

О ДИНАМИКЕ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ ПОЛИВАХ

П. Я. Полубаринова-Кочина

(Москва)

Поверхность грунтовых вод в области, которая подвергается искусственному орошению, имеет сложный вид, состоя из бугров и впадин, которые деформируются с течением времени [1]. В настоящей статье рассматриваются некоторые задачи о неустановившихся движениях грунтовых вод, обусловленных поливами.

В качестве первых основных схем взят случай полособразного полива и последующая стадия — выравнивание бугра грунтовых вод.

1. Полосообразный полив при непроницаемом водоупоре. Пусть в момент времени $t = 0$ поверхность грунтовых вод является горизонтальной плоскостью. В дальнейшем над полосой $-R < x < R$ подается постоянный расход ε [$\text{м}^3 / (\text{м}^2 \text{сутки})$]. Это соответствует равномерно-му поливу или выпадению дождя на полосообразной площади (фиг. 1).

Спрашивается, как будет происходить подъем грунтовых вод в зависимости от времени в различных точках рассматриваемой области.

Мы будем рассматривать задачу в «гидравлической» постановке, т. е. поток будем считать осредненным по высоте, как это мы делали, например, в статье [2]. Тогда задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{w}{m} \quad \left(a^2 = \frac{kh}{m} \right) \quad (1.1)$$

Здесь k — коэффициент фильтрации, h — средняя глубина потока (можно принять ее равной начальной глубине), m — активная порозность грунта.

H означает напор, связанный с потенциалом скорости соотношением

$$\varphi = -kH = -k \left(\frac{p}{\rho g} + y \right)$$

Положим (фиг. 1)

$$w = \varepsilon \quad \text{при } |x| < R, \quad w = 0 \quad \text{при } |x| > R$$

Начальное условие мы примем в виде $H(x, 0) = H_0$, где H_0 — первоначальный уровень грунтовых вод. Введем новую переменную

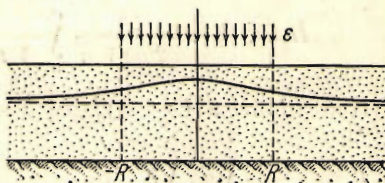
$$H - H_0 = u \quad (1.2)$$

Тогда для u будем иметь нулевое начальное значение

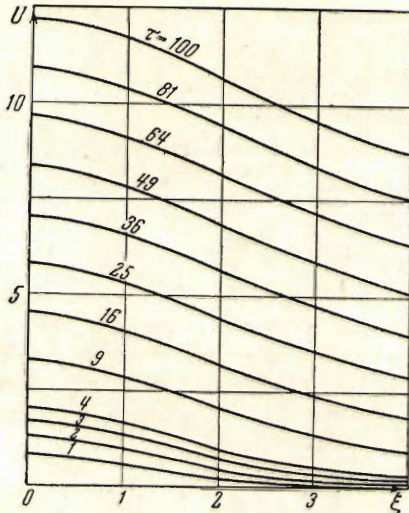
$$u(x, 0) = 0 \quad (1.3)$$

Решение уравнения

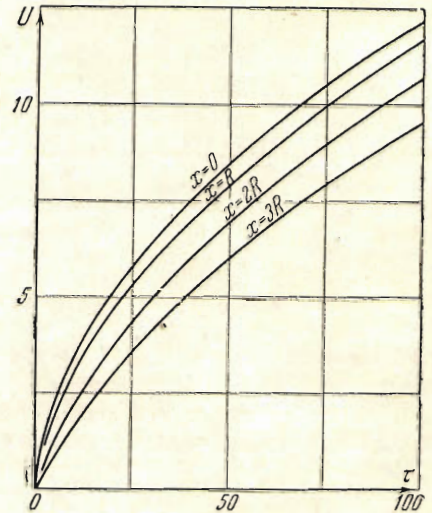
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + j(x, t) \quad (1.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

при начальном условии $u = 0$ имеет вид [3]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2aV\pi} \int_0^t \frac{d\tau}{Vt-\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2t}\right\} f(\zeta, \tau) d\zeta \quad (1.5)$$

Подставив в (1.5) вместо $f(x, t)$ выражение ε/m для $|x| < R$ и нуль для $|x| > R$, получим

$$H(x, t) = \frac{\varepsilon}{2maV\pi} \int_0^t \frac{d\tau}{Vt-\tau} \int_{-R}^R \exp\left\{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\zeta + H_0 \quad (1.6)$$

Подстановка $(\zeta - x) / 2a\sqrt{t-\tau} = \lambda$ дает

$$u = \frac{\varepsilon}{mV\pi} \int_0^t d\tau \int_{r_1}^{r_2} e^{-\lambda^2} d\lambda, \quad \left(r_1 = -\frac{R+x}{2a\sqrt{t-\tau}}, r_2 = \frac{R-x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) \quad (1.7)$$

Перепишем выражение для u так:

$$u(x, t) = \frac{\varepsilon}{2m} \int_0^t \left[\phi\left(\frac{R-x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) + \phi\left(\frac{R+x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) \right] d\tau \quad \left(\phi(x) = \frac{2}{V\pi} \int_0^x e^{-\lambda^2} d\lambda\right) \quad (1.8)$$

где $\phi(x)$ — функция вероятности.

Интегрированием по частям нетрудно получить равенство:

$$\int_0^t \phi\left(\frac{a}{V\tau_1}\right) d\tau_1 = t\phi\left(\frac{a}{Vt}\right) + 2\sqrt{\frac{at}{\pi}} e^{-a^2/t} - 2a^2 \left[1 - \phi\left(\frac{a}{Vt}\right)\right] \quad (1.9)$$

Применим его к каждому слагаемому формулы (1.8), причем примем во внимание нечетность функции $\phi(x) = -\phi(-x)$. Напишем окончательный результат в безразмерных величинах, полагая

$$U = \frac{hk}{R^2\varepsilon} u = \frac{hk}{R^2\varepsilon} (H - H_0), \quad \xi = \frac{x}{R}, \quad \tau = \frac{a^2t}{R^2} = \frac{ht}{mR^2} \quad (1.10)$$

Для U получим два выражения:

для $|\xi| < 1$

$$U = \frac{1}{V\pi} \left\{ \tau \phi\left(\frac{1-\xi}{2V\tau}\right) + \frac{(1-\xi)V\tau}{V\pi} \exp\left\{-\frac{(1-\xi)^2}{4\tau}\right\} - \frac{(1-\xi)^2}{2} \left[1 - \phi\left(\frac{1-\xi}{2V\tau}\right)\right] \right\} +$$

$$+ \tau \phi\left(\frac{1+\xi}{2V\tau}\right) + \frac{(1+\xi)V\tau}{V\pi} \exp\left\{-\frac{(1+\xi)^2}{4\tau}\right\} - \frac{(1+\xi)^2}{2} \left[1 - \phi\left(\frac{1+\xi}{2V\tau}\right)\right] \quad (1.11)$$

для $|\xi| > 1$

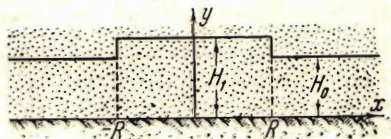
$$U = \frac{1}{V\pi} \left\{ \tau \phi\left(\frac{1+\xi}{2V\tau}\right) + \frac{(1+\xi)V\tau}{V\pi} \exp\left\{-\frac{(1+\xi)^2}{4\tau}\right\} - \frac{(1+\xi)^2}{2} \left[1 - \phi\left(\frac{1+\xi}{2V\tau}\right)\right] \right\} -$$

$$- \tau \phi\left(\frac{\xi-1}{2V\tau}\right) - \frac{(\xi-1)V\tau}{V\pi} \exp\left\{-\frac{(\xi-1)^2}{4\tau}\right\} + \frac{(\xi-1)^2}{2} \left[1 - \phi\left(\frac{\xi-1}{2V\tau}\right)\right] \quad (1.12)$$

На фиг. 2 даны графики зависимости U от ξ при различных значениях τ . На фиг. 3 дана зависимость U от τ при $\xi = 0, 1, 2, 3$.

2. Растекание бугра грунтовых вод. Предположим теперь, что полив прекращен; образовавшийся бугор грунтовых вод будет растекаться. Спрашивается, с какой скоростью будет происходить это растекание? Для решения этой задачи нужно знать начальную форму бугра.

Прежде всего мы рассмотрим случай прямоугольного бугра. Такую форму бугра можно представить себе образованной при полном заполнении грунта водой в средней части поливаемого участка (фиг. 4).



Фиг. 4

Нам нужно найти решение уравнения (1.1) при начальном условии

$$H(x, 0) = H_0 \quad \text{при } |x| > R, \quad H(x, 0) = H_1 \quad \text{при } |x| < R \quad (2.1)$$

Граничным условием будет требование конечности H на ∞ .

Решение однородного уравнения (1.4) (при $f(x,t) = 0$), удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = f(x)$, имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2aV\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2t}\right\} f(\zeta) d\zeta \quad (2.2)$$

В рассматриваемом случае, принимая $u = H - H_0$, имеем, что $u = H_1 - H_0$ при $|x| < R$, $u = 0$ при $|x| > R$. Поэтому

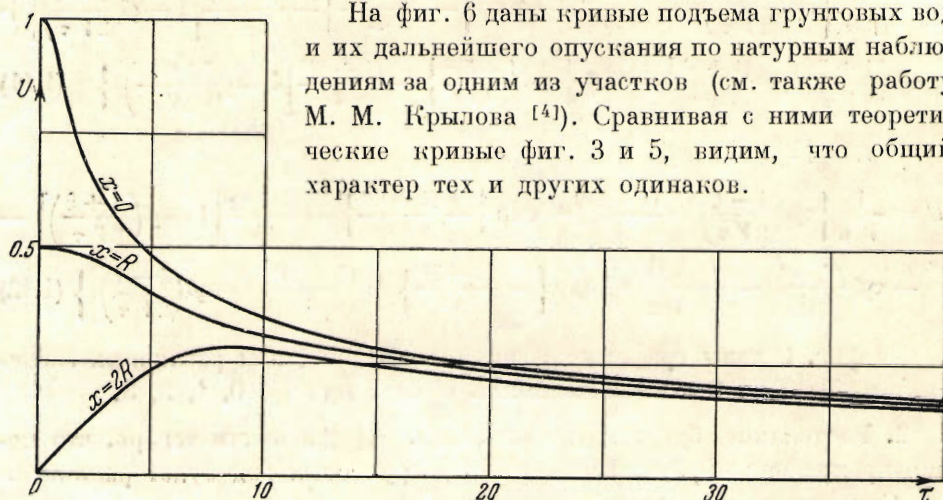
$$H(x,t) = H_0 + \frac{H_1 - H_0}{2aV\pi t} \int_{-R}^R \exp\left\{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2t}\right\} d\zeta$$

При помощи функции $\phi(x)$ это решение представляется в виде

$$H(x,t) = H_0 + \frac{H_1 - H_0}{2} \left[\phi\left(\frac{R-x}{2aVt}\right) + \phi\left(\frac{R+x}{2aVt}\right) \right] \quad (2.3)$$

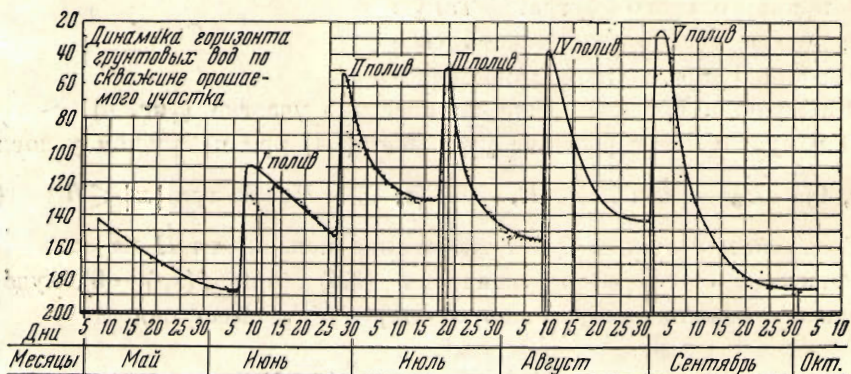
На фиг. 5 даны зависимости высот грунтовых вод от времени для середины бугра и для значений $x = R, 2R$. По этим кривым видно,

что уровень воды в точке $x = 0$ сначала круто падает, затем весьма медленно стремится к невозмущенному уровню.



Фиг. 5

Наблюдения над уровнем грунтовых вод во время полива и в следующий период могут дать возможность вычислить важную численную



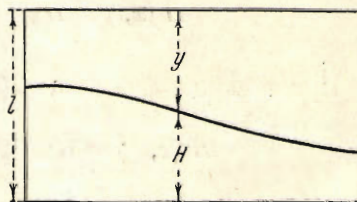
Фиг. 6

характеристику грунта $a^2 = kl/m$, которая учитывает суммарно водопроницаемость грунта и глубину слоя грунтовых вод.

Можно было бы рассмотреть другие начальные формы бугра грунтовых вод. Например, взяв $H(x, 0) = Ae^{-\alpha x^2}$, получим решение в виде

$$H(x, t) = \frac{A}{(1 + 4\alpha a^2 t)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\alpha x^2}{1 + 4\alpha a^2 t}\right\}$$

Но для грубых прикидок можно использовать прямоугольный бугор, эквивалентный по площади данному.



Фиг. 7

3. Учет испарения и транспирации воды растениями. На основании наблюдений М. М. Крылова зависимость интенсивности c испарения и транспирации от глубины свободной поверхности грунтовых вод оказалась близкой к линейной [4]; ее можно написать в виде

$$c = \beta - \alpha y, \quad c = \alpha H + \beta - \alpha l \quad [\text{м}^3 / (\text{м}^2 \text{ сутки})]$$

где $y = l - H$ — ордината, отсчитываемая от поверхности земли (фиг. 7).

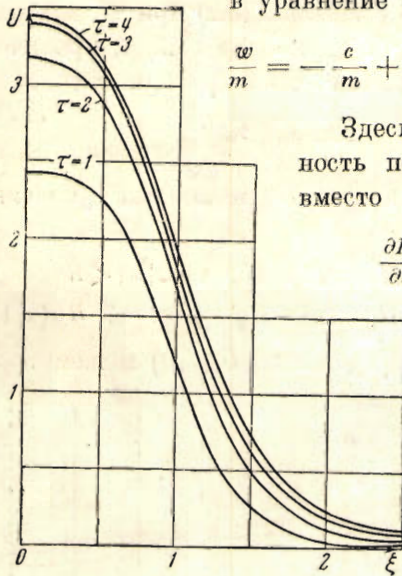
Обращаясь теперь к уравнению (1.1), заметим, что в случае испарения нужно считать вертикальный приток отрицательным, т. е. следует в уравнение (1.1) ввести величину

$$\frac{w}{m} = -\frac{c}{m} + \frac{\varepsilon}{m} = -b^2(H - H^*) + \frac{\varepsilon}{m} \quad (H^* = l \frac{\beta}{\alpha}) \quad (3.1)$$

Здесь ε имеет прежнее значение — интенсивность полива, b^2 — новая постоянная, введенная вместо α/m . Вместо (1.1) получим уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - b^2(H - H^*) + \frac{\varepsilon}{m} \quad (3.2)$$

Это же уравнение с другими значениями b и H^* получается при учете вертикальной скорости на границе со слабо проницаемым «водоупором». Мы привели [2] решение этого уравнения для полособразного дождя (или полива). Отметим, что в формуле (9.5) указанной статьи есть неправильности: все пять строк формулы должны начинаться со знака минус.



Фиг. 8

Введем в формулы (9.5) и (9.4) статьи [2] безразмерные величины:

$$U = \frac{4b^2m}{\varepsilon}(H - H^*), \quad \xi = \frac{x}{R}, \quad \tau = b^2l, \quad \alpha = \frac{bR}{2a} \quad (3.3)$$

Тогда при полособразном поливе с учетом испарения (или слабого просачивания в нижележащий грунт) для $U(\xi, \tau)$ будем иметь:

при $|x| < R$

$$U = 4 - 2e^{-\tau} \left[\phi \left(\frac{\alpha(1+\xi)}{\tau} \right) + \phi \left(\frac{\alpha(1-\xi)}{\tau} \right) \right] - \quad (3.4)$$

$$- e^{-2\alpha(1+\xi)} \left[1 - \phi \left(\frac{\alpha(1+\xi)}{\tau} - \tau \right) \right] - e^{2\alpha(1+\xi)} \left[1 - \phi \left(\frac{\alpha(1+\xi)}{\tau} + \tau \right) \right] -$$

$$- e^{-2\alpha(1-\xi)} \left[1 - \phi \left(\frac{\alpha(1-\xi)}{\tau} - \tau \right) \right] - e^{2\alpha(1-\xi)} \left[1 - \phi \left(\frac{\alpha(1-\xi)}{\tau} + \tau \right) \right]$$

при $|x| > R$

$$U = -2e^{-\tau} \left[\phi \left(\frac{\alpha(\xi+1)}{\tau} \right) - \phi \left(\frac{\alpha(\xi-1)}{\tau} \right) \right] - \quad (3.5)$$

$$- e^{-2\alpha(\xi+1)} \left[1 - \phi \left(\frac{\alpha(\xi+1)}{\tau} - \tau \right) \right] - e^{2\alpha(\xi+1)} \left[1 - \phi \left(\frac{\alpha(\xi+1)}{\tau} + \tau \right) \right] +$$

$$+ e^{-2\alpha(\xi-1)} \left[1 - \phi \left(\frac{\alpha(\xi-1)}{\tau} - \tau \right) \right] + e^{2\alpha(\xi-1)} \left[1 - \phi \left(\frac{\alpha(\xi-1)}{\tau} + \tau \right) \right]$$

В рассматриваемом случае линии свободной поверхности не будут неограниченно подниматься вверх, как это имело место в случае отсутствия испарения; они будут стремиться к предельному положению. Именно, при $t \rightarrow \infty$ функция U внутри и вне участка $|x| < R$ стремится соответственно к $4[1 - e^{-2x} \operatorname{ch} 2\alpha x]$, $4\operatorname{sh} 2\alpha e^{-2\alpha x}$.

На фиг. 8 даны графики зависимости U от ξ при $\alpha = 1$ для моментов времени $\tau = 1, 2, 3, 4$. На фиг. 9 показаны предельные положения свободной поверхности для ряда значений параметра α .

4. Растекание бугра грунтовых вод при наличии испарения. В этом случае задача сводится к интегрированию уравнения (3.2) при начальном условии (2.4). Подстановка $H - H^* = e^{-b^2 t} U$ приводит (3.2) к простейшему уравнению теплопроводности

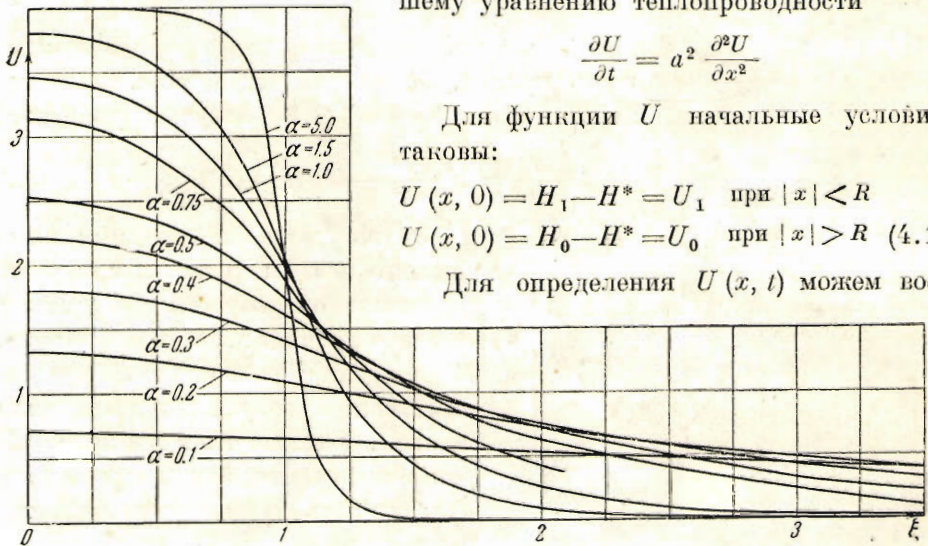
$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Для функции U начальные условия таковы:

$$U(x, 0) = H_1 - H^* = U_1 \quad \text{при } |x| < R$$

$$U(x, 0) = H_0 - H^* = U_0 \quad \text{при } |x| > R \quad (4.1)$$

Для определения $U(x, t)$ можем вос-



Фиг. 9

пользоваться (2.3), заменив в ней H_0 и H_1 на U_0 и U_1 . Получим

$$U(x, t) = U_0 + \frac{U_1 - U_0}{2a} \left[\phi\left(\frac{R-x}{2a\sqrt{t}}\right) + \phi\left(\frac{R+x}{2a\sqrt{t}}\right) \right]$$

Возвращаясь к $H(x, t)$, будем иметь

$$H(x, t) = H^* + e^{-b^2 t} \left\{ H_0 - H^* + \frac{H_1 - H_0}{2} \left[\phi\left(\frac{R-x}{2a\sqrt{t}}\right) + \phi\left(\frac{R+x}{2a\sqrt{t}}\right) \right] \right\} \quad (4.2)$$

При $t \rightarrow \infty$ уровень грунтовых вод стремится к $H^* = \text{const.}$

Поступила 4 VII 1951

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Черкасов А. А. Мелиорация и сельскохозяйственное водоснабжение. Гос. издательство сельхозлитературы. М. 1950.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. О неустановившихся движениях грунтовых вод при фильтрации из водохранилищ. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 2. Стр. 187—206.
3. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М.—Л. Гостехиздат. 1947.
4. Крылов М. М. К изучению динамики баланса грунтовых вод в целях гидро-геологического прогноза. Известия АН УзССР. 1947. Вып. 2. Стр. 106—117.