, можно из двух выражений исключить ζ и, таким образом, найти комплексный потенциал, как функцию z.

Установим условие для определения комплексного потенциала скоростей. Если в зависимости (1.2) между комплексным потенциалом скоростей $w^*(z)$ и функцией $w_1^*(z)$, действительная часть которой равна давлению, полагать каждую из входящих функций зависящей от ζ, то будем иметь

$$w(t, \zeta) = -\frac{k}{\rho g} w_1(t, \zeta) + kiz(t, \zeta) \tag{1.29}$$

Выше было установлено, что $w_1(\zeta) = \rho g i\zeta$ [см. (1.4)]. На основании этого имеем

$$w(t, \zeta) = -\frac{k}{\rho g} \rho g i\zeta + kiz(t, \zeta) = -ki\zeta + kiz(t, \zeta)$$

или отсюда находим следующее соотношение между комплексным потенциалом скоростей и функцией, отображающей область, занятую грунтовыми водами, на полуплоскость:

$$z(t, \zeta) = \zeta - \frac{i}{k} w(t, \zeta) \tag{1.30}$$

На основании (1.25) получим аналогичное условие для определения комплексного потенциала скоростей. В самом деле,

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = 1 - \frac{i}{k}\frac{\partial w}{\partial \zeta}, \qquad \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = \frac{i}{k}\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}$$

Отсюда, пользуясь (1.25), получим

$$\operatorname{Re}\left[i\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} + \frac{k}{m}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} = \operatorname{Re}\left[i\left(1 - \frac{i}{k}\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\frac{i}{k}\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{k}{m}\left(1 - \frac{i}{k}\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\right]_{\zeta=\xi} =$$

$$= \operatorname{Re}\left[-\frac{1}{k}\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}\left(1 - \frac{i}{k}\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) + \frac{k}{m} - \frac{i}{m}\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} = \frac{k}{m}$$

После преобразований найдем

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{k}\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{i}{m}\frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{i}{k^2}\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} = 0$$

или, умножая на k, окончательно получим

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{k}{m} i\frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{i}{k}\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} = 0 \tag{1.31}$$

Таковы условия для определения функции $z(t, \zeta)$, отображающей на полуплоскость область, занятую грунтовыми водами, в данный момент времени, а также комплексного потенциала скоростей $w(t, \zeta)$.

Задача о неустановившемся движении грунтовых вод в пористой среде при наличии скважины, аналогичная излагаемой здесь, рассматривалась автором ранее [1]. В этой работе для отыскания граничного условия применялся прием такой же, как и в данной статье, причем было получено условие для нахождения функции $z(t, \zeta)$, аналогичное условию (1.25). Вопросы неустановившегося движения грунтовых вод рассматривались также в работе Н. К. Калинина и П. Я. Полубариновой-Кочиной [2].

§ 2. Построение решений задач о неустановившемся движении грунтовых вод. Постараемся отыскать некоторые точные частные решения задачи о неустановившемся движении грунтовых вод, т. е. решения, удовлетворяющие нелинейному граничному условию (1.25); для сокращения вычислений будем пользоваться этим условием в форме (1.28).

Введем новую функцию $z^*(\tau, \zeta)$, определенную следующим образом:

$$z^*(\tau, \zeta) = z(\tau, \zeta) + i\tau \qquad \text{или} \qquad z(\tau, \zeta) = z^*(\tau, \zeta) - i\tau \tag{2.1}$$

При этом будем иметь

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\partial z^*}{\partial \zeta}, \qquad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \tau} = \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \tau} + i$$

Подставляя эти выражения в (1.28), найдем

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial z^*}{\partial \zeta} + i\frac{\partial z^*}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \tau} + i\right)\right]_{\zeta=\xi} = 1 \tag{2.2}$$

или после преобразований получим следующее условие для определения функции $z^*(\tau, \zeta)$:

$$\operatorname{Re}\left[i\,\frac{\partial z^*}{\partial \zeta}\,\frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \tau}\right]_{\zeta=\xi} = 1 \tag{2.3}$$

Для нахождения частного решения воспользуемся методом, изложенным в заметке автора [3]. Будем искать функцию $z^*(\tau, \zeta)$ в виде:

$$z^*(\tau, \zeta) = f_1(\zeta) + f_2(\zeta)\,\Phi(\tau) \tag{2.4}$$

В таком случае

$$\frac{\partial z^*}{\partial \zeta} = f_1'(\zeta) + f_2'(\zeta)\,\Phi(\tau), \qquad \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \tau} = \overline{f_2(\zeta)}\,\Phi'(\tau)$$

Подставляя эти выражения для производных (2.4), найдем

$$\operatorname{Re}\left[i\,(f_1'(\zeta) + f_2'(\zeta)\,\Phi(\tau))\,\overline{f_2(\zeta)}\,\Phi'(\tau)\right]_{\zeta=\xi} =$$
$$= \operatorname{Re}\left[i\,f_1'(\zeta)\overline{f_2(\zeta)}\right]_{\zeta=\xi}\Phi'(\tau) + \operatorname{Re}\left[i f_2'(\zeta)\,\overline{f_2(\zeta)}\right]_{\zeta=\xi}\Phi(\tau)\,\Phi'(\tau) = 1 \tag{2.5}$$

Условие (2.5) будет удовлетворено например, тогда, когда будут выполняться следующие соотношения:

$$\Phi'(\tau) = 1, \quad \operatorname{Re}\left[i f_2'(\zeta)\,\overline{f_2(\zeta)}\right]_{\zeta=\xi} = 0, \quad \operatorname{Re}\left[i f_1'(\zeta)\,\overline{f_2(\zeta)}\right]_{\zeta=\xi} = 1 \tag{2.6}$$

На основании первого из этих соотношений

$$\Phi(\tau) = \tau + c \tag{2.7}$$

Из второго соотношения определяется функция $f_2(\zeta)$, а после нахождения этой функции становится возможным найти $f_1(\zeta)$.

Заметим, что можно отыскать множество функций, удовлетворяющих приведенным выше условиям. Возьмем в качестве примера функции

$$f_2(\zeta) = \zeta, \qquad f_1(\zeta) = -i\ln\zeta, \qquad f_1'(\zeta) = -\frac{i}{\zeta} \tag{2.8}$$

Нетрудно видеть, что при этом второе и третье из условий (2.6) удовлетворяются.

В результате получим следующее выражение для функции $z^*(\tau, \zeta)$:

$$z^*(\tau, \zeta) = f_1(\zeta) + f_2(\zeta)\,\Phi(\tau) = -\ln\zeta + \zeta\tau \tag{2.9}$$

или, принимая во внимание соотношение (2.1) между функциями $z(\tau, \zeta)$ и $z^*(\tau, \zeta)$, найдем

$$z(\tau, \zeta) = z^*(\tau, \zeta) - i\tau = -i\ln\zeta + \zeta\tau - i\tau = -i\ln\zeta + (\zeta - i)\,\tau \tag{2.10}$$

Нетрудно убедиться в том, что построенная таким образом функция отображает нижнюю полуплоскость на некоторую однолистную область, так как $\partial z / \partial\zeta$ в нижней полуплоскости всюду отлична от нуля.

Дадим теперь выражение для комплексного потенциала скоростей, который является также функцией от вспомогательной комплексной переменной ζ. Воспользовавшись соотношением (1.30), найдем

$$w(\tau, \zeta) = -ki\,[\zeta - z(\tau, \zeta)] = -ki\,[\zeta + i\ln\zeta - (\zeta - i)\,\tau] \tag{2.11}$$

Вводя вместо переменной τ время t, получим окончательно выражения для функции, отображающей область, занятую грунтовыми водами, на полуплоскость, и для комплексного потенциала скоростей:

$$z(t, \zeta) = -i\ln\zeta + (\zeta - i)\,\frac{k}{m}\,t \tag{2.12}$$

$$w(t, \zeta) = -ki\left[i\ln\zeta + \zeta - (\zeta - i)\,\frac{k}{m}\,t\right] \tag{2.13}$$

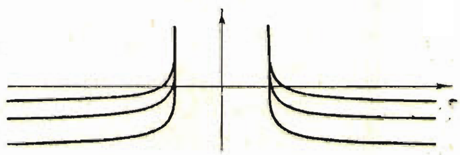
Отделяя в (2.12) действительную и мнимую части, легко найти уравнения кривых, ограничивающих область, занятую грунтовыми водами.

Будем иметь

$$x = \xi\,\frac{k}{m}\,t, \qquad y = -\ln|\xi| - \frac{k}{m}\,t \tag{2.14}$$

Отсюда следует

$$y = -\ln|x| + \left[\ln\left(\frac{k}{m}\,t\right) - \frac{k}{m}\,t\right] \tag{2.15}$$



Фиг. 2

Таким образом, область, занятая грунтовыми водами, ограничена двумя логарифмическими кривыми, причем граница области перемещается параллельно самой себе вдоль оси y (фиг. 2).

Установим, чему соответствует полученное точное решение. Прежде всего заметим, что в случае установившегося процесса, когда функция $z(\tau, \zeta)$ не зависит от τ, условие (1.28) приобретает следующий вид:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=\xi} = 1 \tag{2.16}$$

В таком случае функция

$$z(\zeta) = -i\ln\zeta + \zeta + i\alpha \tag{2.17}$$

очевидно, удовлетворяет этому условию.

Эта функция соответствует фильтрации из канала, когда жидкость, поступающая в пористую среду, растекается таким образом, что на бесконечности модуль скорости стремится к нулю. С другой стороны, решение (2.10) в любой момент времени имеет такую же форму, как и функция (2.17).

Определим, пользуясь выражениями (2.12) и (2.13), скорости в потоке грунтовых вод:

$$v_x - iv_y = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w / \partial \zeta}{\partial z / \partial \zeta} = \frac{-ki\,(i/\zeta + 1 - kt/m)}{-i/\zeta + kt/m} = \frac{-ki\,[i + (1 - kt/m)\,\zeta]}{-i + kt\zeta/m} \qquad (2.18)$$

Найдем скорости, которые будут иметь место в окрестности точки $\zeta = 0$ (в потоке, поступающем сверху в пористую среду) и в окрестности бесконечно удаленной точки (в слое, находящемся на бесконечно большой глубине). При $\zeta = 0$ будем иметь на основании (2.18)

$$v_x - iv_y = ki \qquad (2.19)$$

Следовательно, в потоке грунтовых вод, поступающем в пористую среду, скорость будет направлена параллельно оси y, причем будем иметь

$$v_y = -k$$

С такой скоростью будет происходить движение грунтовых вод при фильтрации под действием сил тяжести из весьма неглубокого канала.

Установим теперь на основании (2.18) значение скоростей при стремлении $\zeta \to \infty$. Имеем

$$v_x - iv_y = -ki\,\frac{1 - kt/m}{kt/m}, \qquad v_y = k\,\frac{1 - kt/m}{kt/m}$$

Таким образом, в слое, находящемся на бесконечно большой глубине, скорость направлена также параллельно оси y, причем меняется во времени по указанному выше закону.

Итак, полученное решение можно интерпретировать следующим образом. Из весьма неглубокого канала происходит установившаяся фильтрация грунтовых вод в пористую среду таким образом, что грунтовые воды растекаются и скорость в бесконечно удаленном слое стремится к нулю. В некоторой момент времени скорость v_y^* в бесконечно удаленном слое начинает меняться по закону

$$v_y^* = k\,\frac{1 - kt/m}{kt/m} \qquad (2.20)$$

в результате чего происходит изменение уровня грунтовых вод.

Мы остановились здесь достаточно подробно на этом случае неустановившегося движения грунтовых вод при фильтрации из канала и одновременном повышении уровня грунтовых вод, так как в этом случае мы имеем весьма простое решение, точно удовлетворяющее нелинейному граничному условию. Это решение в силу своей простоты допускает детальный анализ.

Можно отыскать, пользуясь указанным выше приемом, ряд других точных решений, удовлетворяющих исходному нелинейному условию, однако, будучи полученными обратным методом, они могут оказаться довольно искусственными. Поэтому обратимся к решению задачи о неустановившейся фильтрации методом последовательных приближений.

Будем находить комплексный потенциал скоростей $w(t, \zeta)$, для определения которого воспользуемся условием (1.31):

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} + \frac{k}{m} i \frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{i}{k} \frac{\partial \overline{w}}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} = 0 \qquad (2.21)$$

Кроме того, должно быть задано начальное значение комплексного потенциала скоростей, т. е. должно быть известно

$$w(0, \zeta) = w_0(\zeta) \quad \text{при} \quad t = 0$$

Эта функция соответствует начальной форме области. При этом комплексный потенциал скоростей, рассматриваемый как функция вспомогательной переменной ζ, следующим образом выражается на основании функции $z(t, \zeta)$, отображающей область, занятую жидкостью, на полуплоскость [см. 1.30)]:

$$w(t, \zeta) = ki[z(t, \zeta) - \zeta] \qquad (2.22)$$

Условие (2.21) может быть переписано следующим образом:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} + \frac{k}{m} i \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} = \operatorname{Re}\left[\frac{i}{k} \frac{\partial \overline{w}}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} \qquad (2.23)$$

В правой части этого выражения находится произведение производных от комплексного потенциала скоростей. Если неустановившееся движение грунтовых вод таково, что скорости, возникающие при этом, невелики по абсолютной величине, произведением производных от комплексного потенциала скоростей можно пренебречь по сравнению с самими производными. Таким образом, в правой части условия (2.23) будет величина, равная нулю, и, следовательно, w определится на основании некоторого линейного граничного условия. В дальнейшем это обстоятельство будет использовано для нахождения линеаризованного граничного условия, с помощью которого будут решаться задачи о неустановившемся движении грунтовых вод.

Будем строить выражения для комплексного потенциала скоростей посредством следующего метода последовательных приближений.

Первое приближение $w^{(1)}(t, \zeta)$ будем находить на основании условия

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \overline{w}^{(1)}}{\partial t} + \frac{k}{m} i \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} = 0 \qquad (2.24)$$

т. е. в условии (2.23) будем полагать правую часть равной нулю. При этом будем пользоваться также начальным условием, полагая, что при $t = 0$ будет иметь место

$$w^{(1)}(0, \zeta) = w_0(\zeta)$$

Так как найденное таким образом значение комплексного потенциала скоростей позволяет установить приближенные значения производных по ζ и по t, то для определения второго приближения будем пользоваться условием (2.23), причем в правой части поместим производные, найденные из первого приближения.

Таким образом, второе приближение находим из условия

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \overline{w}^{(2)}}{\partial t} + \frac{k}{m} i \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} = \operatorname{Re}\left[\frac{i}{k} \frac{\partial \overline{w}_0^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} \tag{2.25}$$

При этом также для определения $w^{(2)}(t, \zeta)$ воспользуемся начальным условием при $t = 0$

$$w^{(2)}(0. \zeta) = w_0(\zeta)$$

Этот метод последовательных приближений может быть продолжен и дальше. Приближение n-го порядка находится на основании приближения $(n-1)$-го порядка из условия

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \overline{w}^{(n)}}{\partial t} + \frac{k}{m} i \frac{\partial w^{(n)}}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} = \operatorname{Re}\left[\frac{i}{k} \frac{\partial \overline{w}^{(n-1)}}{\partial t} \frac{\partial w^{(n-1)}}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} \tag{2.26}$$

Кроме того, функция $w^{(n)}(t, \zeta)$ должна удовлетворять начальному условию $w^{(n)}(0, \zeta) = w_0(\zeta)$ при $t = 0$.

Заметим, что левые части в условиях (2.23) и (2.24) могут быть преобразованы следующим образом:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} + \frac{k}{m} i \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} = \operatorname{Re}\left[\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{k}{m} i \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi}$$

Это следует из того, что время является параметром, имеющим действительное значение, и поэтому функция $\partial \overline{w} / \partial t$ является сопряженной по отношению к функции $\partial w / \partial t$. Действительные же части двух сопряженных величин равны между собой.

Итак, будем искать первое приближение из условия

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} + \frac{k}{m} i \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} = 0 \tag{2.27}$$

причем $w^{(1)}(0, \zeta) = w_0(\zeta)$, когда $t = 0$.

В данном случае действительная часть аналитической функции

$$F(\zeta, t) = \frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} + \frac{k}{m} i \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \zeta}$$

регулярной в нижней полуплоскости, равна нулю на контуре этой области, т. е. на действительной оси. Следовательно, везде в нижней полуплоскости $F(t, \zeta) = 0$; поэтому в этой области функция $w^{(1)}(t, \zeta)$ должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} + \frac{k}{m} i \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \zeta} = 0$$

Функция, удовлетворяющая этому уравнению, может быть представлена в следующей форме:

$$F\left(\zeta - \frac{k}{m} it\right)$$

Так как в начальный момент времени при $t = 0$ должно иметь место

$$F(t, \zeta) = w_0(\zeta)$$

то, следовательно, функция, которая удовлетворяет и начальному и граничному условиям, будет иметь вид:

$$w^{(1)}(t, \zeta) = w_0\left(\zeta - \frac{k}{m} it\right) \tag{2.28}$$

Будем теперь искать второе приближение, причем для определения правой части в условии (2.25) воспользуемся только что найденным выражением (2.28) для функции $w^{(1)}(t, \zeta)$. На основании этого получим

$$\operatorname{Re}\left[\frac{i}{k}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial t}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} = \operatorname{Re}\left[\frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial t}\overline{w}_0\left(\xi - i\eta + \frac{k}{m}it\right)\frac{\partial}{\partial \zeta}w_0\left(\xi + i\eta - \frac{k}{m}it\right)\right]_{\zeta=\xi} =$$

$$= \operatorname{Re}\left[-\frac{1}{m}\overline{w}_0'\left(\xi + \frac{k}{m}it\right)w_0'\left(\xi - \frac{k}{m}it\right)\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{m}\left|w_0'\left(\xi - \frac{k}{m}it\right)\right|^2\right] =$$

$$= -\frac{1}{m}\left|w_0'\left(\xi - \frac{k}{m}it\right)\right|^2$$

Таким образом, условие (2.25) для определения второго приближения приобретает следующий вид:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \overline{w}^{(2)}}{\partial t} + \frac{k}{m}i\frac{\partial w^{(2)}}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=\xi} = -\frac{1}{m}\left|w_0'\left(\xi - \frac{k}{m}it\right)\right|^2 \tag{2.29}$$

Построим теперь функцию комплексной переменной $\Phi(t, \zeta)$, регулярную в нижней полуплоскости, действительная часть которой на действительной оси совпадает с величиной

$$-\frac{1}{m}\left|w_0'\left[\xi - \frac{k}{m}it\right]\right|^2$$

Применяя формулу Шварца для нижней полуплоскости, получим следующее выражение для указанной функции:

$$\Phi(t, \zeta) = -\frac{1}{m}\frac{1}{\pi t}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|w_0'\left(\xi - \frac{k}{m}it\right)\right|^2\frac{d\xi}{\xi - \zeta}$$

Так как согласно (2.29) действительные части функции

$$\frac{\partial w^{(2)}}{\partial t} + \frac{k}{m}i\frac{\partial w^{(2)}}{\partial \zeta}$$

и функции $\Phi(t, \zeta)$ совпадают на действительной оси, причем каждая из этих функций регулярна в нижней полуплоскости, то эти функции равны в любой точке нижней полуплоскости.

Следовательно, $w^{(2)}(\zeta, t)$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial w^{(2)}}{\partial t} + \frac{k}{m}i\frac{\partial w^{(2)}}{\partial \zeta} = -\frac{1}{m}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|w_0'\left(\xi - \frac{k}{w}it\right)\right|^2\frac{d\xi}{\xi - \zeta} \tag{2.30}$$

причем при $t = 0$ должно иметь место $w^{(2)}(0, \zeta) = w_0(\zeta)$.

Рассмотрим в качестве примера следующий случай. Пусть в начальный момент времени, при $t=0$, грунтовые воды занимают область, отображаемую на полуплоскость посредством функции

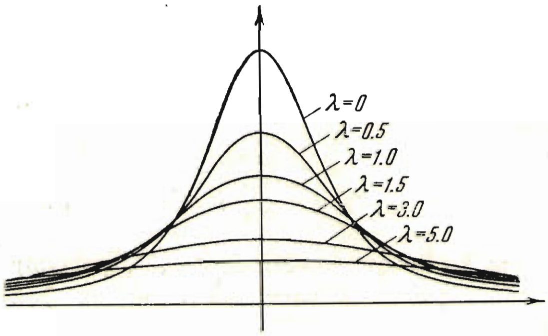
$$z_0(\zeta) = \zeta + \frac{\alpha}{\zeta - i} \tag{2.31}$$

На фиг. 3 изображена при $\lambda = 0$ начальная форма области. Здесь введено обозначение $\lambda = kt/m$. При построении фиг. 3 принято $\alpha = \frac{1}{2}$.

Воспользовавшись соотношением (2.22), определим начальное значение комплексного потенциала скоростей:

$$w_0(\zeta) = ki[z_0(\zeta) - \zeta] = ki\frac{\alpha}{\zeta - i} \tag{2.32}$$

В таком случае согласно (2.28) первое приближение будет иметь следующий вид:



Фиг. 3

$$w^{(1)}(t, \zeta) = w_0\left(\zeta - \frac{k}{m}it\right) =$$

$$= ki\frac{\alpha}{\zeta - (1 + ikt/m)\,i} \tag{2.33}$$

Найдем теперь, какой будет контур области, занятой грунтовыми водами в процессе неустановившегося движения.

Функция, отображающая область на полуплоскость, определится на основании соотношения (2.22) следующим образом:

$$z^{(1)}(t, \zeta) = \zeta - \frac{i}{k}w^{(1)}(t, \zeta) = \zeta + \frac{\alpha}{\zeta - (1 + kt/m)\,i} \tag{2.34}$$

На фиг. 3 изображены также последовательные формы области, занятой грунтовыми водами при различных значениях времени, в случае, когда для отображающей функция берется выражение, полученное по первому приближению. Для определения второго приближения воспользуемся условием (2.30). При этом имеем

$$w_0'\left(\zeta - \frac{k}{m}it\right) = -ki\frac{\alpha}{[\zeta - (1 + kt/m)\,i]^2}$$

Отсюда квадрат модуля этой функции при $\zeta = \xi$ будет равен:

$$\left| w_0'\left(\zeta - \frac{k}{m}it\right)\right|^2_{\zeta=\xi} = k^2\alpha^2\frac{1}{[\xi^2 + (1 + kt/m)^2]^2} \tag{2.35}$$

Определим функцию, регулярную в нижней полуплоскости, действительная часть которой равна величине, даваемой соотношением (2.35). Для отыскания этой функции воспользуемся следующим приемом.

Разложим дробь, находящуюся в правой части выражения (2.35), на следующие слагаемые:

$$\frac{k^2\alpha^3}{[\xi^2+(1+kt/m)^2]^2} = -\frac{k^2\alpha^2}{4(1+kt/m)^2}\left[\frac{1}{[\xi+(1+kt/m)i]^2}+\right.$$
$$+\frac{1}{[\xi-(1+kt/m)i]^2}-\frac{i}{(1+kt/m)[\xi+(1+kt/m)i]}+$$
$$\left.+\frac{i}{(1+kt/m)[\xi-(1+kt/m)i]}\right] \qquad (2.36)$$

Если рассматривать каждое слагаемое как значение некоторой функции комплексной переменной ζ, которое она принимает на действительной оси, или, иными словами, аналитически продолжить функцию, заданную на действительной оси, на всю плоскость комплексной переменной, то полученная при этом функция будет обладать полюсами или в верхней, или в нижней полуплоскости. Для того чтобы построить функцию, действительная часть которой совпадает с действительной частью полученной таким образом функции, используем то обстоятельство, что на действительной оси имеет место соотношение

$$\zeta=\bar{\zeta}=\xi, \quad \mathrm{Re}\,[f(\zeta)]_{\zeta=\xi}=\mathrm{Re}\,[\overline{f(\bar{\zeta})}\,]_{\zeta=\xi}$$

На основании этого

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\zeta+(1+kt/m)i}\right]_{\zeta=\xi}=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\zeta-(1+kt/m)i}\right]_{\zeta=\xi}$$
$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{[\zeta+(1+kt/m)i]^2}\right]_{\zeta=\xi}=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{[\zeta-1+kt/m)i]^2}\right]_{\zeta=\xi}$$

Поэтому в результате замены в функции, полученной путем указанного выше аналитического продолжения, слагаемых, не регулярных в нижней полуплоскости, на слагаемые, регулярные и обладающие такой же действительной частью, получаем следующую функцию, регулярную в нижней полуплоскости, обладающую на действительной оси заданной действительной частью: (2.37)

$$\frac{k^2\alpha^2}{[\xi^2+(1+kt/m)^2]^2}=\mathrm{Re}\left[-\frac{k^2\alpha^2}{4(1+kt/m)^2}\left\{\frac{1}{[\zeta+(1+kt/m)i]^2}+\right.\right.$$
$$+\frac{1}{[\zeta-(1+kt/m)i]^2}-\frac{i}{(1+kt/m)[\zeta+(1+kt/m)i]}+$$
$$\left.\left.+\frac{i}{(1+kt/m)[\zeta-(1+kt/m)i]}\right\}\right]_{\zeta=\xi}=$$
$$=\mathrm{Re}\left\{-\frac{k^2\alpha^2}{4(1+kt/m)^2}\left[\frac{1}{[\zeta-(1+kt/m)i]^2}+\frac{1}{[\zeta-(1+kt/m)i]^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{(1+kt/m)[\zeta-(1+kt/m)^2]}+\frac{i}{(1+kt/m)[\zeta-(1+kt/m)i]}\right]\right\}_{\zeta=\xi}=$$
$$=\mathrm{Re}\left\{-\frac{k^2\alpha^2}{2(1+kt/m)^2}\left[\frac{1}{[\zeta-(1+kt/m)i]^2}+\frac{i}{(1+kt/m)[\zeta-(1+kt/m)i]}\right.\right\}_{\zeta=\xi}$$

Такой же результат был бы получен, если бы для нахождения этой функции была применена формула Шварца.

Поэтому на основании (2.35) будем иметь

$$-\frac{1}{m}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{k^2\alpha^2}{[\xi+(1+kt/m)^2]^2}\,\frac{d\xi}{\xi-\zeta}=\frac{k^2\alpha^2}{2m\,(1+kt/m)^2}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{[\zeta-(1+kt/m)\,i]^2}+\frac{i}{(1+kt/m)\,[\zeta-(1+kt/m)\,i]}\right\} \tag{2.38}$$

Таким образом, для нахождения второго приближения $w^{(2)}(t,\zeta)$ необходимо, как это следует из (2.30) и (2.38), найти функцию, которая является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial w^{(2)}}{\partial t}+\frac{k}{m}\,i\,\frac{\partial w^{(2)}}{\partial \zeta}=$$

$$=\frac{k^2\alpha^2}{2m\,(1+kt/m)^2\,[\zeta-kit/m-i]^2}+\frac{k^2\alpha^2 i}{2m\,(1+kt/m)^3\,[\zeta-kit/m-i]} \tag{2.39}$$

и удовлетворяет начальному условию $w^{(2)}(0,\zeta)=w_0(\zeta)$ при $t=0$.

Нетрудно найти частное решение уравнения первого порядка (2.39) с правой частью приведенного выше вида, удовлетворяющее поставленным условиям. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial u}+\beta\,\frac{\partial U}{\partial v}=f(u)\,F(\beta u-v) \tag{2.40}$$

При этом функция $F(\beta u-v)$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial F(\beta u-v)}{\partial u}+\beta\,\frac{\partial F(\beta u-v)}{\partial v}=0$$

Правая часть уравнения (2.39) может быть представлена в виде суммы слагаемых такого же вида, как правая часть выражения (2.40).

Путем непосредственной проверки можно убедиться, что уравнение (2.40) имеет следующее частное решение:

$$U(u,v)=F(\beta u-v)\int\limits_0^u f(u)\,du \tag{2.41}$$

При этом полученное частное решение удовлетворяет начальному условию $U(u,v)=0$ при $u=0$.

Решение уравнения (2.39) можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$w^{(2)}(t,\zeta)=w_1^{(2)}(t,\zeta)+w_2^{(2)}(t,\zeta) \tag{2.42}$$

причем $w_1^{(2)}(t,\zeta)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial t}+\frac{k}{m}\,i\,\frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial \zeta}=0 \tag{2.43}$$

а $w_2^{(2)}(t,\zeta)$ является частным решением уравнения (2.39).

Применяя прием отыскания частных решений, указанный выше, найдем функцию $w_2^{(2)}(t,\zeta)$, удовлетворяющую следующему начальному условию: $w_2^{(2)}(t,\zeta)=0$ при $t=0$.

Эта функция будет иметь следующий вид:

$$w_2^{(2)}(t,\zeta) = \frac{k^2\alpha^2}{2m}\int_0^t \frac{dt}{(1+kt/m)^2}\,\frac{1}{[\zeta-(1+kt/m)\,i]^2} + \tag{2.44}$$

$$+\frac{k^2\alpha^2 i}{2m}\int_0^t \frac{dt}{(1+kt/m)^3}\,\frac{1}{[\zeta-(1+kt/m)\,i]} =$$

$$= \alpha^2 k^2 \left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+kt/m}\right)\frac{1}{[\zeta-(1+kt/m)\,i]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{(1+kt/m)^2}\right)\frac{i}{\zeta-(1+kt/m)\,i}\right]$$

В таком случае функция $w_1^{(2)}(t,\zeta)$, которая удовлетворяет однородному уравнению (2.43), должна удовлетворять также условию:

$$w_1^{(2)}(t,\zeta) = w_0(\zeta) = \frac{ki\alpha}{\zeta - i} \quad \text{при } t = 0,$$

Согласно указанному ранее эта функция такова:

$$w_1^{(2)}(t,\zeta) = w_0\left(\zeta - \frac{k}{m}\,it\right) = ki\,\frac{\alpha}{\zeta-(1+kt/m)\,i} \tag{2.45}$$

Таким образом, функция $w_1^{(2)}(t,\zeta)$ совпадает с первым приближением, которое дается формулой (2.33). Итак, на основании (2.48), а также выражений (2.44) и (2.45) находим второе приближение:

$$w^{(2)}(t,\zeta) = \frac{\alpha k i}{\zeta-(1+kt/m)} + \alpha^2 k\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+kt/m}\right)\frac{1}{[\zeta-(1+kt/m)]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{(1+kt/m)^2}\right)\frac{i}{\zeta-(1+kt/m)\,i}\right]$$

или, иначе, это может быть записано следующим образом:

$$w^{(2)}(t,\zeta) = k\left\{\left[\alpha+\frac{\alpha^2}{4}\left(1-\frac{1}{(1+kt/m)^2}\right)\right]\frac{i}{\zeta-(1+kt/m)\,i} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^2}{4}\left(1-\frac{1}{1+kt/m}\right)\frac{1}{[\zeta-(1+kt/m)\,i]^2}\right\} \tag{2.46}$$

Отсюда для функции, отображающей область, занятую грунтовыми водами, на полуплоскость, имеем во втором приближении выражение

$$z^{(2)}(t,\zeta) = \zeta - \frac{i}{k}\,w^{(2)}(t,\zeta) = \zeta + \left[\alpha+\frac{\alpha^2}{4}\left(1-\frac{1}{(1+kt/m)^2}\right)\right]\frac{1}{\zeta-(1+kt/m)\,i} -$$

$$-\frac{\alpha^2}{2}\left(1-\frac{1}{1+kt/m}\right)\frac{i}{[\zeta-(1+km/t)\,i]^2} \tag{2.47}$$

Найдем закон, по которому изменяется значение максимальной ординаты для области, занятой грунтовыми водами, причем в одном случае форма этой области определяется на основании первого приближения, а в другом случае для этой цели использована функция второго приближения. Максимальное значение ордината будет иметь в середине области, когда $\zeta = 0$.

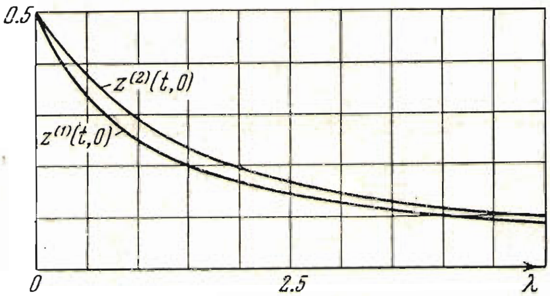
В первом приближении, как это следует из (2.34), будем иметь

$$z^{(1)}(t,0)=\frac{\alpha}{1+kt/m}\,i \qquad (2.48)$$

Во втором приближении на основании (2.47) получим

$$z^{(2)}(t,0)=\alpha i\,\frac{1}{1+kt/m}+\alpha^2 i\left[\frac{1}{4(1+kt/m)}+\frac{1}{2(1+kt/m)^2}-\frac{3}{4(1+kt/m)^3}\right] \qquad (2.49)$$

На фиг. 4 даны значения максимальной ординаты по (2.48) и (2.49). При этом принято $\alpha=\frac{1}{2}$; по оси абсцисс отложена величина $\lambda=kt/m$. Как видно, максимальное расхождение между этими кривыми невелико.



Фиг. 4

В заключение на основании указанных выше соображений дадим линеаризованное условие, которому должен удовлетворять комплексный потенциал скоростей, когда начальная граница области, занятой грунтовыми водами, близка к горизонтали. В этом случае значения производных от потенциала скоростей $w(t,\zeta)$ по t и ζ малы и их произведением можно пренебречь. Поэтому на основании (1.39) будем иметь

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}+\frac{k}{m}\,i\,\frac{\partial w}{\partial\zeta}-\frac{i}{k}\,\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right]_{\zeta=\xi}\approx$$

$$\approx\operatorname{Re}\left[\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}+\frac{k}{m}\,i\,\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right]_{\zeta=\xi}=\operatorname{Re}\left[\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{k}{m}\,i\,\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right]_{\zeta=\xi}=0$$

Кроме того, так как область, занятая грунтовыми водами, близка к полуплоскости, будем иметь

$$z(\zeta)\approx\zeta,\qquad \frac{\partial w}{\partial\zeta}\approx\frac{\partial w}{\partial z}$$

Поэтому окончательно

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{k}{m}\,i\,\frac{\partial w}{\partial\zeta}-\frac{i}{k}\,\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right]_{\zeta=\xi}\approx\operatorname{Re}\left[\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{k}{m}\,i\,\frac{\partial w}{\partial z}\right]_{\zeta=\xi}=0$$

Итак, в случае, когда область, занятая грунтовыми водами, близка к полуплоскости, можно полагать, что при неустановившемся движении комплексный потенциал скоростей будет удовлетворять следующему линеаризованному граничному условию:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{k}{m}\,i\,\frac{\partial w}{\partial z}\right]_{\zeta=\xi}=0 \qquad (2.50)$$

Это условие выведено здесь только для указанного выше случая.

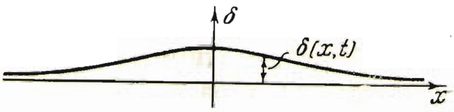
В следующем разделе аналогичное условие для комплексного потенциала скоростей будет получено при более общих предположениях.

§ 3. Задача о неустановившемся движении грунтовых вод в линеаризованной постановке. В предыдущем параграфе было выведено линеаризованное условие, которому должен удовлетворять комплексный потенциал скоростей в случае, когда начальное возвышение свободной поверхности невелико, причем этот вывод сделан применительно к случаю, когда грунтовые воды занимают полуплоскость.

Здесь мы выведем это условие иным путем, причем результат, как легко убедиться, будет справедлив и для других форм областей, занятых грунтовыми водами.

Обозначим возвышение над горизонтальной поверхностью области, занятой жидкостью, через $\delta(t, x)$ (фиг. 5). Потенциал скоростей φ и давление p связаны зависимостью:

$$\varphi = -k\left(\frac{p}{\rho g} + y\right) \qquad (3.1)$$



Фиг. 5

В этом параграфе, так же как и в предыдущих, будем рассматривать неустановившееся движение как последовательность установившихся состояний. Будем считать, что на поверхности грунтовых вод давление равно нулю и, таким образом, на основании (3.1) значение потенциала скоростей будет следующим:

$$\varphi = -ky \qquad (3.2)$$

Но y_c — координата точки, расположенной на поверхности,— равна введенной ранее функции $\delta(t, x)$. Итак, имеем

$$y_c = \delta(t, x), \qquad \varphi = -k\delta(x, t) \qquad (3.3)$$

Снесем эти условия на горизонталь, т. е. на ось x, что, очевидно, допустимо, так как возвышение уровня грунтовых вод предполагается небольшим:

$$\varphi = -k\delta(t, x), \qquad y = 0 \qquad (3.4)$$

За промежуток времени Δt точка на поверхности области, занятой грунтовыми водами, получит перемещение:

$$\Delta\delta(t, x) = v_n \Delta t$$

Так как поверхность предполагается почти всюду слабо искривленной, то можно считать $v_n \approx v_y$. Следовательно,

$$\Delta\delta(t, x) = \frac{v_y}{m}\Delta t = \frac{1}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta t$$

Здесь m — пористость среды.

Деля на Δt и переходя к пределу, получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial\delta(t, x)}{\partial t} = -\frac{1}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad (3.5)$$

Но согласно (3.4) при $y = 0$ будем иметь $\varphi = -k\,\delta(t, x)$.

Отсюда находим

$$\frac{\partial \delta (t, x)}{\partial t} = - \frac{1}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

или окончательно получаем следующее условие, которое должно иметь место при $y = 0$:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{k}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_{y=0} = 0 \tag{3.6}$$

Установим на основании этого условие, которому должен удовлетворять комплексный потенциал скоростей. Имеем

$$w(z) = \varphi + i\psi, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + i \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Пользуясь этими выражениями для производных, (3.6) преобразуем следующим образом:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{k}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_{y=0} = \operatorname{Re}\left[\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{k}{m} i \frac{\partial w}{\partial z}\right]_{y=0} = 0 \tag{3.7}$$

Нетрудно убедиться, что это выражение совпадает с ранее выведенным условием (2.50). Однако при этом предположение, что грунтовые воды занимают область, близкую к полуплоскости, не является необходимым. Для справедливости условия (3.7) необходимо, чтобы возвышение уровня грунтовых вод над горизонталью было небольшим и, кроме того, почти всюду было также небольшим искривление поверхности области, занятой грунтовыми водами.

Будем рассматривать вначале случай, когда грунтовые воды заполняют нижнюю полуплоскость. Обозначим

$$\psi(z) = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{k}{m} i \frac{\partial w}{\partial z}$$

На контуре области — оси x — согласно (3.7) имеем

$$\operatorname{Re}[\psi(z)] = 0$$

Так как функция $\psi(z)$ регулярна в нижней полуплоскости, то в случае, когда ее действительная часть на границе равна нулю, эта функция всюду равна нулю. Таким образом, имеем

$$\psi(z) = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{k}{m} i \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.8}$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет следующую форму:

$$w(t, z) = F\left(z - \frac{k}{m} it\right) \tag{3.9}$$

где $F(z)$ — произвольная функция.

Эта функция, очевидно, равна начальному значению комплексного потенциала скоростей. В самом деле, при $t = 0$ будем иметь

$$w_0(z) = w(0, z) = F(z) \tag{3.10}$$

Будем обозначать следующим образом начальное возвышение поверхности грунтовых вод:

$$\delta(0,\ x)=f(x)$$

Следовательно, согласно (9.4) начальное значение потенциала скоростей при $y=0$ будет таким:

$$\varphi=-kf(x),\qquad t=0$$

Так как функция φ равна действительной части от комплексного потенциала скоростей, то, зная ее значение на оси x, найдем, применяя формулу Шварца,

$$w(0,\ z)=-\frac{k}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi-z} \tag{3.11}$$

На основании (3.9) и (3.10) значение комплексного потенциала скоростей при последующем процессе неустановившегося движения грунтовых вод будет таким:

$$w(t,\ z)=-\frac{k}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi-(z-ikt/m)}=$$

$$=-\frac{k}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi-x+i(y-kt/m)} \tag{3.12}$$

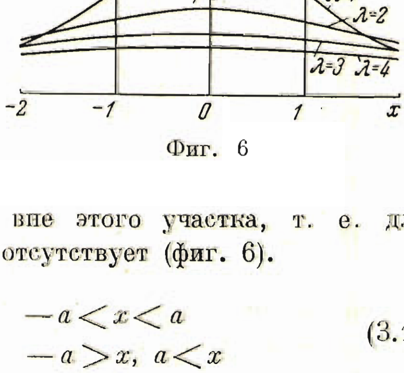
Отсюда потенциал скоростей определяется следующим образом:

$$\varphi(t,\ x,\ y)=\mathrm{Re}\left[-\frac{k}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi-x+i(y-kt/m)}\right] \tag{3.13}$$

При $t=0$ мы, очевидно, получим начальное значение этой функции. Из рассмотрения выражения (3.13) можно сделать следующий вывод.

Если для начального момента времени на оси x определено значение потенциала скоростей, то значение в последующие моменты времени определяется весьма просто.

Для этого нужно определить потенциал на прямой, находящейся на расстоянии kt/m от оси x.



Фиг. 6

Рассмотрим следующий пример: будем предполагать, что в начальный момент времени на участке, где $-a<x<a$, возвышение равно δ_0, а вне этого участка, т. е. для значений $x>a$ и $x<-a$, возвышение отсутствует (фиг. 6).

Таким образом,

$$\varphi(0,\ x)=f(x)=\begin{cases}-k\delta_0 & -a<x<a\\ 0 & -a>x,\ a<x\end{cases} \tag{3.14}$$

Беря действительную часть в формуле (3.11), находим начальное значение потенциала скоростей:

$$\varphi(0,\ x,\ y) = \mathrm{Re}\left[-\frac{k\delta_0}{\pi i}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{d\xi}{\xi - z}\right] = \mathrm{Re}\left[-\frac{k\delta_0}{\pi i}\ln\frac{z-a}{z+a}\right] =$$

$$= \frac{k\delta_0}{\pi}\left[\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x+a} - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x-a}\right]$$

Значение потенциала скоростей в процессе неустановившегося движения может быть определено по формуле (3.13). Оно будет равно:

$$\varphi(t,\ x,\ y) = \mathrm{Re}\left[-\frac{k\delta_0}{\pi i}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{d\xi}{\xi - x + i(y - k/mt)}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[-\frac{k\delta_0}{\pi i}\ln\frac{z - ikt/m - a}{z - ikt/m + a}\right] = \frac{k\delta_0}{\pi}\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y - kt/m}{x+a} - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y - kt/m}{x-a}\right) \quad (3.15)$$

Определим изменение возвышения поверхности с течением времени. Согласно (3.4) и (3.15) получим

$$\delta(t,\ x) = -\frac{1}{k}\varphi(t,\ x,\ 0) = \frac{\delta_0}{\pi}\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{kt/m}{x+a} - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{kt/m}{x-a}\right) \quad (3.16)$$

Задача, которая здесь рассмотрена, носит обычно название задачи о растекании бугра грунтовых вод. Постараемся установить скорость этого растекания. Заметим прежде всего, что жидкость в данном случае предполагается несжимаемой и поэтому скорость распространения возмущений, вообще говоря, бесконечна. Определим скорость растекания следующим образом. Найдем момент времени, в который уровень грунтовых вод в данной точке достигает максимума; найдем этот момент времени для бесконечно близкой точки. Расстояние между точками, разделенное на разность моментов времени, будет равно этой, условно понимаемой скорости растекания.

Для определения момента времени, когда уровень грунтовых вод достигнет максимума, определим $\partial\delta/\partial t$. Будем иметь на основании (3.16)

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} = \frac{\delta_0 mk}{\pi}\,\frac{\{(x+a)\,[m^2(x-a)^2 + k^2t^2] - (x-a)\,[m^2(x+a)^2 + k^2t^2]}{[m^2(x+a)^2 + k^2t^2]\,[m^2(x-a)^2 + k^2t^2]}$$

Указанный момент времени определится из уравнения

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} = 0$$

Определяя отсюда t, найдем

$$t = \frac{m}{k}\sqrt{x^2 - a^2}$$

На основании этого определенная выше условная скорость

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{k}{m}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \quad (3.17)$$

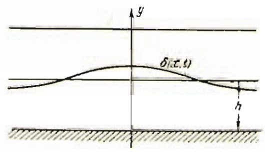
На фиг. 6 нанесено изменение формы области, занятой грунтовыми водами, которое происходит с течением времени.

§ 4. Неустановившееся движение грунтовых вод в слое конечной глубины. Будем полагать, что грунтовые воды занимают некоторую полосу, причем ширина этой полосы, т. е. расстояние от свободной поверхности до водоупора, равна h (фиг. 7).

Аналогичные задачи, но при осреднении скоростей по сечению потока грунтовых вод рассмотрены в статье П. Я. Полубариновой-Кочиной [4].

Потенциал скоростей φ определится на основании следующих условий:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{k}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \quad \text{при } y=h,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \quad \text{при } y=0 \tag{4.1}$$



Фиг. 7

Кроме того, должно быть удовлетворено начальное условие

$$t=0, \qquad y=h, \qquad \varphi=-k\delta_0(x) \tag{4.2}$$

Здесь $\delta_0(t, x)$ — начальное возвышение уровня грунтовых вод.

При этом $\varphi(t, x, y)$ — гармоническая функция относительно переменных x и y.

Будем искать $\varphi(t, x, y)$ в следующей форме:

$$\varphi(t, x, y)=\int\limits_0^{+\infty} A(\alpha, t)\operatorname{ch}\alpha y\cos\alpha x\,d\alpha \tag{4.3}$$

Эта форма пригодна для случаев, когда область, занятая грунтовыми водами, симметрична относительно оси y. В более общем случае решение, конечно, также может быть найдено в виде интеграла Фурье.

Построенная таким образом функция удовлетворяет второму условию из (4.1). В самом деле,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0}=\left[\int\limits_0^{\infty} A(\alpha, t)\,\alpha\operatorname{sh}\alpha y\cos\alpha x\,d\alpha\right]_{y=0}=0$$

Найдем теперь, в каком случае будет удовлетворено первое условие (4.1) при $y=h$:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{k}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=h}=\int\limits_0^{\infty}\left[\operatorname{ch}\alpha h\frac{\partial A(\alpha,t)}{\partial t}+\frac{k}{m}\alpha\operatorname{sh}\alpha h A(\alpha,t)\right]\cos\alpha x\,d\alpha \tag{4.4}$$

Таким образом, функция $A(\alpha,t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\operatorname{ch}\alpha h\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{k}{m}\alpha\operatorname{sh}\alpha h A=0 \tag{4.5}$$

а для того чтобы было выполнено начальное условие (4.2), должно иметь место

$$A(\alpha,t)=A_0(\alpha) \qquad \text{при } t=0 \tag{4.6}$$

Так как $\varphi(0, x, h)=-k\delta_0(x)$ при $t=0$, то $A(\alpha)$ определится из следующего интегрального уравнения Фурье:

$$-k\delta_0(x)=\int\limits_0^{\infty} A_0(\alpha)\operatorname{ch}\alpha h\cos\alpha x\,d\alpha \tag{4.7}$$

Уравнение (4.5) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{k}{m} \alpha \operatorname{th} \alpha h A = 0$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим условию (4.6), будет

$$A(\alpha, t) = A_0(\alpha) \exp\left\{-\frac{k\alpha \operatorname{th} \alpha h}{m} t\right\}$$

Следовательно,

$$\varphi(t, x, y) = \int_0^\infty A_0(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y \cos \alpha x \exp\left\{-\frac{k\alpha \operatorname{th} \alpha h}{m} t\right\} d\alpha \qquad (4.8)$$

Определяя $A_0(\alpha)$ из (4.7), находим

$$A_0(\alpha) = -\frac{2k}{\pi \operatorname{ch} \alpha h} \int_0^\infty \delta_0(\beta) \cos \alpha\beta \, d\beta \qquad (4.9)$$

Рассмотрим случай, когда возвышение уровня грунтовых вод $\delta_0(x)$ равно постоянной величине δ_0 на участке, где $-a < x < a$, и нулю вне этого участка. В таком случае на основании (4.9) получим

$$A_0(\alpha) = -\frac{2}{\pi} \frac{k\delta_0}{\operatorname{ch} \alpha h} \int_0^a \cos \alpha\beta \, d\beta = -\frac{2k\delta_0}{\pi \operatorname{ch} \alpha h} \frac{\sin \alpha a}{\alpha}$$

Отсюда значение потенциала скоростей

$$\varphi(t, x, y) = -\frac{2k\delta_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha a \operatorname{ch} \alpha y \cos \alpha x}{\alpha \operatorname{ch} \alpha h} \exp\left\{-\frac{k\alpha \operatorname{th} \alpha h}{m} t\right\} d\alpha \qquad (4.10)$$

Возвышение уровня грунтовых вод определяется следующим образом:

$$\delta(t, x) = -\frac{1}{k} \varphi(t, x, 0) \qquad (4.11)$$

На основании (4.10) и (4.11) находим

$$\delta(t, x) = \frac{2\delta_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha a \cos \alpha x}{\alpha} \exp\left\{-\frac{k\alpha \operatorname{th} \alpha h}{m} t\right\} d\alpha \qquad (4.12)$$

Аналогичным методом может быть решена задача в случае, когда область, занятая грунтовыми водами, не симметрична относительно оси y.

Поступила 12 VII 1951

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью. ДАН АН СССР. 1945. Т. XLVII. № 4.
2. Калинин Н. К. и Полубаринова-Кочина П. Я. О неустановившемся движении грунтовых вод со свободной поверхностью. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 2.
3. Галин Л. А. О неустановившейся фильтрации при постоянном давлении на границе. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 1.
4. Полубаринова-Кочина П. Я. О неустановившихся движениях грунтовых вод при фильтрации из водохранилищ. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 2.